В. В. Кабанов, Конечные группы с самоцентрализующейся подгруппой порядка 6 и одним классом инволюций, *Алгебра и логика*, 1972, том 11, номер 5, 516–534

Алгебра и логика, 11, № 5 (1972), 516–534.

УДК 519.44

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С САМОЦЕНТРАЛИЗУЮЩЕЙСЯ ПОДГРУППОЙ ПОРЯДКА 6 И ОДНИМ КЛАССОМ ИНВОЛЮЦИЙ

В.В.КАБАНОВ

§ 1. Введение

Конечные группы с самоцентрализующейся подгруппой порядка 3 были описаны Файтом и Томпсоном в работе [7]. Доказанная ими теорема позволяет определить строение конечных простых групп с одним классом инволюций и самоцентрализующейся циклической подгруппой порядка 6.

ТЕОРЕМА. *Пусть конечная простая группа G с одним классом инволюций содержит элемент t порядка 6 такой, что $C_G(t)=\langle t\rangle$. Тогда G изоморфна одной из следующих групп: $L_2(11)$, $L_2(13)$, $L_3(3)$, группе Матье M_{11} или группе Янко J_1 порядка 175560.*

§ 2. Некоторые необходимые обозначения и результаты

A_n – знакопеременная группа степени n;

S_n – симметрическая группа степени n;

$L_n(q)$ – проективная специальная линейная группа размерности n над полем из q-элементов;

V_{p^n} – элементарная абелева группа порядка p^n;

Z_n – циклическая группа порядка n;

$\langle a, b, \ldots\rangle$ – группа, порожденная элементами $a, b, \ldots$;

$D_{2n}=\langle a, b\rangle$ – группа диэдра, где $a^n=b^2=1$ и $bab=a^{-1}$;

Q_{2^n} – обобщенная группа кватернионов порядка 2^n ;

$A * B$ – центральное произведение групп A и B .

А. (Файт–Томпсон [7].) Если конечная группа G содержит элемент t порядка 3 такой, что $C_G(t) = \langle t \rangle$, то G имеет нильпотентную нормальную подгруппу H и одно из следующих утверждений верно:

(1) G/H – циклическая группа порядка 3 ;

(2) G/H – группа диэдра порядка 6;

(3) $G/H \simeq A_5$ и H – 2-группа;

(4) $G \simeq L_2(7)$ и H – единичная группа.

Б. (Хигмэн [13]). Пусть конечная группа G имеет нормальную 2-подгруппу Q такую, что G/Q – группа диэдра порядка 6. Предположим, s – элемент порядка 3 из G действует без неподвижных точек на Q , и пусть P – силовская 2-подгруппа из G . Тогда следующие утверждения верны:

(1) если A – абелева подгруппа из Q , то группа $\langle A, A^s \rangle$ тоже абелева;

(2) если $|Q| > 4$, то класс Q меньше класса любой другой подгруппы индекса 2 из P .

Хорошо известно, что в условиях теоремы Б класс подгруппы Q не больше, чем 2.

В. (Хигмэн [13] .) Пусть G – конечная группа с нормальной 2-подгруппой Q такой, что $G/Q \simeq L_2(2^n)$, $n > 1$, и предположим, s – элемент порядка 3 из G действует без неподвижных точек на Q . Тогда Q есть элементарная абелева группа и является прямым произведением минимальных нормальных подгрупп порядка 2^{2n} . Силовская 2-подгруппа P из G имеет класс 2, и если $|Q| > 2^{2n}$, то Q – единственная абелева подгруппа индекса 2^n в P .

Из теоремы В следует, что в случае (3) теоремы А группа H элементарная абелева.

Всюду дальше G – конечная простая группа, удовлетворяющая условиям теоремы и не удовлетворяющая заключению. Положим $\tau = t^3$, а $s = t^2$. C – централизатор инволюции τ в G . Так как все инволюции в G сопряжены, то C содержит силовскую 2-подгруппу P группы G . Фактор-группа $\bar{C} = C/\langle \tau \rangle$ имеет самоцентрализующуюся подгруппу $\langle \bar{s} \rangle$ порядка 3. Следовательно, $\bar{C}$ удовлетворяет условиям теоремы А. В дальнейшем мы будем называть $\bar{C}$ группой типа $A(i)$, где $1 \le i \le 4$.

§ 3. $\bar{C}$ - группа типа А (1)

В этом случае C – 2-замкнутая группа, и так как в группе G все инволюции сопряжены, то централизатор любой инволюции из G 2-замкнут. Такие группы были изучены М.Сузуки [16], и среди них нет групп с циклической самоцентрализующейся подгруппой порядка 6.

§ 4. $\bar{C}$ - группа типа А(2), и $Z(P)$ - нециклический

В $\bar{C}$ - существует нильпотентная нормальная подгруппа $\bar{H}$ такая, что $\bar{C}/\bar{H}$ - группа диэдра порядка 6. Если H - полный прообраз $\bar{H}$ в C, то положим $T = O_2(H)$.

Пусть $Z(P) \not\subset Z(T)$. Тогда существует элемент $v \in Z(P)$ и $v \notin T$. Если $T \neq \langle \tau \rangle$, то $C_C(T) = \langle v \rangle \cdot Z(T) \cdot O_{2'}(H) \lhd C$. Отсюда $T \cdot C_C(T) = P \cdot O_{2'}(H) \lhd C$, что противоречит строению C. Значит, $T = \langle \tau \rangle$, и P изоморфна элементарной абелевой группе порядка 4. По теореме Горенстейна и Уолтера [17], G изоморфна $L_2(q)$ для $q = 11$ или $q = 13$. В группах $L_2(11)$ и $L_2(13)$ все инволюции сопряжены и, следовательно, они удовлетворяют условиям теоремы.

Пусть $Z(P) \subset Z(T)$. Покажем, что в $Z(P)$ существует инволюция u такая, что $O_2(C_G(u)) \neq T$. Доказательство этого факта разобьем на два случая, когда $\tau \in \Phi(T)$ и когда $\tau \notin \Phi(T)$. Рассмотрим группу $N = N_G(H)$. Тогда $N = N_G(T)$, так как $H = T \cdot C_G(T)$ и T - характеристическая подгруппа в H.

Если инволюция τ принадлежит подгруппе Фраттини $\Phi(T)$ группы T, то фактор-группа $\tilde{N} = N/\Phi(T)$ имеет самоцентрализующуюся подгруппу $\langle \tilde{s} \rangle$ порядка 3. В самом деле, если $\tilde{x} \in \tilde{N}$ и $[\tilde{x}, \tilde{s}] = \tilde{1}$ и $\tilde{x}$ не принадлежит $\langle \tilde{s} \rangle$, то и в N есть элемент x, $[x, s] = 1$ и x не принадлежит $\langle s \rangle$. Но в этом случае $[x^{-1}\tau x, s] = 1$, где $x^{-1}\tau x \in T$. Так как $C_T(s) = \langle \tau \rangle$, то $x^{-1}\tau x = \tau$. Значит, $x \in C_G(t) = \langle t \rangle$, и $\tilde{x}$ принадлежит $\langle \tilde{s} \rangle$. Противоречие.

