



Общероссийский математический портал

В. Г. Журавлев, Гомеоморфизмы окружности и цепные дроби, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2023, том 523, 39–52

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

14 декабря 2024 г., 19:07:47



В. Г. Журавлев

ГОМЕОМОРФИЗМЫ ОКРУЖНОСТИ И ЦЕПНЫЕ ДРОБИ

ВВЕДЕНИЕ

Цель статьи – получить обобщение одномерных разбиений окружности [1] на нелинейные отображения. Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с иррациональным числом вращения α_f .

В теореме 2.1 для него строятся разбиения \mathcal{T}^l окружности \mathbb{T} уровнями $l = 0, 1, 2, \dots$, квазиинвариантные относительно гомеоморфизма f :

$$f(\mathcal{T}^l) = \mathcal{T}^l \setminus T^l \cup f(T^l),$$

где $f : T^l \rightarrow f(T^l) = T^l$ – перекладывание отрезков T_0^l и T_1^l ядра

$$T^l = T_1^l \cup T_0^l = [v_1^l, 1) \cup [0, v_0^l) = [v_1^l, v_0^l) \quad (0.1)$$

разбиения \mathcal{T}^l . Концам отрезков v_0^l, v_1^l приписаны веса $m_{f,0}^l, m_{f,1}^l$ (2.13). В теореме 2.1 показано, что ядро T^l обладает свойством минимальности: среди точек бесконечной положительной орбиты $\text{Orb}^+(0) = \{f^j(0); j = 1, 2, \dots\}$ точка $v^{l+1} = f^{m^{l+1}}(0)$, где $m^{l+1} = m_{f,0}^l + m_{f,1}^l$, первой попадает в ядро T^l .

Точка $x \in \mathbb{T}$ называется предельной справа (слева), если любой непустой отрезок $[x, *)$ ($(*, x)$) $\subset \mathbb{T}$ содержит бесконечно много точек орбиты точки x . При выполнении обоих свойств точка x считается двусторонне предельной. Если точка $x_0 = 0 \in \mathbb{T}$ двусторонне предельная для гомеоморфизма f , то в предложении 2.1 доказано, что

$$|T^l| = |[v_1^l, v_0^l)| \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty. \quad (0.2)$$

Здесь $|[v_1^l, v_0^l)|$ обозначает длину отрезка $[v_1^l, v_0^l)$.

Таким образом, получается бесконечный процесс измельчения

$$\mathcal{T}^0 \supset \mathcal{T}^1 \supset \dots \supset \mathcal{T}^l \supset \mathcal{T}^{l+1} \supset \dots \quad (0.3)$$

разбиений окружности \mathbb{T} с ядрами (0.1), обладающими свойством (0.2).

Ключевые слова: гомеоморфизмы окружности, число вращения, цепные дроби.

Это позволило в теореме 4.1 получить приближения

$$\left| \alpha_f - \frac{p_{f,0}^l}{m_{f,0}^l} \right| \leq \frac{1}{m_{f,0}^l m_{f,1}^l}, \quad \left| \alpha_f - \frac{p_{f,1}^l}{m_{f,1}^l} \right| \leq \frac{1}{m_{f,0}^l m_{f,1}^l}. \quad (0.4)$$

для иррационального числа вращения α_f гомеоморфизма f . В (0.4) числители $p_{f,0}^l, p_{f,1}^l$ определяются самим гомеоморфизмом f . Значение теоремы 4.1 состоит в том, что она позволяет находить приближения цепными дробям $p_{f,0}^l/m_{f,0}^l, p_{f,1}^l/m_{f,1}^l$ для числа α_f , которое не задается непосредственно самим гомеоморфизмом f и определяется через некий предел (1.3). Такое определение не позволяет получать для α_f хорошие приближения, тогда как числители и знаменатели приближений (0.4) вычисляются конечным алгоритмом, основанным на ядерных разбиениях окружности \mathcal{T}^l из (0.3), не требующим знания числа вращения α_f .

§1. ГОМЕОМОРФИЗМЫ ОКРУЖНОСТИ

1.1. Поднятие гомеоморфизма. См. [2, 3] и [4]. Пусть

$$f: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{T} \quad (1.1)$$

– сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, которую иногда будем отождествлять

$$\mathbb{I} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}, \quad x \mapsto x \bmod 1 \quad (1.2)$$

с ее разверткой – единичным отрезком $\mathbb{I} = [0, 1)$. *Поднятие*

$$\widehat{f}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

гомеоморфизма f на универсальную накрывающую

$$\mathbb{R} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}, \quad x \mapsto x \bmod 1$$

тора \mathbb{T} определяется уравнением $\widehat{f}(x) = \widehat{f}(\{x\}) + [x]$ и начальными условиями $\widehat{f}(\{x\}) \equiv f(\{x\}) \bmod 1$, $\widehat{f}(0) = f(0)$ таким образом, чтобы функция \widehat{f} была непрерывной.

