С. А. Кащенко, Асимптотика релаксационных колебаний в системах дифференциально-разностных уравнений с финитной нелинейностью. I, *Дифференц. уравнения*, 1995, том 31, номер 8, 1330–1339

https://www.mathnet.ru/de9503

1995. Т. 31, № 8. С. 1330 — 1339

УДК 517.929

АСИМПТОТИКА РЕЛАКСАЦИОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ФИНИТНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ. I

С. А. Кащенко

Введение. Рассматривается вопрос о структуре решений системы дифференциально-разностных уравнений

$$\dot{x} = Ax + \lambda F(x(t-T)), \tag{0.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $T > 0$, с финитной нелинейностью $F(x)$: для некоторого положительного p выполнено условие

$$F(x) \equiv 0 \quad \text{при } \|x\| \geq p. \tag{0.2}$$

С чисто технической точки зрения в дальнейшем удобно считать, что $F(x)$ зависит (непрерывно) от скалярной переменной $\delta = (x, a)$, где $a \in \mathbb{R}^n$. Такой тип зависимости характерен для многих прикладных задач (например, в теории фазовой и частотной синхронизации [1, 2], при изучении ряда электрических цепей [3, 4] и др.). Согласно ограничению (0.2), имеем условие

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } |(x,a)| < p, \\ 0 & \text{при } |(x,a)| \geq p. \end{cases} \tag{0.3}$$

Основное предположение, позволяющее использовать специальные асимптотические методы [5 — 8] для исследования динамических свойств системы (0.1), заключается в выполнении неравенства

$$\lambda \gg 1. \tag{0.4}$$

Сразу отметим, что формальное уравнение "первого приближения", которое получается из (0.1) делением на λ и затем заменой λ^{-1} на 0, не дает никакой информации о поведении решений при $t \to \infty$.

Предполагаем, что все собственные значения матрицы A имеют отрицательные вещественные части. Как оказывается, принципиально важной является информация о том, вещественны или комплексны собственные значения этой матрицы с наибольшими вещественными частями. В п. 1 рассмотрен случай, когда собственное значение α_1 матрицы A с наибольшей вещественной частью вещественное и простое, и показано, что в системе (0.1) при достаточно больших λ существует одно или два устойчивых периодических решения и найдена их асимптотика при $\lambda \to \infty$. При $n = 2$ соответствующие результаты опубликованы в [9]. В п. 2 исследован случай, когда вещественное значение α_1 двукратное. Показано, что динамика решений (0.1) в этом случае определяется динамикой специального одномерного отображения, а значит, может иметь сложную структуру.

Результаты п. 3 раскрывают влияние на динамику системы (0.1) внешнего периодического воздействия $f(t)$. Этой задаче отвечает модель

$$\dot{x} = Ax + \lambda F(x(t-T)) + f(t). \tag{0.5}$$

Даже в случае простого собственного значения α_1 динамика (0.5) может существенно зависеть от выбора последовательности $\lambda_m \to \infty$. В рамках асимптотического анализа удается описать все возникающие здесь особенности.

В пп. 4 — 6 рассмотрен вопрос о динамике двух диффузионно связанных систем вида (0.1):

$$\dot{x}_k = Ax_k + \lambda F(x_k(t-T)) + D(-1)^k(x_1 - x_2), \quad k = 1, 2, \tag{0.6}$$

где D — положительно-определенная матрица. Особый интерес представляют результаты о поведении решений (0.6) при условии "слабой" связи, когда элементы матрицы D достаточно малы (при $\lambda \to \infty$).

Отметим, что изложенные ниже результаты для базовой системы (0.1) обобщаются на системы с несколькими запаздываниями

$$\dot{x} = Ax + \lambda[F_1(x(t-T_1)) + F_2(x(t-T_2)) + \ldots + F_k(x(t-T_k))] \tag{0.7}$$

и финитными нелинейностями $F_j(x) \quad (j = 1, \ldots, k)$.

Ниже собственное значение α_1 будем называть ведущим.

1. Исследование динамики системы (0.1) при условии простого ведущего собственного значения. Суть приводимой ниже конструкции такова. В фазовом пространстве $C_{[-T,0]}(R^n)$ системы (0.1) фиксируем специальным образом достаточно "узкое" множество S и строим асимптотику всех решений $x(t,\varphi)$ с начальными условиями из S. Удается показать, что через некоторое время $t(\varphi)$ (порядка $\ln\lambda$ при $\lambda \to \infty$) рассматриваемое решение снова попадает с S. Тем самым оператор последования, ставящий в соответствие функции $\varphi(s)$ функцию $x(s+t(\varphi),\varphi)$ $(s \in [-T,0])$, преобразует множество S в себя. Используя известные результаты о свойствах таких операторов, заключаем, что оператор последования имеет в S неподвижную точку $\varphi_0(s)$. Тогда функция $x(t,\varphi_0(s))$ является периодическим решением системы (0.1) с периодом $t(\varphi_0(s))$.

Пусть b_1 — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному значению α_1 : $Ab_1 = \alpha_1 b_1$, причем $(a, b_1) = p$. Обозначим через $\delta > 0$ произвольно малую (независимо от λ) постоянную и введем в рассмотрение два множества функций: $S^{\pm} = \{\varphi(s) \in C_{[-T,0]}(R^n) : \|\varphi(s) \mp b_1 \exp\alpha_1 s\| \le \delta,\ |(\varphi(s), a)| \ge p\}$. Изучим асимптотику при $\lambda \to \infty$ решений $x(t,\varphi)$ с начальными условиями из S^+ и S^-. Пусть сначала $t \in [0,T]$.

Лемма 1. *При $t \in [0,T]$ и $\varphi(s) \in S^{\pm}$*

$$x(t,\varphi) = \pm b_1 \exp\alpha_1 t + y(t,\varphi) \tag{1.1}$$

и выполнена оценка

$$\|y(t,\varphi)\| \le c\delta, \tag{1.2}$$

где $c > 0$ не зависит от λ и $\varphi(s)$.