Из того, что $C \subset N$ и фактор-группа $N/\Phi(T)$ имеет само -

централизующуюся подгруппу порядка 3, следует, что $\widetilde{N}$ - группа типа A(2). Пусть $\widetilde{F}$ - нильпотентный нормальный делитель $\widetilde{N}$, а F - его полный прообраз в N. Понятно, что F содержит H. По теореме Бернсайда (теорема 5.1.4 [9]) F - нильпотентная группа. Значит, $F=T\cdot C_G(T)=H$, и поэтому $N=C$. Теперь так как $N=N_G(T)$, а $Z(C)=\langle\tau\rangle$, то $T\neq O_2(C_G(u))$ даже для любой инволюции u из $Z(P)$.

Если τ не принадлежит $\Phi(T)$, то группа $\langle\tau\rangle$ выделяется прямым множителем в T. Пусть теперь $O_2(C_G(u))=T$ для каждой инволюции u из $Z(P)$. Тогда из того, что все инволюции из $Z(P)$ сопряжены в G, группа $T=\Omega_1(Z(P))\times T_1$, где T_1 - некоторая подгруппа из T. Так как $Z(P)\subset Z(T)$, то подгруппа $\Omega_1(Z(P))$, порожденная инволюциями из $Z(P)$, совпадает с $Z(P)$. Значит, $T=Z(P)\times T_1$. Так как подгруппа Фраттини $\Phi(T)=\Phi(T_1)$, то $\Phi(T_1)$ нормальна в P и поэтому $\Phi(T_1)=1$. Отсюда T - элементарная абелева группа. Из строения C мы получаем, что T является прямым произведением $\langle\tau\rangle$ и минимальных нормальных подгрупп порядка 4 группы C. Так как $Z(P)$ - нециклическая группа, то в минимальной нормальной подгруппе порядка 4 из C существует инволюция $u\in Z(P)$. Инволюция τ сопряжена с u в группе G, поэтому $C_G(\tau)/\langle\tau\rangle\simeq C_G(u)/\langle u\rangle$ и $P/\langle\tau\rangle\simeq P/\langle u\rangle$. С другой стороны, $P/\langle\tau\rangle$ не может быть изоморфна $P/\langle u\rangle$, так как $P/\langle\tau\rangle$ не имеет прямых факторов, а $P/\langle u\rangle$ имеет прямой фактор $\langle\tau,u\rangle/\langle u\rangle$. Противоречие. Этим заканчивается доказательство того, что в $Z(P)$ существует инволюция u с $O_2(C_G(u))\neq T$.

Положим $R=O_2(C_G(u))$. Так как R сопряжена с T в группе G, то $T\simeq R$ и силовская 2-подгруппа P группы G содержит две изоморфные подгруппы индекса 2. Теперь мы хотим воспользоваться теоремой Б для подходящей фактор-группы G, чтобы ограничить порядок P. Рассмотрим сначала фактор-группу $\bar{C}$. Если подгруппы $\bar{T}$ и $\bar{R}$ имеют один и тот же класс, то, по теореме Б(2), $|\bar{T}|\leq 4$. Так как $Z(P)\subset Z(T)$, то $|\bar{T}|=4$, а $\bar{C}/O_{2'}(\bar{C})\simeq S_4$. Ввиду того, что $Z(P)$ нециклический, $P\simeq D_8\times Z_2$ и G имеет более одного класса инволюций. Это противоречит условиям теоремы. Значит, $cl(\bar{T})<cl(\bar{R})$. Так как $cl(\bar{R})\leq 3$, то $cl(\bar{T})\leq 2$. Пусть W - наи-

меньшая нормальная подгруппа из C, содержащая инволюции τ и u. Ясно, что $W=\langle \tau, u, u^s\rangle$, где $s=t^2$ и $W\simeq V_8$. Пусть теперь

$$\tilde{C} = C/W.$$

Если $\tilde{R}=RW/W$ – абелева группа, то, по теореме Б(2), $cl(\tilde{T}) = cl(\tilde{R})$ и $\tilde{C}/O_{2'}(\tilde{C})\simeq S_4$. Значит, $|T|=2^5$ и $Z(T)\geqslant W\geqslant T'$. Коммутант группы T не может быть равен W, так как тогда он был бы индекса 4 в T и T была бы группой максимального класса, по теореме 5.4.5 из [9], а $Z(T)$ был бы циклической группой. Значит, $T'\in\langle\tau\rangle$, либо $T'=\langle u\rangle\times\langle u^s\rangle$. Если $T'\in\langle\tau\rangle$, то в этом случае $\bar{T}=T/\langle\tau\rangle$ – абелева гомоциклическая группа ввиду того, что $|\bar{T}|=2^4$ и что $\bar{s}$ действует без неподвижных точек на $\bar{T}$. Отсюда $\bar{T}$ изоморфна либо V_{16}, либо $Z_4\times Z_4$. Если $T'=1$, то, по теореме 5.2.3 из [9], $T=C_T(s)\times[T,\langle s\rangle]$ и, следовательно, изоморфна либо V_{32}, либо $Z_2\times Z_4\times Z_4$. Но тогда τ не может быть сопряжена с u в G, так как $P/\langle\tau\rangle$ не имеет прямых факторов порядка 2, а $P/\langle u\rangle$ имеет прямой фактор $\langle\tau,u\rangle/\langle u\rangle$.

Рассмотрим случай $T'=\langle\tau\rangle$, а $T=W\langle x\rangle\langle y\rangle$, где $[x,y]=\tau$ и $y=x^s$. Легко видеть, что есть две возможности для $\Phi(T)$, а именно $\Phi(T)=\langle\tau\rangle$ и $\Phi(T)=W$. Пусть $\Phi(T)=\langle\tau\rangle$. Тогда, по теореме Б(1), группа $\langle x,y\rangle$ допустима относительно s и имеет порядок 8. Ввиду того, что группа диэдра не имеет автоморфизмов порядка 3, а $C_T(s)=\langle\tau\rangle$, мы имеем $\langle x,y\rangle=Q_8$. Значит, $T=Q_8\times V_4$ и $P/\langle\tau\rangle\neq P/\langle u\rangle$. Отсюда инволюция τ не сопряжена с u в G, что противоречит условиям теоремы.

Пусть теперь $\Phi(T)=W$. Тогда $T=(\langle\tau\rangle\times\langle x\rangle)\lambda\langle y\rangle$ и $\tau^2=x^4=y^4=1$, $[x,y]=\tau$ – группа Миллера-Морено порядка 2^5 с нециклическим центром. Из строения группы $Aut(Z_4\times Z_4)$ мы получаем $\bar{C}=\langle\bar{x}\rangle\times\langle\bar{y}\rangle\lambda\langle\bar{s}\rangle\lambda\langle\bar{z}\rangle$, где $\bar{z}^2=1$, $\bar{x}^s=\bar{y}$, $\bar{y}^{\bar{s}}=\bar{x}^{-1}$, $\bar{x}^{\bar{z}}=\bar{x}$, $\bar{y}^{\bar{z}}=\bar{x}^{-1}\bar{y}^{-1}$. Теперь $P'=\langle\tau\rangle\times\langle x\rangle\simeq Z_2\times Z_4$ и $P'/\langle\tau\rangle\not\simeq P'/\langle x^2\rangle$, что противоречит сопряженности инволюций τ и x^2 в G, так как $\Omega_1(P')\leqslant Z(P)$.