1.2. Число вращения. Предел

$$\tau(\widehat{f}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\widehat{f}^n(x)}{n} \quad (1.3)$$

существует и не зависит от выбора точки $x \in \mathbb{R}$. Здесь $\widehat{f}^n = \widehat{f} \circ \dots \circ \widehat{f}$ – n -кратная композиция. Величина

$$\alpha_f = \tau(f) = \tau(\widehat{f}) \tag{1.4}$$

называется *числом вращения* отображения f .

Число $\alpha_f = \tau(f)$ рационально тогда и только тогда, когда отображения f имеет неподвижные точки. Далее будем предполагать число вращения *иррациональным* и, значит, $f^n(x) \neq f^{n'}(x)$ для всех $x \in \mathbb{T}$, $n \neq n'$, т.е. в *орбите*

$$\text{Orb}_f(x) = \{f^n(x); n = 0, 1, 2, \dots\} \tag{1.5}$$

любого $x \in \mathbb{T}$ нет одинаковых точек.

§2. ЯДЕРНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ

2.1. Ядро разбиения. Ядро 0-го уровня

$$T^0 = T_0^0 \cup T_1^0 \tag{2.1}$$

состоит из двух отрезков

$$T_0^0 = [0, f(0)), \quad T_1^0 = [f(0), 1). \tag{2.2}$$

Используя (1.2), определим также разбиение окружности 0-го уровня

$$\mathcal{T}^0 = \mathcal{T}_0^0 \cup \mathcal{T}_1^0, \tag{2.3}$$

где $\mathcal{T}_0^0 = T_0^0$, $\mathcal{T}_1^0 = T_1^0$. Ядро 1-го уровня

$$T^1 = T_0^1 \cup T_1^1 \tag{2.4}$$

состоит из двух отрезков

$$T_0^1 = [0, f^2(0)), \quad T_1^1 = [f^1(0), 1), \tag{2.5}$$

если точка $f^2(0)$ попадает в интервал T_0^0 , и

$$T_0^1 = [0, f^1(0)), \quad T_1^1 = [f^2(0), 1), \tag{2.6}$$

если $f^2(0)$ попадает в интервал T_1^0 . Удобно отрезки (2.5) и (2.6) записать более единообразно

$$T_0^1 = [0, v_0^1), \quad T_1^1 = [v_1^1, 1). \tag{2.7}$$

Припишем точкам v_0^1, v_1^1 веса

$$m_0^1 = 2, \quad m_1^1 = 1 \quad \text{или} \quad m_0^1 = 1, \quad m_1^1 = 2 \tag{2.8}$$

в случае (2.5) или (2.6) соответственно. Таким образом, имеем

$$v_0^1 = f^{m_0^1}(0), \quad v_1^1 = f^{m_1^1}(0). \quad (2.9)$$

Для номера $k = 0, 1$ интервала T_k^1 через $k' = 1, 0$ обозначим номер дополнительного интервала $T_{k'}^1$. Определим разбиение окружности 1-го уровня

$$\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}_0^1 \cup \mathcal{T}_1^1,$$

где $\mathcal{T}_k^1 = T_k^1 \cup f^1(T_k^1) \cup \dots \cup f^{m_{k'}^1-1}(T_k^1)$ – орбиты интервалов T_k^1 . В силу непрерывности гомеоморфизма f из (1.1), различные интервалы $f^i(T_k^1)$ не пересекаются. Поэтому \mathcal{T}_k^1 представляют собою орбитные разбиения, порожденные интервалами T_k^1 . Орбиты для них обозначим

$$\text{Orb}(T_k^1) = \{f^j(T_k^1); j = 0, 1, \dots, m_{k'}^1 - 1\}. \quad (2.10)$$

Лемма 2.1. Пусть дано ядро l -го уровня

$$T^l = T_0^l \cup T_1^l = [v_1^l, 1) \cup [0, v_0^l) = [v_1^l, v_0^l), \quad (2.11)$$