Для доказательства леммы достаточно заметить, что при $t \in [0,T]$ функция $x(t,\varphi)$ является решением линейной системы

$$\dot{x} = Ax. \tag{1.3}$$

На отрезке $[T, 2T]$ для функции $x(t,\varphi)$ имеет место

$$x(t,\varphi) = \exp A(t-T)x(T,\varphi) + \lambda \int_0^{t-T} \exp A(t-s-T)F(x(s),\varphi)ds. \tag{1.4}$$

Будем предполагать, что на каждом отрезке из интервала $(0,T)$ функции $\Delta_{\pm}(t)$ не равны тождественно нулю, где $\Delta_{\pm}(t) = \int_0^t \exp A(t-s-T)F(\pm b_1 \exp\alpha_1 s)ds$ и выполнено условие невырожденности

$$\Delta_{\pm}(T) \ne 0. \tag{1.5}$$

Лемма 2. *На промежутке $t \in [T, 2T]$ имеем*

$$x(t,\varphi) = \lambda[\Delta_{\pm}(t-T) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})], \tag{1.6}$$

а для каждого фиксированного $l > 0$ при $t \in [2T, 2T+l]$ выполнено асимптотическое равенство

$$x(t,\varphi) = \exp A(t-2T)x(2T,\varphi) + O(1). \tag{1.7}$$

Обоснование леммы следует из определения функций $F(x)$, $\varphi(s) \in S^{\pm}$ и представления

$$x(t,\varphi) = \exp A(t-\tau)x(\tau,\varphi) + \lambda \int_{\tau}^{t} \exp A(t-s)F(x(s-T,\varphi))ds, \tag{1.8}$$

аналогичного (1.4).

Предположим, что выполнено еще одно условие типа общности положения. Обозначим через h_1 собственный вектор матрицы A^*, сопряженной к A, отвечающий собственному значению α_1 : $A^*h_1 = \alpha_1 h_1$. Ниже считаем, что

$$\alpha_\pm = (\Delta_\pm(T), h_1) \neq 0. \tag{1.9}$$

Отсюда и из (1.6) следует, что при достаточно малых δ выполнено неравенство $\left(\int\limits_0^T \exp(-As)F(x(s,\varphi))ds, h_1\right) \neq 0$. Положим при $t \in [2T, 2T+l]$

$$x(t,\varphi) = \lambda[\beta b_1 \exp\alpha_1(t-2T) + \gamma_0(t,\varphi)], \tag{1.10}$$

где $\beta = (\Delta_\pm(T), h_1) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})$. Обозначим через α_0 наибольшую из всех, начиная с $j = 2$, вещественных частей собственных значений матрицы A : $\alpha_0 = \max\limits_{j\geq 2} \mathrm{Re}\lambda_j$, и пусть положительная постоянная μ выбрана так, чтобы $\alpha_0 + \mu < \alpha_1$. В итоге при $t \in [2T, 2T+l]$ получаем оценку

$$\|\gamma_0(t,\varphi)\| \leq \gamma_0 \exp(\alpha_0 + \mu)t, \tag{1.11}$$

из которой, а также из (1.9) вытекает, что, начиная с некоторого момента $t = t_0$ ($t_0 \in [2T, 2T+l]$), функция $\sigma = (x(t,\varphi), a)$ знакопостоянна и удовлетворяет неравенству $|\sigma| > p$. Отметим, что значение t_0 может быть выбрано одно и то же и независимо от λ для всех решений $x(t,\varphi)$ с начальными условиями из $S^\pm$. Обозначим через $t(\varphi)$ первый при $t > t_0$ момент времени, когда выполняется неравенство $|\sigma| = p$.

Лемма 3. *Корень $t(\varphi)$ уравнения $|\sigma| = p$ простой и для него выполнено асимптотическое при $\lambda \to \infty$ равенство*

$$t(\varphi) = |\alpha_1|^{-1}\ln\lambda + \ln(p^{-1}\beta(b_1, h_1)) + o(1). \tag{1.12}$$

Доказательство леммы получаем из того факта, что при $t > t_0$ в течение асимптотически (при $\lambda \to \infty$) большого отрезка времени выполнено неравенство $|\sigma| > p$, которое означает, что $x(t,\varphi)$ является решением линейной системы (1.3). После этого остается заметить, что на указанном промежутке сохраняется оценка (1.11), в которой γ_0 не зависит от $\varphi(s) \in S^\pm$ и λ.

Введем оператор последования Π: $\Pi(\varphi(s)) = x(s + t(\varphi), \varphi)$. Из (1.10), (1.11) и леммы 3 вытекает

Лемма 4. *При всех достаточно больших λ (в зависимости от знака величины $\alpha_\pm$) имеет место равенство*

$$x(s + t(\varphi), \varphi) = \pm b_1 \exp\alpha_1(t - t(\varphi)) + O(\lambda^{-\alpha_0/\alpha_1}). \tag{1.13}$$

Тем самым $x(s+t(\varphi),\varphi) \in S^+$ или $x(s+t(\varphi),\varphi) \in S^-$. Тогда в зависимости от знака чисел α_+ и α_- верны включения $\Pi S^+ \subset S^+$ или $\Pi S^+ \subset S^-$ ($\Pi S^- \subset S^-$ или $\Pi S^- \subset S^+$). Оператор Π вполне непрерывен. Поэтому [10] у него или у оператора Π^2 в S^+ либо в S^- (либо и в S^+, и в S^-) есть неподвижная точка $\varphi_0(s)$: $\Pi(\varphi_0(s)) = \varphi_0(s)$ или $\Pi^2(\varphi_0(s)) = \varphi_0(s)$. Функция $x_0(t) = x(t, \varphi_0(s))$ является периодическим с периодом $t(\varphi_0(s))$ решением системы (0.1).