Мы доказали, что $T'\neq\langle\tau\rangle$. Значит, $T'=\langle u\rangle\times\langle u^s\rangle$. По теореме 5.2.3 из [9], $\tilde{T}=T/T'=C_{\tilde{T}}(\tilde{s})\times[\tilde{T},\langle\tilde{s}\rangle]$. Так как $C_{\tilde{T}}(\tilde{s})=\langle\tilde{\tau}\rangle$, то $\tau\notin\Phi(T)$. По лемме 1 из [1], $\tau\notin\Phi(P)$. Поэтому $P=\langle\tau\rangle\times P_1$. Ввиду того, что в G – один класс инволюций, и из теоремы Бернсайда (см., например, [9], теорема 7.1.1), мы получаем

$\Omega_1(Z(P))\cap\Phi(P)=1$. Но тогда P – абелева группа и $Z(P)\not\subset Z(T)$. Противоречие.

Мы доказали, что $cl(\widetilde{R})=2$. По теореме Б(2), $\widetilde{T}$ – абелева группа, и опять $T'\leq W$. Если $T'\leq\langle\tau\rangle$, то $R'\leq\langle u\rangle$ и тогда $\widetilde{R}$ - абелева группа. Но $cl(\widetilde{R})=2$, и, следовательно, $T'=W$ или $T'=$ $=\langle u\rangle\times\langle u^s\rangle$. Если $T'=\langle u\rangle\times\langle u^s\rangle$, то так же, как и в предыдущем абзаце, получаем противоречие с тем, что $Z(P)\subset Z(T)$.

Значит, $T'=W$. Обозначим через $\widetilde{K}$ нормальное замыкание $\widetilde{R}'$ в $\widetilde{C}$. По теореме б(1), мы получаем $|\widetilde{K}|=16$, если $|W\cap R'|=2$, и $|\widetilde{K}|=4$, если $|W\cap R'|=4$. Подгруппа $\widetilde{R}\widetilde{K}/\widetilde{K}$ абелева, так как $\widetilde{K}\supset\widetilde{R}'$. Значит, по теореме Б(2), $\widetilde{C}/\widetilde{K}\cdot O_2(\widetilde{C})\simeq S_4$. Пусть K – полный прообраз $\widetilde{K}$ в C, тогда $C/K\cdot O_{2'}(C)\simeq S_4$ и $|K|=2^5$ или $|K|=2^7$.

Покажем, что K – элементарная абелева группа. Так как K порождается инволюциями, достаточно показать, что $K'=1$. Пусть $W=$ $=\langle\tau,u,u^s\rangle$, $R'=W_1=\langle u,v,v^{s_1}\rangle$, а s_1 – элемент порядка 3 из $C_G(u)$. Тогда, ввиду того, что $\langle\tau,u\rangle\subseteq Z(P)$ и в W существует подгруппа индекса 2 из $Z(P)$ (без ограничения общности можно считать, что эта подгруппа равна $\langle u,v\rangle$), группа $\langle\tau,u,u^s,v,v^s\rangle$ принадлежит $Z(T)$. Значит, K содержит подгруппу индекса 4, принадлежащую $Z(T)$ и порожденную инволюциями. Отсюда K можно записать таким образом: $K=(\langle\tau,u,u^s,v,v^s\rangle\times\langle v^{s_1}\rangle)\lambda\langle v^{s_1 s}\rangle$, где $\langle\tau,u,u^s,v,v^s\rangle\leq Z(K)$. Но тогда $|K'|\leq 2$, и ввиду того, что K допустима относительно $\langle s\rangle$, мы получаем $K'\leq\langle\tau\rangle$. Рассмотрим теперь группу $\langle\tau,v^{s_1},v^{s_1 s}\rangle$. Так как $[v^{s_1},v^{s_1 s}]\in\langle\tau\rangle$, то, по теореме Б(1), эта группа допустима относительно $\langle s\rangle$. Но так как группа диэдра не имеет автоморфизмов порядка 3, а $C_T(\langle s\rangle)=\langle\tau\rangle$, мы получаем $\langle\tau,v^{s_1},v^{s_1 s}\rangle\simeq V_8$, и, следовательно, K – элементарная абелева группа.

Пусть теперь $K\simeq V_{2^5}$. Тогда холловскую $\{2,3\}$ – подгруппу H из C можно записать следующим образом: $H=K\langle a\rangle\langle b\rangle\lambda\langle s\rangle\lambda\langle c\rangle$, где $H/K\simeq S_4$. Причем $K=\langle\tau\rangle\times\langle u\rangle\times\langle u^s\rangle\times\langle v^{s_1}\rangle\times\langle v^{s_1 s}\rangle$. Ясно, что в этом случае $Z(P)\simeq V_4$. Так как в G один класс инволюций и централизатор силовской 2-подгруппы P из G не делится на 3, мы имеем элемент d порядка 3 в $N_G(P)$, который действует транзитивно на инволюциях из $Z(P)$. Если d действует без неподвижных точек на P, то класс нильпотентности P равен 2. В этом случае подгруппа $\bar{R}$ тоже имела бы класс 2, а по теореме Б(2) $\bar{T}$ была бы абелева, что противоречит $T'=W\simeq V_8$. Следовательно, $C_P(d)\neq 1$. Так как $|P|=2^8$, то есть четная степень, то d централизует в P больше, чем группу порядка 2, что невозможно из-за сопряженности всех инволюций.

Пусть $K=V_{2^7}$. Если τ сопряжена с u элементом x, то, так как $R=O_2(C_G(u))\subset P$, K^x также содержится в P. Если $|K\cap K^x|=2^6$ и $K^x\not\subset T$, то инволюция из $K^x\setminus T$ централизует подгруппу индекса 2 в K, что невозможно ввиду действия $N_C(\langle s\rangle)$ на T и теоремы 4(2) из [16]. Значит, в $T\setminus K$ существует инволюция. Пусть a – эта инволюция и $a^s=b$. Ввиду теоремы Б (1) и того, что D_8 не имеет автоморфизмов порядка 3, инволюция a перестановочна с b. Мы имеем $T=K\lambda(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)$. Так как $T\setminus T'$ порождается инволюциями, то $T'=\Phi(T)$. Мы знаем, что $T=(\langle\tau\rangle\times\langle u\rangle\times\langle u^s\rangle\times\langle v\rangle\times\langle v^s\rangle\times\langle v^{s_1}\rangle\times\langle v^{s_1 s}\rangle)\lambda(\langle a\rangle\times\langle b\rangle)$, причём $T'=\Phi(T)=\langle\tau\rangle\times\langle u\rangle\times\langle u^s\rangle$ и $Z(T)=T'\times\langle v\rangle\times\langle v^s\rangle$.
Значит, $V=\langle v\rangle\times\langle v^s\rangle$ – прямой фактор T и нормальная подгруппа в C. Но тогда в фактор-группе $P/\langle v\rangle$ тоже имеется прямой фактор $\langle v^s, v\rangle/\langle v\rangle$, тогда как $P/\langle\tau\rangle$ не имеет прямых факторов. Противоречие.

Резюмируя, мы получаем следующее утверждение: если $\bar{C}$ – группа типа А(2) и $Z(P)$ – нециклическая группа, то G изоморфна $L_2(11)$ или $L_2(13)$ и, следовательно, не противоречит теореме.

§ 5. $\bar{C}$ -группа типа А(2), и $Z(P)$ – циклический

В $\bar{C}$ существует нильпотентная нормальная подгруппа $\bar{H}$ такая, что $\bar{C}/\bar{H}$ – группа диэдра порядка 6. Как и в предыдущем параграфе, пусть H – полный прообраз $\bar{H}$ в C и $T=O_2(H)=O_2(C)$.

ЛЕММА 1. $Z(T)=\langle\tau\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду того, что T – подгруппа индекса 2 в P, то ранг $\Omega_1(Z(T))$ не превосходит 2. Если ранг $\Omega_1(Z(T))$ равен 2, то мы получаем противоречие с тем, что $C_T(s)=\langle\tau\rangle$, так как подгруппа $\Omega_1(Z(T))$ допустима относительно $\langle s\rangle$. Значит,

$Z(T)$ – циклическая группа. Если $|Z(T)| > 2$, то мы опять получаем противоречие с тем, что $C_T(s) = \langle \tau \rangle$, так как тогда $Aut(Z(T))$ – 2-группа и, следовательно, s централизует $Z(T)$. Отсюда $|Z(T)| = 2$. Ввиду того, что $\langle \tau \rangle \leq Z(T)$, лемма доказана.

ЛЕММА 2. Подгруппа Фраттини $\Phi(T)$ группы T – элементарная абелева группа и содержится в $Z_2(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала мы докажем, что T' – элементарная абелева группа. Если T' – абелева группа, то, по теореме 5.2.3 из [9], $T' = \langle \tau \rangle \times [T', \langle s \rangle]$. Значит, $\Phi(T') = 1$, иначе $\Phi(T') \cap Z(T) \neq 1$ и $Z(T)$ – нециклический, что противоречит лемме 1. Пусть теперь T' неабелева. Так как элемент $\langle \bar{\bar{s}} \rangle$ действует без неподвижных точек на $\bar{\bar{T}}$, то класс $\bar{\bar{T}}$ не превосходит 2. Значит, $T' \leq Z_2(T)$ и $[T', T'] = \langle \tau \rangle$. По лемме Шериева [4], $T' = M_1 * M_2 * \ldots * M_k * Z(T')$, где M_i $(1 \leq i \leq k)$ – группа Миллера-Морено. Пусть $M = M_i$ для некоторого $i = 1, \ldots, k$. Так как $\langle \tau \rangle \in M$ и $T' \leq Z_2(T)$, то M – нормальная подгруппа в T. Теперь, ввиду результата Бехтеля [11], M не может иметь циклический центр. Значит, $Z(M)$ – нециклическая группа. Из строения групп Миллера-Морено [15] мы знаем, что тогда M имеет три максимальные подгруппы A_j, $j = 1, 2, 3$, причём $\Phi(A_j) \neq M' = \langle \tau \rangle$. Ввиду того, что $M \lhd T$, мы имеем $A_j \lhd T$ для некоторого j. Но тогда $\Phi(A_j) \lhd T$ и $\Phi(A_j) \neq \langle \tau \rangle$, значит, $Z(T)$ – нециклический, что противоречит лемме 1. Это противоречие доказывает, что T' – элементарная абелева группа.

Пусть теперь $\bar{x}, \bar{y} \in \bar{\bar{T}}$. Тогда, ввиду того, что класс $\bar{\bar{T}}$ не превосходит 2 и коммутант $\bar{\bar{T}}$ элементарный, мы имеем $[\bar{x}, \bar{y}^2] = [\bar{x}, \bar{y}]^2 = 1$. Но так как $\Phi(\bar{T}) = \mho_1(\bar{T})[\bar{T}, \bar{T}]$, то $\Phi(\bar{T}) \leq Z(\bar{T})$ и, значит, $\Phi(T) \leq Z_2(T)$. Повторяя теперь рассуждения предыдущего абзаца для $\Phi(T)$, если $\Phi(T)$ не элементарная абелева группа, получаем противоречие. Лемма доказана.

Из этой леммы немедленно вытекает, что $exp(T) \leq 4$.

ЛЕММА 3. $Z_2(P) < Z_2(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть элемент $x \in Z_2(P)$ и $x \notin Z_2(T)$. Ясно, что тогда $x \notin T$. Так как $x \in Z_2(P)$ то $x \in Z_2(\bar{P})$, по лемме 1. Значит, $\bar{x} \in C_{\bar{C}}(\bar{T})\bar{T} \lhd \bar{C}$. Теперь по лемме 4(2) из работы Сузуки [16] $\langle x \rangle$ нормализует некоторую подгруппу, сопряженную с $\langle \bar{s} \rangle$, скажем $\langle \bar{s}_1 \rangle$. Но тогда $[\langle \bar{x} \rangle, \langle \bar{s}_1 \rangle] \leq C_{\bar{C}}(\bar{T})\cdot\bar{T} \cap \langle \bar{s}_1 \rangle = 1$, что противоречит $C_{\bar{C}}(\bar{s}) = \langle \bar{s} \rangle$. Лемма доказана.

Пусть $U(P)$ – это множество инвариантных в P элементарных абелевых подгрупп порядка 4.

ЛЕММА 4. $U(P) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $U(P) = \emptyset$. Тогда по теореме 5.4.10 [9], P – либо 2-группа максимального класса, либо циклическая группа. Если P – 2-группа максимального класса, то P – метациклическая группа. Но тогда T тоже является метациклической и, кроме того, допускает автоморфизм порядка 3, фиксирующий инволюцию τ. Следовательно, T – группа кватернионов порядка 8. Значит, P будет обобщенной группой кватернионов или полудиэдральной группой порядка 16. Первый случай исключается теоремой Брауэра-Сузуки [6]. Во втором случае $C/O_{2'}(C) = GL(2,3)$ и, ввиду результата Мазурова [2], G изоморфна $L_3(3)$ или M_{11} и, следовательно, не противоречит теореме. Лемма доказана.

ЛЕММА 5. Если $V \in U(P)$, то $N(V)/C(V) \simeq D_6$ и $\Omega_1(P) \nleq C_P(V)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала, что $N(V)/C(V) \simeq D_6$ – группа диэдра порядка 6. Ясно, что $N(V)/C(V)$ изоморфно вкладывается в D_6. Ввиду того, что $Z(P)$ – циклический, P не содержится в $C(V)$, и, следовательно, достаточно показать, что $|N(V)/C(V)|$ делится на 3. Рассмотрим $P_1 = C_P(V)$. Заметим, что $\Omega(Z(P_1)) = V$, так как $|P:P_1| = 2$ и $Z(P)$ – циклический. Пусть $V = \langle \tau \rangle \times \langle u \rangle$. Ясно, что $C(u) \geqslant P_1$. Пусть Q – силовская 2-подгруппа $C(u)$, содержащая P_1. Ввиду того, что в G – один класс инволюций, Q – силовская 2-подгруппа из G и, следовательно, содержит P_1 в качестве подгруппы индекса 2. Значит, Q нормализует $V = \Omega_1(Z(P_1))$. Пусть $\alpha_1 \in P/P_1$, а $\alpha_2 \in Q/P_1$. Тогда легко видеть, что $\alpha_1\alpha_2$ индуцирует на V автоморфизм порядка 3, что и требовалось.