Построение асимптотики решения $x_0(t)$ основано на равенстве (1.13), из которого следует, что при $t \in [0, T]$

$$x_0(t) = \pm b_1 \exp\alpha_1 s + o(1). \tag{1.14}$$

Далее, при $t \in [T, 2T]$ имеем $x_0(t) = \lambda[\Delta_\pm(t) + O(\lambda^{-1})]$ и

$$x_0(t) = \lambda[\exp A(t-2T)(\Delta_\pm(T) + o(1))] \tag{1.15}$$

для $t \in [2T, t(\varphi_0(s))]$. Сформулируем итоговый результат.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (1.5) и (1.9). Тогда существует такое λ_0, что при $\lambda \geq \lambda_0$ система (0.1) имеет одно или два орбитально устойчивых периодических* *решения с начальной функцией из* $S^{\pm}$. *Асимптотика* $x_0(t)$ *задается формулами (1.13) — (1.15).*

Вопросы устойчивости $x_0(t)$ выше не рассматривались. Для обоснования устойчивости $x_0(t)$ линеаризуем (0.1) на этом решении (предполагаем, конечно, что $F(x)$ гладко зависит от x) и исследуем асимптотику при $\lambda \to \infty$ всех мультипликаторов линеаризованной системы. Удается показать, что все, кроме одного мультипликатора, по модулю строго меньше, чем 1. Из-за громоздкости вычислений подробно на этой части задачи останавливаться не будем. Отметим, что в похожей, но более сложной ситуации соответствующие построения детально изложены в работе [11].

В качестве примера рассмотрим вопрос о динамике уравнения

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + x = \lambda F(x(t-T)),\ \lambda \gg 1, \quad F(x) = f(x) \text{ при } |x| < p, \quad F(x) = 0 \text{ при } |x| \geq p, \quad (1.16)$$

описывающего работу автогенератора с запаздывающей обратной связью [4]. Условие вещественности ведущего собственного значения приводит к неравенству $\delta > 1$. Согласно изложенным выше результатам, при выполнении соотношения $xf(x) \geq 0$ ($\not\equiv 0$) существуют положительное и отрицательное периодические решения ($\Pi S^+ \subset S^+$, $\Pi S^- \subset S^-$), а при $xf(x) \leq 0$ — одно знакопеременное периодическое решение ($\Pi S^+ \subset S^-$, $\Pi S^- \subset S^+$). При $f(x) \geq 0$ (≤ 0) ($x \in [-p,p]$) существует только одно положительное (отрицательное) периодическое решение.

2. Динамика системы (0.1) в случае двукратного ведущего собственного значения. В отличие от п. 1 здесь предполагаем, что ведущее собственное значение α_1 двукратное, для двух линейно независимых векторов b_1 и b_2 имеем равенства: $Ab_j = \alpha_1 b_j$ $(j = 1,2)$, а значение $\alpha_0 = \max\limits_{j\geq 3} \operatorname{Re}\lambda_j$ удовлетворяет неравенству $\alpha_0 < \alpha_1$.

По аналогии с предыдущим введем в рассмотрение множества $S^{\pm} \subset C_{[-T,0]}(R^n)$ начальных функций системы (0.1) по правилу ($\delta > 0$ — произвольно малое значение): $S^{\pm} = \{\varphi(s) \in C_{[-T,0]}(R^n),\ \|\varphi(s) - (z_1 b_1 + z_2 b_2)\exp\alpha_1 s\| \leq \delta\}$, где $z_1(b_1,a) + z_2(b_2,a) = p$ для S^+ и $z_1(b_1,a) + z_2(b_2,a) = -p$ для S^-. Тогда решение $x(t,\varphi)$ (с начальными условиями $\varphi(s) \in S^{\pm}$) при $t \in [0,T]$ и при $t \in [T,2T]$ имеет вид

$$x(t,\varphi) = (z_1 b_1 + z_2 b_2)\exp\alpha_1 t + O(\delta), \quad (2.1)$$

$$x(t,\varphi) = \lambda[\Delta(t,z_1,z_2) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})] \quad (2.2)$$

соответственно, где $\Delta(t,z_1,z_2) = \lambda \int\limits_0^{t-T} \exp A(t-s-T)F((z_1 b_1 + z_2 b_2)\exp\alpha_1 s)ds$. Для каждого фиксированного $l > 0$ на промежутке $[2T, 2T + l]$ имеем

$$x(t,\varphi) = \lambda[\exp A(t-2T)\Delta(2T,z) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})]. \quad (2.3)$$

Будем предполагать, что

$$\alpha(z_1,z_2) = (\Delta(2T,z_1,z_2),a) \neq 0. \quad (2.4)$$

Пусть $t(\varphi)$ — первый при $t > 2T + l$ корень уравнения $|(x(t,\varphi),a)| = p$. Из формулы (2.3) приходим к равенству

$$x(t,\varphi) = (\bar{z}_1 b_1 + \bar{z}_2 b_2)\exp\alpha_1(t - t(\varphi)) + O(\lambda^{-\alpha_0/\alpha_1}), \quad (2.5)$$

в котором $t(\varphi) = |\alpha_1|^{-1}(1 + o(1))\ln\lambda$, а $t \in [t(\varphi) - l, t(\varphi)]$. Для значений коэффициентов $\bar{z}_j$ $(j = 1,2)$ получаем, что, во-первых, $\bar{z}_j = (\Delta(2T,z_1,z_2),h_j)$, где h_1 и h_2 — такие линейно независимые собственные векторы матрицы A^*, для которых $A^* h_j = \alpha_1 h_j$, $(b_j,h_j) = 1$ $(j = 1,2)$, $(b_1,h_2) = (b_2,h_1) = 0$, во-вторых, $\bar{z}_1(b_1,a) + \bar{z}_2(b_2,a) = \pm p$.