Докажем второе утверждение леммы. Пусть $\Omega_1(P) \leq C_P(V)$. Тогда $N(V)/C(V)$ имеет 2-элементы только порядка не менее 4. Так как G имеет один класс инволюций и $C_G(t) = \langle t \rangle$, где t – эле -

мент порядка 6 из G, то $|C(V)|$ не делится на 3. Отсюда силовская 3-подгруппа $N(V)$ имеет порядок 3. Пусть $\langle s_1 \rangle$ - силовская 3-подгруппа $N(V)$. Из рассуждений Фраттини $N(V)=C(V)N_{N(V)}(\langle s_1 \rangle)$. Ясно, что $|N_{N(V)}(\langle s_1 \rangle): C_{N(V)}(s_1)| = 2$. Так как все 2-элементы из $N(V)/C(V)$ имеют порядок не ниже 4, то s_1 централизует инволюцию τ_1 из $C(V)$. Но в G - один класс инволюций, значит, $\langle \tau_1 \rangle \times \langle s_1 \rangle$ -самоцентрализующаяся циклическая подгруппа порядка 6 из G, причём $N(\langle s_1 \rangle \times \langle \tau_1 \rangle) = \langle s_1 \rangle \lambda \langle \omega \rangle$, где $\omega^2 = \tau_1$, $\omega^{-1} s_1 \omega = s_1^{-1}$. Ввиду результата [1], G - в этом случае непростая группа, что противоречит условиям теоремы.

ЛЕММА 6. T не может быть экстраспециальной группой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем сначала, что если T - экстраспециальная группа, то $|T| \leq 2^5$. Пусть v - инволюция из $T \setminus \langle \tau \rangle$. Обозначим через K централизатор v в T. Ясно, что $|T:K| = 2$. Если K - абелева группа, то, по лемме III. 13.7 из [14], T изоморфна Q_8 или D_8. Так как T допустима относительно $\langle s \rangle$, то $T \simeq Q_8$ и $U(P) = \Phi$, что противоречит лемме 4. Пусть K - неабелева группа, тогда $K' = \langle \tau \rangle$. Рассмотрим $C_G(v)$. Так как в G один класс инволюций, $C_G(v)$ изоморфен C и, следовательно, $O_2(C_G(v))$ - экстраспециальная группа с коммутантом $\langle v \rangle$. Ясно, что $K \leq C_G(v)$. Рассмотрим $O_2(C_G(v)) \cap K$. Это пересечение является абелевой группой, так как $(O_2(C_G(v)) \cap K)' \leq O_2(C_G(v))' \cap K' = \langle v \rangle \cap \langle \tau \rangle = 1$. Так как подгруппа $O_2(C_G(v))$ имеет индекс 2 в силовской 2-подгруппе из $C_G(v)$, а K имеет индекс 4 в P, то $O_2(C_G(v))$ имеет абелеву подгруппу индекса 4. Ввиду леммы III.13.7 [14], мы имеем

$$|O_2(C_G(v))| = |T| = 2^5.$$

Пусть снова v - инволюция из $T \setminus \langle \tau \rangle$, тогда нормальное замыкание W группы $\langle \tau \rangle \times \langle v \rangle$ в C, ввиду результата Б(1), изоморфно V_8, то есть $W = \langle \tau \rangle \times \langle v \rangle \times \langle v^s \rangle$.

Сейчас мы хотим применить к нашей ситуации работы Хелда [10-12]. Прямое применение этих результатов невозможно, так как в нашем случае $O_{2'}(C)$ может быть неединичной группой. Однако те леммы из этих работ, на которые мы ссылаемся, верны и при $O_{2'}(C) \neq 1$. По леммам 1.1 и 1.2 из работы Хелда [12], мы заключаем, что в

$T \setminus W$ существуют инволюции a и b, такие, что $a^s = b$, $b^s = ab$ и, в частности, $\langle a,b\rangle\langle s\rangle \simeq A_4$. Кроме того, из работы [1] следует, что элемент d из P, инвертирующий s, является инволюцией. Если мы выберем a и b так же, как и в работе Хелда [12], то мы получаем следующие две возможности:

(1) $a^d = a$, $b^d = \tau^\beta a b$;

(2) $a^d = \tau \cdot v a$, $b^d = \tau^\beta \cdot v \cdot v^s \cdot a \cdot b$, где $\beta \in GF(2)$.

Рассмотрим случай (1). Группа $X = \langle b, \tau^\beta a b\rangle\langle d\rangle$ – диэдральная порядка [8] и $W \cap X = 1$. По результату Гашуца [8] C расщепляется над W. По замечанию из [11], $C/O_{2'}(C)$ – единственно определенная группа, изоморфная централизатору центральной инволюции из A_8 -знакопеременной группы степени 8. По лемме 2.5 из работы Хелда [10], группа G имеет более одного класса сопряженных инволюций.

В случае (2), по лемме 1.5 из [12], силовская 2-подгруппа $C(a)$ имеет порядок 2^4 и, следовательно, в G–более одного класса инволюций. Лемма доказана.

ЛЕММА 7. П у с т ь $|H| = 2^4$ и H д о п у с к а е т р е г у л я р н ы й а в т о м о р ф и з м п о р я д к а 3. Т о г д а H – а б е л е в а г о м о ц и к л и ч е с к а я г р у п п а.

Доказательство проводится непосредственно.

ЛЕММА 8. Е с л и $T' \simeq V_8$, т о $T' \neq \Phi(T)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $T' \simeq V_8$ и $T' = \Phi(T)$, тогда по теореме Б(1) в T существует подгруппа H такая, что $\bar{H} = H/\langle\tau\rangle = \langle\bar{a}\rangle \times \langle\bar{b}\rangle \leftthreetimes \langle\bar{s}\rangle$, где порядки $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны 4 и $O_2(H) \lhd T$. По лемме 2, экспонента $O_2(H)$ равна 4. Если $O_2(H)$ – абелева группа, то, по теореме 5.2.3 из [9], $O_2(H) = C_{O_2(H)}(s) \times [O_2(H), \langle s\rangle]$. Так как $\Phi([O_2(H), \langle s\rangle]) \neq 1$, а $O_2(H) \lhd T$, то

$$Z(T) \cap \Phi([O_2(H), \langle s\rangle]) \neq 1.$$

Это противоречит цикличности $Z(T)$, ввиду того, что

$$Z(T) = \langle\tau\rangle = C_{O_2(H)}(s).$$

Пусть $O_2(H)$ неабелева. Тогда $O_2(H) = (\langle\tau\rangle \times \langle a\rangle) \leftthreetimes \langle b\rangle$, где a и b – некоторые прообразы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в H. $O_2(H)$ имеет три максимальные подгруппы $M_1 = \langle\tau\rangle \times \langle a^2\rangle \times \langle b\rangle$, $M_2 = \langle\tau\rangle \times \langle a\rangle \times \langle b^2\rangle$ и $M_3 = \langle\tau\rangle \times \langle a^2\rangle \times \langle ab\rangle$, которые являются абелевыми группами типа (1.1.2). Так как $O_2(H) \lhd T$, то для некоторого $i \in \{1, 2, 3\}$ подгруппа M_i нормальна в T. Значит, и $\Phi(M_i) \lhd T$. Но $\Phi(M_i) \neq \langle\tau\rangle$ для любого $i = 1, 2, 3$, значит, $\langle\tau\rangle \times \Phi(M_i) \in Z(T)$. Противоречие. Лемма доказана.

Докажем теперь, что одно из следующих утверждений выполнено для $C = C_G\langle\tau\rangle$, P -силовской 2-подгруппы из C, $T = O_2(C)$ и $V = \langle\tau\rangle \times \langle v\rangle \in U(P)$:

а) в P существует инволюция w такая, что

$$|C_P(w)| \leq 2^4 \quad \text{и} \quad w \in P \setminus C_P(V);$$

б) инволюция v не принадлежит подгруппе Фраттини $\Phi(T)$ группы T;

в) $|T| \leq 2^7$;

г) $|Z_2(P)| \leq 2^3$, и если $|Z_2(P)| = 2^3$, то существует инволюция из $P \setminus T$, которая не централизует $Z_2(P)$.

По лемме 4, $U(P) \neq \emptyset$. Пусть $V \in U(P)$ и $V = \langle\tau\rangle \times \langle v\rangle$. Положим $H = C_P(V)$. Так как $Z(P)$ циклический, V является подгруппой, порожденной инволюциями из $Z(H)$. По лемме 5, существует инволюция w в $P \setminus H$. Пусть D означает $C_P(w)$. Заметим, что $V \cdot \langle w\rangle$ – группа диэдра порядка 8 и, следовательно, $vwv = \tau w$. Кроме того, v централизует $D \cap H$. Ввиду того, что в G один класс инволюций, w сопряжена с τ. Пусть $w = \tau^x$, где $x \in G$. Ясно, что $\tau \in C_G(w)$. Выберем теперь $x_1 \in C$ такой, что если $y = x_1 x$, то $w = \tau^y$ и $Q = P^y$ содержит τ. Тогда $C_G(w)$ содержит $Q = P^y$, которая является силовской 2-подгруппой из G. Ввиду того, что $|P : T| = 2$ и $T = O_2(C)$, мы имеем $|D : Q \cap P| \leq 2$ и Q содержит H^y.

Предположим, что τ не содержится в H^y. Тогда $z = v^y$ – центральный элемент из H^y. Так как $[z, \tau]$ – центральный элемент из V^y, который перестановочен с τ, мы имеем $[z, \tau] = w$. Из этого следует, что $V^y\langle\tau\rangle$ – группа диэдра порядка 8 и, следовательно, $z\tau z = \tau w$. Кроме того, z централизует $D \cap H^y$, для которой $|D:D\cap H^y|\le 4$. Произведение $u=vz$ – строго вещественный элемент, порядок которого делится на 3, так как u нормализует группу $\langle\tau\rangle\times\langle w\rangle$ и переставляет в ней все нееденичные элементы. Ввиду условия теоремы силовская 2-подгруппа в $C_G(u)$ имеет порядок не выше 2. Действительно, если бы силовская 2-подгруппа $C_G(u)$ была бы порядка больше двух, то в $C_G(u)$ нашлась бы абелева подгруппа порядка 12. Так как в G один класс инволюций, то централизатор любого элемента порядка 6 имел бы порядок больше 6. Рассмотрим теперь пересечение $D\cap H\cap H^y$. Оно является 2-группой и централизуется элементом u. Следовательно, $|D\cap H\cap H^y|\le 2$ и $|D|\le 16$.

Предположим, что $\tau\in H^y$. Тогда $V^y\subset C$.

Пусть $V^y<D$, тогда инволюция v перестановочна с некоторой инволюцией u из V^y. Централизатор $C_G(u)$ содержит H^y и инволюцию v, которая не централизует V^y, так как v не централизует w.

Если v принадлежит той же силовской 2-подгруппе из $C_G(u)$, что и H^y, то v нормализует $V^y=\Omega_1(Z(H^y))$. Ввиду того, что $vwv=\tau v$, мы имеем $V^y=\langle w\rangle\times\langle\tau\rangle$. Но тогда $H^y\lambda\langle v\rangle$ – силовская 2-подгруппа в C. Так как $T<H^y\lambda\langle v\rangle$, то v не принадлежит $\Phi(T)$.

Если v и H^y лежат в разных силовских 2-подгруппах из $C_G(u)$, то v не принадлежит $O_2(C_G(u))$. Кроме того, по лемме 3 $V^y<Z_2(O_2(C_G(u)))\lhd C_G(u)$. Отсюда $(V^y)^v<Z_2(O_2(C_G(u)))$. Так как $vwv=\tau w$, то τ принадлежит $Z_2(O_2(C_G(u)))$. Значит,

$$|O_2(C_G(u)):C_{O_2(C_G(u))}(\tau)|=2.$$

Ввиду того, что v централизует подгруппу индекса 2 или 4 в $C_{O_2(C_G(u))}(\tau)$, подгруппа $C_{O_2(C_G(u))}(v)$ индекса 4 или 8 в $O_2(C_G(u))$.

Если $|O_2(C_G(u)):C_{O_2(C_G(u))}(v)|=8$, то $|T|\le 2^7$. В самом деле, так как u сопряжена с τ в G, то в $C\setminus T$ существует инволюция v_1, такая, что $|T:C_T(v_1)|=8$. По теореме 4 (2) из [16], v_1 сопряжена в C с некоторой инволюцией v_2, инвертирующей s. Тогда в C существует подгруппа $T\lambda\langle s\rangle\lambda\langle v_2\rangle$ и

$|T:C_T(v_2)|=8$. Ввиду того, что $\Phi(T)$ - элементарная абелева группа (лемма 2), и ввиду действия s на $T(C_T(s)=Z(T)=\langle\tau\rangle)$, мы получаем $\Phi(T)=\langle\tau\rangle\times V_1\times\ldots\times V_k$ и $T/\Phi(T)=W_1\times\ldots\times W_\ell$, где V_i $(1\le i\le k)$ и W_j $(1\le j\le \ell)$ изоморфны элементарной абелевой группе порядка 4 и допустимы относительно $\langle s\rangle\lambda\langle v_2\rangle$ и $\Phi(T)\cdot(\langle s\rangle\lambda\langle v_2\rangle)$, соответственно. Но $|C_{V_i}(v_2)|=|C_{W_j}(v_2\cdot\Phi(T))|=2$, и, значит, $k\le 3$ и $\ell\le 3$. Кроме того, если $k+\ell>3$, то $C_T(v_2)$ был бы индекса больше чем 8, что невозможно. Отсюда $k+\ell\le 3$, и, значит, $|T|\le 2^7$.

Если централизатор v в $O_2(C_G(u))$ индекса 4 в $O_2(C_G(u))$, то аналогичные рассуждения дают $|T|\le 2^5$.

Пусть $V^y\not\subset P$. Рассмотрим опять $C_G(w)$. Инволюция τ лежит в $C_G(w)$ и лежит в $P^y=Q$. Пусть $Z=C_{Z_2(Q)}(\tau)$. Тогда $|Z_2(Q):Z|\le 2$, так как $|Z(Q)|=2$. Ясно, что $Z\subset C=C_G(\tau)$. Положим $Z_1=Z\cap H$. Так как $V^y=P$, а $w\notin H$, то $|Z:Z_1|\le 4$.