Для того чтобы получить асимптотические формулы для решений $x(t,\varphi)$ при $t > t(\varphi)$, достаточно повторить предыдущие построения с заменой z_j на $\bar{z}_j$ $(j = 1,2)$. Таким образом, динамика решений $x(t,\varphi)$ связана с динамикой отображения $z_j \to \bar{z}_j$. Учитывая, что

$z_2 = (-z_1(b_1, a) \pm p)(b_2, a)^{-1}$, получаем (с точностью до величины $o(1)$ при $\lambda \to \infty$) итоговое одномерное отображение (некоторого отрезка оси z_1 в себя)

$$\bar{z}_1 = \Phi_\pm(z_1), \tag{2.6}$$

в котором $\Phi_\pm(z_1) = \pm p(\Delta(2T, z_1, (z_1(b_1, a) \pm p)(b_2, a)^{-1}), h_1)[(\Delta(2T, z_1, (-z_1(b_1, a) \pm p)\times \times(b_2, a)^{-1}), h_1)(b_1, a) + (\Delta(2T, z_1, (-z_1(b_1, a) \pm p)(b_2, a)^{-1}), h_2)(b_2, a)]^{-1}$.

Из результатов теории одномерных отображений [12] вытекает, что динамика отображения (2.6) может быть весьма сложной. Этот же вывод справедлив, конечно, и для системы (0.1). Сформулируем более точно соответствующий результат.

Теорема 2. *Пусть отображение (2.6) имеет устойчивую периодическую траекторию с периодом k: $z_{10}, \ldots, z_{k0}, z_{10}, \ldots$ Тогда найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при $\lambda \geq \lambda_0$ система (0.1) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение $x_0(t)$, для которого при $t \in [-T, 0]$ выполнено равенство*

$$x_0(t) = (z_{10}b_1 + (-z_{10}(b_1, a) \pm p)(b_2, a)^{-1}b_2) \exp \alpha_1 t + o(1).$$

Асимптотику $x_0(t)$ для остальных t получаем из приведенных выше формул.

3. Влияние внешнего периодического воздействия на динамику системы (0.1). Рассмотрим вопрос о динамике системы (0.5) с финитной нелинейностью $F(x)$, большим параметром λ и с ω-периодическим внешним воздействием $f(t)$. Будем предполагать, что ведущее собственное значение α_1 вещественное и простое. Через $v(t)$ обозначим периодическое решение линейной системы (0.5) при $\lambda = 0$. Отметим, что

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} \exp A(t-s) f(s) ds. \tag{3.1}$$

Множество S начальных условий в задаче (0.5) вводится из тех же соображений, что и в пп. 1, 2. Однако в силу неавтономности рассматриваемой системы здесь уже становится важным, в какой конкретно момент времени задаются начальные функции. В связи с этим фиксируем произвольно значение $\tau \in [0, \omega]$ и рассмотрим множества $S^\pm(\tau) = \{\varphi(s) \in C_{[\tau-T, \tau]}(R^n),\ \|\varphi(s) - v(s) - zb_1 \exp \alpha_1(s-\tau)\| \leq \delta\}$, где значение $z = z(\tau)$ определяется соответственно из равенств $(v(\tau) + zb_1, a) = \pm p$. Кроме этого, необходимо наложить условие

$$|(v(s) + zb_1 - \exp \alpha_1(s-\tau), a)| \geq p \quad \text{при} \quad s \in [-T+\tau, \tau]. \tag{3.2}$$

Тогда для функции $x(t, \varphi)$ при $t \in [\tau, T+\tau]$ будет выполнено равенство $x(t, \varphi) = v(t) + zb_1 \exp \alpha_1(t-\tau) + O(\delta)$, а при $t \in [\tau + T, 2T + \tau]$ имеем $x(t, \varphi) = \lambda[\Delta(t, \tau) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})]$, где

$$\Delta(t, \tau) = \int_{\tau+T}^{t} \exp A(t-s) F(v(s-T) + zb_1 \exp \alpha(s-T)) ds.$$

Для значений t из промежутка $[\tau + 2T, \tau + 2T + l]$ в свою очередь получаем, что $x(t, \varphi) = \lambda[\exp A(t - \tau - 2T)\Delta(2T + \tau, \tau) + O(\delta) + O(\lambda^{-1})]$. Для первого при $t > \tau + 2T + l$ корня $t(\varphi, \tau)$ уравнения $|(x(t, \varphi), a)| = p$ по-прежнему верно (равномерно по $\varphi(s) \in S^\pm(\tau)$ и τ) равенство $t(\varphi, \tau) = |\alpha_1|^{-1} \ln \lambda(1 + o(1))$, а при $t \in [t(\varphi, \tau) - T, t(\varphi, \tau)]$ асимптотическая формула для $x(t, \varphi)$ имеет вид

$$x(t, \varphi) = v(t) + \bar{z}b_1 \exp \alpha_1(t - t(\varphi, \tau)) + o(1), \tag{3.3}$$

где $\bar{z} = \pm(v(t(\varphi, \tau)), a)p^{-1}$. Положим в (3.3) $t = t(\varphi, \tau) + s$. Зафиксируем произвольно значение $\theta \in [0, \omega)$ и рассмотрим последовательность $\lambda_m \to \infty$, где $\lambda_m = \exp(|\alpha_1|(m\omega + \theta))$. Тем самым $t(\varphi, \tau) = m\omega + \xi$, а величина $\xi = \xi(\tau, \theta)$ с точностью до $o(1)$ (при $\lambda \to \infty$) определяется из уравнения $(v(\theta + \xi), a) + p\alpha(\tau) \exp \alpha_1 \xi = \pm p$, в котором $\alpha(\tau) = (\Delta(2T + \tau, \tau), h_1)$.

В результате для каждого $\tau \in [0,\omega)$ и $\lambda = \lambda_m$ ($m \to \infty$) приходим к соотношению $\Pi(\varphi(s)) = x(s + t(\varphi,\tau),\varphi) \in S^{\pm}(\bar{\tau})$, а значение $\bar{\tau}$ с точностью до $o(1)$ (при $m \to \infty$) задается одномерным отображением

$$\bar{\tau} = (\theta + \xi(\tau,\theta)) \bmod \omega. \tag{3.4}$$

Из конструкции множеств $S^{\pm}(\tau)$ ясно, что динамика отображения (3.4) определяет динамику исходной системы (0.5) при $\lambda_m \to \infty$.