Если $Z_1\ne 1$, то рассмотрим централизатор инволюции z_1 из Z_1 в G. Этот централизатор $C_G(z_1)$ содержит v и $H=C_Q(\langle z_1\rangle\times\langle w\rangle)$. Причем так как $z_1\in Z_2(Q)$, то $|Q:H_1|=2$.

Если v лежит в той же силовской 2-подгруппе из $C_G(z_1)$, что и H_1, то v нормализует H_1, и так как $vwv=w\tau$, то $\langle z_1\rangle\times\langle w\rangle=\langle w\rangle\times\langle\tau\rangle$. В этом случае H_1 принадлежит C. Но тогда инволюция из $V^y\setminus V^y\cap P$ централизует в H подгруппу индекса не менее 4 и, следовательно, в $O_2(C)=T$- подгруппу индекса не менее 8. Так же, как и в предыдущем абзаце, мы получаем $|T|\le 2^7$.

Если v и H_1 принадлежат различным силовским 2-подгруппам из $C_G(z_1)$, то из того, что $w\in Z_2(O_2(C_G(z_1)))$ и $vwv=w\tau$, мы заключаем $\tau\in Z_2(O_2(C_G(z_1)))$. Значит,

$$|O_2(C_G(z_1)):C_{O_2(C_G(z_1))}(\tau)|=2,$$

а так как v централизует в $C_{O_2(C_G(z_1))}(\tau)$ по крайней мере подгруппу индекса 4, мы опять получ..м $|T|\le 2^7$.

Если $Z_1=1$, то $|Z_2(Q)|\le 8$ и, следовательно, $|Z_2(P)|\le 8$. Кроме того, если $|Z_2(Q)|=8$, то инволюция τ не централизует $Z_2(Q)$. Значит, если $|Z_2(P)|=8$, то в $P\setminus T$ существует инволюция, не централизующая $Z_2(P)$. Таким образом, мы доказали, что для C, P, T и V выполнен один из случаев а) - г).

Рассмотрим случай а). Имеется лишь три возможности для $|C_P(w)|$, а именно: $|C_P(w)|=4$, 8 и 16.

Если $|C_P(w)|=4$, то P - группа максимального класса. Тогда T — либо циклическая, либо группа максимального класса. Кроме того, T допускает автоморфизм порядка 3, фиксирующий лишь $Z(T)=\langle \tau \rangle$. Отсюда T - группа кватернионов порядка 8. Но тогда $|P|>8$. Значит, $U(P)=\emptyset$, что противоречит лемме 4.

Если $|C_P(w)|=8$, то ввиду результата А.Н.Фомина [3] P' - абелева группа ранга не выше двух. Так как $P'<T$, то по лемме 2 $\exp P'=4$ и, таким образом, $|P'|\leq 2^4$. Кроме того, из этого же результата $|P:P'|\leq 8$, и, следовательно, $|P|\leq 2^7$. Таким образом, мы приходим к случаю в).

Если $|C_P(w)|=16$, тогда опять из [3] и леммы 4 мы получаем, что $|P:P'|=16$ или $|P:P'|=8$. В первом случае так же, как и в [3], можно показать, что w инвертирует каждый элемент из P' и, следовательно, P' - абелева группа ранга не выше трех. По лемме 2 T' - элементарная абелева группа и $P'\leq Z_4\times Z_4\times Z_4$. Так как T' - допустимая относительно $\langle s \rangle$ подгруппа, то $|T'|=2$ или $T'\simeq V_8$. Из леммы 6 $|T'|$ не может быть равен 2.

Если $T'\simeq V_8$, то из леммы 8 следует, что $T'\neq \Phi(T)$, но тогда ввиду действия $N_C(\langle s \rangle)\, T'/T'$ на T/T' и леммы 2 $T/T'\simeq Z_2\times Z_2\times Z_4\times Z_4$ и $\Phi(T)\simeq V_{2^5}$. Из леммы 2 $\Phi(T)\subseteq Z_2(T)$. Пусть $\Phi(T)=Z_2(T)$. Тогда если $w\notin T$, то по теореме 4(2) из [18] существует элемент s_1 порядка 3, который инвертируется w. Так как s_1 фиксирует лишь τ в $\Phi(T)\setminus\langle 1 \rangle$, то $\Phi(T)=\langle \tau \rangle\times V_1\times\ldots\times V_k$, где V_i $(1\leq i\leq k)$ - допустимые относительно $N_C(\langle s \rangle)$ подгруппы и $V_i N_C(\langle s_1 \rangle)\simeq S_4$ (симметрической группе подстановок степени 4) для любого $i=1,\ldots,k$. Так как $w\in N_C(\langle s_1 \rangle)$, то из строения S_4 следует, что w централизует $Z_2(P)$ ввиду того, что $Z_2(P)=C_{Z_2(T)}(w) \bmod Z(T)$. Это противоречит выбору w, так как $w\neq C_P(V)$. Отсюда $w\in T$ и, значит, централизует в $Z_2(T)$ подгруппу индекса 2 из-за того, что $|Z(T)|=2$. Но тогда $|C_P(w)|>16$, что невозможно.

Пусть $\Phi(T)\subset Z_2(T)$. В этом случае $Z_2(T)$ индекса 4 в T. Это также невозможно, так как тогда коммутант фактор-группы $T/Z(T)$ имеет порядок 2, а $\langle \bar{s} \rangle$ действует регулярно на $T/Z(T)$.

Пусть теперь $|P:P'|=8$. Рассмотрим фактор-группу C/T'. Если T/T' – группа ранга больше четырех, то ввиду действия $N_C(<s>)T'/T'$ на T/T' индекс P' в P больше 8. Отсюда $T/\Phi(T)\simeq V_{16}$ или V_4. Далее, так как $w\notin\Phi(T)$, ибо $w\notin H$, то $|C_{\Phi(T)}(w)|\leq 8$.

Если $w\in T$, то w централизует подгруппу индекса 2 в $\Phi(T)$, так как $\Phi(T)\subseteq Z_2(T)$. Отсюда $|\Phi(T)|\leq 2^4$. $|\Phi(T)|\neq 2^4$ ввиду действия s на $\Phi(T)$. Значит, опять $|T|\leq 2^7$.

Пусть $w\in P\setminus T$. Покажем, что в этом случае $Z_2(T)$ не может быть абелевой группой. В самом деле, пусть $Z_2(T)$ – абелева группа. Тогда она будет элементарной абелевой группой, так как

$$Z_2(T)=C_{Z_2(T)}(s)\times[Z_2(T),<s>]=<\tau>\times[Z_2(T),<s>],$$

и если b – элемент порядка 4 из $[Z_2(T),<s>]$, то подгруппа $<\tau>\times<b>$ нормальна в T и, следовательно, $b^2\in Z(T)$, что противоречит лемме 1. Теперь, ввиду теоремы 4 (2) из [16] и действия $N_C(<s>)$ на $Z_2(T)$, инволюция w централизует $Z_2(P)$, что противоречит выбору w, так как $w\neq C_P(V)$

Пусть теперь $Z_2(T)$ – неабелева группа. Тогда, по лемме 2, $\Phi(T)$ строго содержится в $Z_2(T)$. $|T:\Phi(T)|=16$ или 4, мы имеем $T=Z_2(T)$ или $|T:Z_2(T)|=4$. Если $T=Z_2(T)$, то легко видеть, что T – экстраспециальная группа, а этот случай рассмотрен в лемме 6. Значит, $|T:Z_2(T)|=4$. Но тогда центр группы $\bar{T}$ индекса 4 в $\bar{T}$ и, следовательно, $\bar{T}$ имеет коммутант порядка 2. Так как $\bar{S}$ действует регулярно на $\bar{T}$, то это невозможно. Случай а) рассмотрен.

Дальше мы рассмотрим случаи в) и г), так как для рассмотрения случая б) нам нужно, чтобы для любой инволюции v из $Z_2(P)\setminus Z(T)$ имел место случай б).

Случай в). Если $|T|=2^3$, то $T\simeq Q_8$ и $U(P)=\Phi$, что противоречит лемме 4.

Если $|T|=2^5$, то, по лемме 7, $T/<\tau>$ – абелева группа и, значит, T – экстраспециальная группа, что противоречит лемме 6.

Если $|T|=2^7$, то в $Z_2(T)$ найдется подгруппа $W=V_8$ такая, что $W\lhd C$. Тогда T/W имеет порядок 2^4 и, по лемме 7, T/W – абелева группа. Значит, $T'\leq W$, и поэтому $|T'|=2$, либо $T'=W$. Первый вариант исключается леммой 6. Если же $T'=W$, то, по лемме 8, $T' \neq \Phi(T)$. Тогда из леммы 7 мы получаем $T/T' \simeq \simeq Z_4 \times Z_4$. Значит, $\Phi(T) \simeq V_{25}$ и индекса 4 в T. Так как, по лемме 2, $\Phi(T) \leq Z_2(T)$, то $T/Z(T)$ имеет центр индекса 4. Но тогда коммутант $T/Z(T)$ имеет порядок 2, что невозможно.

Случай г). Если $Z_2(P)$ имеет порядок 4, то $|Z_2(T)| = 8$. Мы имеем: $T/Z_2(T)$ – абелева группа, и поэтому из лемм 2, 6 и 8 получаем противоречие. Пусть $|Z_2(P)| = 8$. Тогда, применяя теорему Б(1) к $T/\langle\tau\rangle$, мы получаем, что $|Z_2(T)| = 2^5$. Предположим, что $Z_2(T)$ – неабелева группа. Тогда $Z_2(T)$ – либо экстраспециальная группа, либо $Z_2(T) \simeq Q_8 \times V_4$. Тогда, по лемме 5.4.6 из [9] $T = Z_2(T)$ или $T = Q * C_T(Q)$, где $Q \simeq Q_8$. Лемма 6 исключает $T = Z_2(T)$, а леммы 2 и 8 исключают $T = Q * C_T(Q)$, так как в этом случае $T' = \Phi(T) \simeq V_8$. Значит, $Z_2(T)$ – абелева группа. Мы уже отмечали, что в этом случае $Z_2(T)$ – элементарная абелева и любая инволюция из $P \setminus T$ централизует $Z_2(P)$, что противоречит условию г).

Теперь мы можем считать, что любая инволюция из $Z_2(P) \setminus Z(T)$ не принадлежит $\Phi(T)$. Значит, $Z_2(P) \cap \Phi(T) = \langle\tau\rangle$. Так как $\Phi(T)/\langle\tau\rangle$ – нормальная подгруппа в $P/\langle\tau\rangle$, то ввиду леммы 2 это возможно, только если $\Phi(T) = \langle\tau\rangle$. Но тогда T – экстра-специальная группа, что невозможно по лемме 6.

Резюмируем результаты этого параграфа. Если $\bar{C}$ – группа типа А(2) и $Z(P)$ является циклической группой, то G изоморфна $L_3(3)$ или M_{11} –группе Матье одиннадцатой степени и, следовательно, не противоречит теореме.

§ 6. $\bar{C}$ – группа типа А(3)

Если $\bar{C}$ является группой типа А(3), то, дословно повторяя рассуждения из второй части теоремы 12 из лекций Г.Хигмэна [13], мы заключаем, что G изоморфна группе Янко порядка 175560 и, следовательно, не противоречит теореме.

§ 7. $\bar{C}$ –группа типа А(4)

Если $\bar{C}$ является группой типа А(4), то легко видеть, что либо в G более одного класса инволюций, либо G – непростая группа ввиду тео -

ремы Y.25.7 из [14] и результата [6].

Итак, ввиду результатов § 3, 4, 5, 6, 7 мы заключаем, что не существует простых групп, удовлетворяющих условиям теоремы и не удовлетворяющих ее заключению. Теорема доказана.

Автор глубоко признателен профессору А.И.Старостину за постановку задачи и научное руководство, А.Д.Устюжанинову за консультации по теории p-групп и В.М.Ситникову за помощь при обсуждении статьи.

Литература

1. В.В.КАБАНОВ, О конечных группах с самоцентрализующейся подгруппой порядка 6, Алгебра и логика, 11, № 5 (1972), 509-515.

2. В.Д.МАЗУРОВ, О конечных группах с данной силовской 2-подгруппой, ДАН СССР, 168, № 3 (1966), 519-522.

3. А.Н.ФОМИН, Конечные 2-группы, в которых централизатор некоторой инволюции имеет порядок 8, XI Всесоюзный алгебраический коллоквиум, Резюме сообщений и докладов, Кишинев, 1971, 95.

4. В.А.ШЕРИЕВ, Конечные 2-группы с дополняемыми неинвариантными подгруппами. Сиб.матем. ж., 8, № 1 (1967), 215-232.

5. H.BECHTEL, Frattini subgroups and ϕ-central groups, Pacif. J.Math.,18,N1 (1966),15-23.

6. R.BRAUER and M.SUZUKI, On finite groups of even order whose 2-Sylow subgroup is a quaternion group, Proc.Nat.Acad.Sci, USA.,45, N12(1959),1757-1759.

7. W.FEIT and J.G.THOMPSON. Finite groups which contain a self-centralizing subgroup of order 3, Nagoya Math.J.,21,1962,185-197.

8. W.GASCHÜTZ, Zur Erweiterungs theorie der endlichen Gruppen, J.reine angew. Math.,190,1952,93-107.

9. D.GORENSTEIN, Finite groups, Harper and Row, New-York,1968.

10. D.HELD, A characterization of the alternating groups of degrees eight and nine, J.Algebra,7,N2(1967),218-237.

11. D.HELD, A characterization of some multiply transitive permutation groups,I. Ill.J.Math.,13,N1(1969),223-240.

12. D.HELD, A characterization of some multiply transitive permutation groups II, Arch.der Math.,19,N4(1968),373-382.

13. G.HIGMAN, Odd characterization of finite simple groups,lectures, The University of Michigan, 1968.

14. B.HUPPERT, Endliche Gruppen I, Springer-Verlag,Berlin, 1967.

15. L.REDEI, Das "Schiefe Produkt" in der Gruppentheorie mit Anwendung auf die endlichen nichtkommutativen Gruppen und die Ordnungszahlen, zu denen nur kommutative Gruppen gehören, Comment. Math.Helv.,20(1947),225-264.

16. M.SUZUKI, Finite groups in which the centralizer of any element of order 2 is 2-closed, Ann.Math.,82 (1965),191-212.

17. D.GORENSTEIN, J.H.WALTER, The cnaracterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, I,II,III,J.Algebra,2(1965), 85-151,218-270,334-393.

Поступило 11 мая 1972 г.