Теорема 3. *Пусть отображение (3.4) имеет грубую k-периодическую траекторию $\tau_1, \ldots, \tau_k, \tau_1, \ldots$ Тогда при достаточно больших m и при $\lambda = \lambda_m$ система (0.5) имеет периодическое решение $x_k(t,\varphi_k)$ той же устойчивости, причем на некотором отрезке длины T имеем $x_k(t,\varphi_k) \in S^{\pm}(\tau_1)$.*

Приведенные выше формулы раскрывают асимптотику $x_k(t,\varphi_k)$ при $\lambda_m \to \infty$. Ясно, что динамические свойства отображения (3.4) при различных θ могут отличаться. Это говорит о том, что при $\lambda \to \infty$ может происходить неограниченный процесс "рождения" и "гибели" установившихся режимов системы (0.5).

4. Асимптотика периодических решений в системе из двух диффузионно связанных моделей (0.1). Анализ сложной динамики связанных автогенераторов занимает важное место в теории динамических систем, в том числе применительно к конкретным радиофизическим задачам [4, 13 — 15]. Особую роль играет изучение моделей, в которых фигурируют одинаковые автогенераторы. Исследование неоднородных режимов в таких системах тесно связано с известной проблемой самоорганизации. Важными являются и вопросы математического описания связей между генераторами. По-видимому, наибольший интерес представляет изучение систем с линейными связями диффузионного типа (см., например, [2]). Одной из целей настоящей работы является проведение комплексного исследования (в рамках предлагаемого ниже метода) динамики системы из двух связанных моделей вида (0.1) при достаточно широком классе связей указанного типа. На основе строгих математических результатов удалось свести задачу изучения динамики системы дифференциально-разностных уравнений с большим параметром к существенно более простой задаче о динамических свойствах некоторых универсальных отображений.

Итак, рассматривается система (0.6), состоящая из двух связанных моделей вида (0.1). Относительно матрицы "диффузии" D естественно предположить, что ее собственные значения имеют положительные вещественные части. Как и выше, предполагаем, что нелинейность $F(x)$ финитная, $\lambda > 0$ — большой параметр и $\alpha_1 < 0$, где α_1 — ведущее собственное значение матрицы A. Рассмотрим сначала вопрос о существовании и устойчивости простейших периодических решений системы (0.6).

Обозначим через $x_0(t)$, то периодическое решение системы (0.1), о существовании и устойчивости которого говорилось в п. 1. Напомним, что при $\lambda \to \infty$ период $T_0(\lambda)$ этого решения имеет порядок $\ln(\lambda)$, а амплитуда — порядок λ.

Очевидно, что система (0.6) имеет "однородное" периодическое решение $x_1 \equiv x_2 \equiv x_0(t)$. Как оказывается, свойства устойчивости этого решения зависят от значений коэффициентов диффузии — элементов матрицы D.

Обозначим через $\varkappa$ ведущее собственное значение матрицы $A - 2D$, а через h отвечающий ему собственный вектор. Пусть $(h,a) \neq 0$. Удобно считать, что $(h,a) = p$. Известно, что уже при $n \geq 2$, несмотря на положительность вещественных частей матрицы D (даже в случае диагональной матрицы D), значение $\varkappa$ может принимать положительные значения.

Теорема 4. *Пусть выполнено неравенство*

$$\mathrm{Re}\varkappa > \alpha_1 \quad (\mathrm{Re}\varkappa < \alpha_1). \tag{4.1}$$

Тогда (в случае общности положения) найдется такое λ_0, что при $\lambda \geq \lambda_0$ однородное периодическое решение $x_1 \equiv x_2 \equiv x_0(t)$ системы (0.6) неустойчиво (устойчиво).

Доказательство основано на том, что можно оценить (при $\lambda \to \infty$) мультипликаторы линеаризованной на $x_1 = x_2 = x_0(t)$ системы (0.6). При этом используется лишь тот факт, что период $T_0(\lambda)$ равен $|\alpha_1|^{-1}(1+o(1))\ln\lambda$ и на всем, за исключением конечного (при $\lambda\to\infty$) промежутка, линеаризованная система совпадает с линейной системой

$$\dot{x}_1 = Ax_1 + D(x_2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = Ax_2 + D(x_1 - x_2), \tag{4.2}$$

решением которой является функция $x_1 = -x_2 = h\exp\varkappa t$.

По-видимому, имеет смысл изучение системы (4.1) только при условии $\mathrm{Re}\varkappa < 0$, иначе теряется свойство диссипативности: существуют решения (0.6), нормы которых неограниченно растут при $t\to\infty$. Будем предполагать, что $\varkappa$ вещественно. При этих условиях рассмотрим вопрос о существовании, асимптотике (при $\lambda\to\infty$) и устойчивости неоднородных (т. е. $x_1 \not\equiv x_2$) периодических решений системы (0.6).

Введем в рассмотрение множества начальных функций (аналогичных множествам $S^\pm$) $M^\pm = \{\varphi(s)\in C_{[-T,0]}(R^n) : \ \|\varphi(s)\mp h\exp\varkappa s\|\le\delta\}$, и рассмотрим решения $x(t,\varphi) = (x_1(t,\varphi_1), x_2(t,\varphi_2))$ системы (0.6) с начальными условиями $(\varphi_1(s),\varphi_2(s))$, причем $\varphi_1(s)\in M^+$, $\varphi_2(s)\in M^-$. Построение асимптотики $x(t,\varphi)$ и конструкция оператора последования Π ($\Pi M^+\subset M^+$ или $\Pi M^+\subset M^-$; $\Pi M^-\subset M^-$ или $\Pi M^-\subset M^+$) полностью аналогичны соответствующим построениям, приведенным выше, поэтому ограничимся лишь приведением итогового утверждения.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия $\alpha_1 < \mathrm{Re}\varkappa < 0$, $\mathrm{Im}\varkappa = 0$ (и некоторые условия типа общности положения). Тогда найдется такое $\lambda_0 > 0$, что при $\lambda\ge\lambda_0$ система (0.6) имеет экспоненциально орбитально устойчивое периодическое решение $x_{10}(t)$, $x_{20}(t)$, значения которого при $t\in[-T,0]$ близки (при $\lambda\to\infty$) к $(h,-h)\exp\varkappa t$, а период $T^0(\lambda)$ равен $|\varkappa|^{-1}(1+o(1))\ln\lambda$.*

Обратим внимание, что период $T^0(\lambda)$ неоднородного решения меньше, чем период $T(\lambda)$ однородного.

5. Случай малой диффузии. Первая перестройка. Выводы, полученные в предыдущем пункте, перестают быть верными в ситуациях, когда вместе с параметром λ^{-1} малыми являются коэффициенты диффузии (матрица D). Дело в том, что в этих случаях оказываются близкими значения α_1 и $\varkappa$, а значит, теряется однозначность в определении асимптотики решения типа $x_{10}(t)$, $x_{20}(t)$ на участке медленного (и долгого) убывания. Учитывая, что порядок наибольших значений функций $|x_{j0}(t)|$ равен λ, а время убывания — $\ln\lambda$, заключаем, что наибольший порядок убывания коэффициентов диффузии, при которых можно ожидать существенное влияние этих коэффициентов на динамику системы, равен $(\ln\lambda)^{-1}$. В связи с этим в системе (4.1) удобно положить

$$D = \tilde{D}(\ln\lambda)^{-1}, \tag{5.1}$$

где $\tilde{D}$ — матрица, собственные значения которой имеют положительные вещественные части. При этом условии изучим вопрос о динамике системы (0.6).

Введем в рассмотрение множества $S(\gamma,z)$ и $S(z,\gamma)$, принадлежащие пространству $C_{[-T,0]}(R^n)$ (в их определении параметр γ принимает лишь два значения: либо $\gamma=1$, либо $\gamma=-1$, а для параметра z выполнено условие $|z|>1$):

$$S(\gamma,z) = \psi(s),\varphi(s) : \ \|\varphi(s) - \gamma b_1\exp\alpha_1 s\| + \|\psi(s) - zb_1\exp\alpha_1 s\| \le \delta, \tag{5.2}$$

$$S(z,\gamma) = \psi(s),\varphi(s) : \ \|\varphi(s) - zb_1\exp\alpha_1 s\| + \|\psi(s) - \gamma b_1\exp\alpha_1 s\| \le \delta. \tag{5.3}$$

Приступим затем к построению асимптотики (при $\lambda\to\infty$) решений $x_j(t) = x_j(t,\varphi,\psi)$ с начальными условиями $x_1(s)=\varphi(s)$, $x_2(s)=\psi(s)$, где $\varphi(s),\psi(s)\in S(\gamma,z)\bigcup S(z,\gamma)$. Через $\beta(z)$ обозначим функцию

$$\beta(z) = \begin{cases} |\alpha_1|^{-1}\ln|z| & \text{при } 1<|z|\le\exp(|\alpha_1|T),\\ T & \text{при } |z|>\exp(|\alpha_1|T),\end{cases}$$

и пусть $\sigma = \alpha_1 p^{-1}(\tilde{D}b_1, h)$. Тогда $(2n\times 2n)$-матрица, определяемая правой частью системы (4.2), при условии (5.1) имеет собственные значения α_1 и $\alpha_1[1+2\sigma(\ln\lambda)^{-1}+o((\ln\lambda)^{-1})]$. Напомним, что вещественные части всех остальных собственных значений этой матрицы строго меньше α_1 и отделены от α_1 при $\lambda\to\infty$.

Предположим для определенности, что $\varphi(s), \psi(s) \in S(\gamma, z)$. Тогда при $t \in [0,T]$ функция $x_1(t)$ близка к $\gamma b_1 \exp \alpha_1 t$, $x_2(t)$ — к $z b_1 \exp \alpha_1 t$, а при $t \in [T, 2T]$

$$x_1(t) \approx \gamma b_1 \exp \alpha_1 t + \lambda \int_T^t \exp A(t-s) F(\gamma_1 b_1 \exp \alpha_1 (s-T)) ds,$$

$$x_2(t) \approx z b_1 \exp \alpha_1 t + \lambda \int_T^t \exp A(t-s) F(z b_1 \exp \alpha_1 (s-T)) ds.$$

Положим

$$a(\gamma) = \int_0^T \exp A(T-s) F(\gamma b_1 \exp \alpha_1 s) ds, \quad b(z) = \int_{\beta(z)}^T \exp A(T-s) F(z b_1 \exp \alpha_1 s) ds.$$

Тогда $x_1(2T) = \lambda[a(\gamma) + o(1)]$, $x_2(T) = \lambda[b(z) + o(1)]$. Далее в течение асимптотически большого (порядка $\ln \lambda$) промежутка времени функции $x_j(t)$ являются решением линейной системы (4.2). Обозначим через $t(\varphi, \psi)$ первый при $t > 2T + l$ момент, когда либо $|(x_1(t), a)| = p$, либо $|(x_2(t), a)| = p$. Важным является то обстоятельство, что на промежутке $t \in [t(\varphi, \psi) - T,\ t(\varphi, \psi)]$ выполнены включения

$$x_1(t),\ x_2(t) \in S(\bar\gamma, \bar z) \tag{5.4}$$

либо

$$x_1(t),\ x_2(t) \in S(\bar z, \bar\gamma). \tag{5.5}$$

Для определения фигурирующих в (5.4) и (5.5) параметров $\bar\gamma$ и $\bar z$ сначала положим $u = |c_1 + c_2 \exp \sigma| / |c_1 - c_2 \exp \sigma|$, где $c_1 = (a(\gamma) + b(z), h_1)$, $c_2 = (a(\gamma) - b(z), h_1)$. Предположим, что $u < 1$. Тогда имеет место включение (5.4) и верны равенства

$$\bar z = u^{-1} \operatorname{sgn}(c_1 - c_2 \exp \sigma), \quad \bar\gamma = \operatorname{sgn}(c_1 + c_2 \exp \sigma). \tag{5.6}$$

Если же $u > 1$, то выполнено соотношение (5.5), в котором

$$\bar z = u \operatorname{sgn}(c_1 + c_2 \exp \sigma), \quad \bar\gamma = \operatorname{sgn}(c_1 - c_2 \exp \sigma). \tag{5.7}$$

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. Обозначим через Γ_1 и Γ_2 множества лучей на двумерной плоскости вида $\Gamma_1 = \{(\gamma, z)$, где $\gamma = \pm 1$, $|z| > 1\}$, $\Gamma_2 = \{(z, \gamma)$, где $\gamma = \pm 1$, $|z| > 1\}$ и положим $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. С помощью формул (5.6), (5.7) каждому элементу ξ множества Γ ставится в соответствие элемент $\bar\xi$ этого же множества. Тем самым построено одномерное отображение $\xi \xrightarrow{g} \bar\xi$ множества (состоящего из восьми попарно исходящих из одной точки лучей на плоскости R^2). Основной результат заключается в том, что динамика этого отображения $g(\xi)$ полностью определяет (при дополнительных условиях типа невырожденности) структуру аттрактора системы (0.6) при условии (5.1).

Теорема 6. *Пусть отображение $\xi \xrightarrow{g} \bar\xi$ имеет грубый устойчивый цикл периода k. Тогда при всех достаточно больших λ система (0.6) в случае (5.1) имеет устойчивое $T_k(\lambda)$-периодическое решение $x_{1k}(t), x_{2k}(t)$, причем $T_k(\lambda) = k|\alpha_1|^{-1}(1 + o(1)) \ln \lambda$ и $x_{1k}(t)$, $x_{2k}(t) \in S(\gamma, z) \bigcup S(z, \gamma)$ при $t \in [-T, 0]$.*

Приведенные выше построения позволяют выписать детальную асимптотику функций $x_{jk}(t)$ $(j = 1, 2)$. Отметим, что влияние матрицы диффузии $\tilde D$ на динамику отображения $g(\xi)$ связано только с параметром σ, фигурирующем в определении этого отображения.

6. Вторая перестройка фазового портрета при уменьшении коэффициентов диффузии. Еще одно существенное изменение динамических свойств системы (0.6) возможно лишь в случае, когда элементы матрицы диффузии имеют порядок λ^{-1} (при $\lambda \to \infty$). В связи с этим в (0.6) положим

$$D = \bar D / \lambda. \tag{6.1}$$

В качестве основного результата построим одномерное отображение η множества Γ в себя, которое определяет динамику рассматриваемой системы при условии (6.1).

Рассмотрим решения $x_j(t)$ системы (0.6) с начальными условиями из множества $S(\gamma,z)\bigcup S(z,\gamma)$, введенного выше. Пусть для определенности $x_1(t),x_2(t)\in S(\gamma,z)$. При $t\in[0,T]$ $x_1(t)\approx\gamma b_1\exp\alpha_1 t$, $x_2(t)\approx zb_1\exp\alpha_1 t$. Для значений t из промежутка $[T,2T]$ имеем равенство $x_1(t)=\lambda[\int\limits_T^t\exp A(t-s)F(\gamma b_1\exp\alpha_1 s)ds+o(1)]$. Для $x_2(t)$ формулы несколько сложнее. Если $t\in[T,T+\beta(z)]$, то $x_2(t)=zb_1\exp\alpha_1 t+d(t)+o(1)$, где

$$d(t)=\int\limits_T^t\exp A(t-s)\bar{D}\int\limits_0^{s-T}\exp A(s-\tau-T)F(\gamma b_1\exp\alpha_1\tau)d\tau ds.$$

Рассмотрим отдельно два случая, когда $\beta(z)<T$ и $\beta(z)=T$. Пусть сначала $\beta(z)<T$. Тогда при $t\in[T+\beta(z),2T+\beta(z)]$

$$x_2(t)=\lambda\Big[\int\limits_{T+\beta(z)}^t\exp A(t-s)F(zb_1\exp\alpha_1(s-T)+d(s-T))ds+o(1)\Big],$$

а при $t\in[2T+\beta(z),2T+l]$ ($l>0$, как и выше, произвольно фиксировано при $\lambda\to\infty$) функции $x_{1,2}(t)$ определяются в главном как решения линейной системы (4.2), поэтому

$$x_1(t)=\lambda\Big[\exp A(t-T)\int\limits_0^T\exp(-As)F(\gamma b_1\exp\alpha_1 s)ds+o(1)\Big],\tag{6.2}$$

$$x_2(t)=\lambda\Big[\exp A(t-T)\int\limits_{\beta(z)}^{T+\beta(z)}\exp A(\beta(z)-s)F(zb_1\exp\alpha_1 s+d(s))ds+o(1)\Big].\tag{6.3}$$

Предположим теперь, что $\beta(z)=T$. При $t\in[2T,2T+l]$ для $x_1(t)$ по-прежнему верна формула (6.2). Введем обозначения:

$$R(t,z,\gamma)=zb_1\exp\alpha_1 t+\exp A(t-T)\int\limits_0^{t-T}\exp(-A\tau)\bar{D}(\int\limits_0^T\exp A(\tau-s)F(\gamma b_1\exp\alpha_1 s)ds)d\tau,$$

а $\rho(z,\gamma)$ — первый при $t>2T$ корень уравнения $|(R(t,z,\gamma),a)|=p$. Тогда при $t\in[2T,\rho(z,\gamma)+T]$ имеем равенство $x_2(t)=R(t,z,\gamma)+o(1)$, а на отрезке $t\in[\rho(z,\gamma)+T,$ $2T+\rho(z,\gamma)]$

$$x_2(t)=\lambda\Big[\int\limits_{T+\beta(z)}^t\exp A(t-s)F(R(s-T,z,\gamma))ds+o(1)\Big].\tag{6.4}$$

Наконец, при $t\in[\rho(z,\gamma)+2T,2T+l]$ из (6.2) и (6.4) получаем

$$x_2(t)=\lambda\Big[\exp A(t-\rho(z,\gamma)-2T)x_2(2T+\rho(z,\gamma))+o(1)\Big].\tag{6.5}$$

Определим $t(\varphi,\psi)$ как наименьший при $t>2T+l$ из корней уравнений $|(x_1(t),a)|=p$, $|(x_2(t),a)|=p$.

Для него выполняется $x_1(t(\varphi,\psi)+s),x_2(t(\varphi,\psi)+s)\in S(\bar{z},\bar{\gamma})\bigcup S(\bar{\gamma},\bar{z})$. Выпишем значения параметров $\bar{\gamma}$ и $\bar{z}$. Положим сначала $u=|c_1+c_2|/|c_1-c_2|$, где

$$c_1=\Big(\exp A(r+T)\int\limits_0^T\exp(-As)F(\gamma b_1\exp\alpha_1 s)ds,h_1\Big),\tag{6.6}$$

$$c_2 = \left(\exp A(r+T) \int\limits_r^{r+T} \exp(-As)F(Q(s,z,\gamma))ds, h_1\right). \tag{6.7}$$

В формулах (6.6), (6.7) $r = \beta(z)$ и $Q(s,z,\gamma) = zb_1 \exp(\alpha_1 s)$ при $\beta(z) < T$ и $r = \rho(z,\gamma)$ и $Q(s,z,\gamma) = R(s,z,\gamma)$ при $\beta(z) = T$.

Предположим, что $u < 1$. Тогда имеет место включение $x_1, x_2(t(\varphi,\psi)+s) \in S(\bar\gamma,\bar z)$ и верны равенства $\bar\gamma = \mathrm{sgn}(c_1+c_2)$, $\bar z = u^{-1}\mathrm{sgn}(c_1-c_2)$. Если же $u > 1$, то выполнено включение $x_1, x_2(t(\varphi,\psi)+s) \in S(\bar z,\bar\gamma)$, в котором $\bar\gamma = \mathrm{sgn}(c_1-c_2)$, $\bar z = u^{-1}\mathrm{sgn}(c_1+c_2)$.

Таким образом, построено отображение g, которое множество Γ переводит в себя.

Основной результат заключается в том, что имеет место утверждение теоремы 6. Тем самым динамика отображения $g : \xi \to \bar\xi$ определяет структуру аттрактора системы (0.6) при условии (6.1).

Рассмотрим случай степенного убывания $F(x)$: $F(x) = \gamma x^m/(1+x^{2n})$ $(2n > m)$. После нормирующей замены $x = \lambda^s y$, где $s = (2n+1-m)^{-1}$, получаем уравнение

$$\dot y = Ay + \gamma y^m(t-T)/(\varepsilon + y^{2n}(t-T)) \quad (\varepsilon = \lambda^{-2ns}). \tag{6.8}$$

В случае, когда уравнение “первого приближения” $\dot y = Ay + \gamma y^{m-2n}(t-T)$ имеет знакопостоянное (грубое) периодическое решение $y_0(t)$, уравнение (6.8) имеет периодическое решение $\lambda^s[y_0((1+O(\varepsilon))t) + O(\varepsilon)]$ той же устойчивости. Тем самым структура решений (0.1) при условии степенного убывания $F(x)$ может принципиально меняться. Можно, конечно, и в этой ситуации действовать по изложенной выше методике: выделять специально множество начальных условий S, изучать асимптотику решений из S, строить оператор последования и т. д. Однако здесь гораздо проще применять стандартные методы регулярного асимптотического анализа. Таким образом, требование достаточно быстрого убывания нелинейности на бесконечности носит принципиальный характер для изучения релаксационных структур.

Литература

1. *Шахгильдян В. В., Ляховин А. А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М., 1972.
2. *Белых В. Н., Некоркин В. И.* // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 4. С. 723 — 737.
3. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А., Якубович В. А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. М., 1978.
4. *Дмитриев А. С., Кислов В. Я.* Стохастические колебания в радиотехнике. М., 1989.
5. *Кащенко С. А.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 273, № 2. С. 328 — 331.
6. *Кащенко С. А.* // Докл. АН СССР. 1989. Т. 306, № 1. С. 35 — 38.
7. *Григорьева Е. В., Кащенко С. А., Лойко Н. А., Самсон А. М.* // Мат. моделирование. 1990. Т. 2, № 4. С. 97 — 117.
8. *Кащенко С. А.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1990. Т. 33, № 3. С. 308 — 314.
9. *Дмитриев А. С., Кащенко С. А.* // Радиотехника и электроника. 1989. Т. 34, № 12. С. 2381.
10. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. М., 1969.
11. *Кащенко С. А.* // Киев, 1984. (Препринт / ИМ АН УССР: 84).
12. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. Киев, 1986.
13. *Афраймович В. С., Веричев Н. И., Рабинович М. И.* // Изв. вузов. Радиофизика. 1986. Т. 29, № 9. С. 1050 — 1063.
14. *Fujisaka H., Yamada T.* // Progr. Theor. Phys. 1983. Vol. 69, N 4. P. 32 — 47.
15. *Sporus O., Roth S., Seeling F. F.* // Phisica D. 1987. Vol. 26, N 2. P. 215 — 228.

Ярославский государственный университет

Поступила в редакцию
9 марта 1993 г.