состоящее из двух отрезков

$$T_0^l = [0, v_0^l), \quad T_1^l = [v_1^l, 1), \quad (2.12)$$

и пусть их концы v_k^l имеют веса m_k^l . Тогда точка

$$v^{l+1} = f^{m_1^l}(v_0^l) = f^{m_0^l}(v_1^l) = f^{m^{l+1}}(0)$$

веса

$$m^{l+1} = m_0^l + m_1^l \quad (2.13)$$

принадлежит ядру (2.11),

$$v^{l+1} \in T^l. \quad (2.14)$$

Доказательство. Рассмотрим отрезки

$$\begin{aligned} f^{m_1^l}([0, v_0^l)) &= [f^{m_1^l}(0), f^{m_1^l}(v_0^l)) = [v_1^l, v^{l+1}), \\ f^{m_0^l}([v_1^l, 1)) &= [f^{m_0^l}(v_1^l), f^{m_0^l}(1)) = [v^{l+1}, v_0^l). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Поскольку f из (1.1) – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм окружности \mathbb{T} , эти отрезки имеют общий конец v^{l+1} и

$$[v_1^l, v^{l+1}), [v^{l+1}, v_0^l) \subset T^l = [v_1^l, v_0^l).$$

Поэтому получаем разбиение

$$[v_1^l, v^{l+1}) \cup [v^{l+1}, v_0^l) = [v_1^l, v_0^l) \quad (2.16)$$

отрезка $T^l = [v_1^l, v_0^l)$, откуда следует включение (2.14). \square

Если построено ядро T^l , то ядро $(l + 1)$ -го уровня

$$T^{l+1} = T_0^{l+1} \cup T_1^{l+1} \quad (2.17)$$

определяется по индукции. Оно состоит из двух отрезков

$$T_0^{l+1} = [0, v_0^{l+1}), \quad T_1^{l+1} = [v_1^{l+1}, 1), \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} v_0^{l+1} &= v^{l+1}, & v_1^{l+1} &= v_1^l, & \text{если } v^{l+1} &\in T_0^l, \\ v_0^{l+1} &= v_0^l, & v_1^{l+1} &= v^{l+1}, & \text{если } v^{l+1} &\in T_1^l. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Следовательно, концы v_k^{l+1} имеют веса

$$\begin{aligned} m_0^{l+1} &= m^{l+1}, & m_1^{l+1} &= m_1^l, & \text{если } v^{l+1} &\in T_0^l, \\ m_0^{l+1} &= m_0^l, & m_1^{l+1} &= m^{l+1}, & \text{если } v^{l+1} &\in T_1^l, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $m^{l+1} = m_0^l + m_1^l$ согласно (2.13).

2.2. Разбиения окружности. Используя ядро T^{l+1} , определим объединение отрезков

$$\mathcal{T}^{l+1} = \mathcal{T}_0^{l+1} \cup \mathcal{T}_1^{l+1}, \quad (2.21)$$

где $\mathcal{T}_k^{l+1} = T_k^{l+1} \cup f^1(T_k^{l+1}) \cup \dots \cup f^{m_k^{l+1}-1}(T_k^{l+1})$ – орбиты интервалов T_k^{l+1} .

Теорема 2.1. Пусть \mathcal{T}^l – разбиение окружности l -го уровня и \mathcal{T}^{l+1} – объединение отрезков (2.21). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Объединение \mathcal{T}^{l+1} является разбиением окружности $(l + 1)$ -го уровня.
2. Среди точек бесконечной положительной орбиты

$$\text{Orb}^+(0) = \{f^j(0); j = 1, 2, \dots\} \quad (2.22)$$

точка $v^{l+1} = f^{m^{l+1}}(0)$, где m^{l+1} определено в (2.13), первой попадает в ядро T^l из (2.17).

3. Разбиение \mathcal{T}^l квазиинвариантно относительно гомеоморфизма (1.1):

$$f(\mathcal{T}^l) = \mathcal{T}^l \setminus T^l \cup f(T^l).$$

При этом, $f : T^l \rightarrow f(T^l) = T^l$, где

$$f(T^l) = f(T_0^l) \cup f(T_1^l) = [v_1^l, v^{l+1}) \cup [v^{l+1}, v_0^l) = [v_1^l, v_0^l) = T^l$$

– перекладывание отрезков $T_1^l = [v_1^l, 1) \equiv [v_1^l, 0) \pmod{1}$ и $T_0^l = [0, v_0^l)$ ядра

$$T^l = T_1^l \cup T_0^l = [v_1^l, 0) \cup [0, v_0^l) = [v_1^l, v_0^l).$$

4. Последовательность ядер

$$T^0 \supset T^1 \supset \dots \supset T^l \supset T^{l+1} \supset \dots \quad (2.23)$$

строго убывающая и поэтому процесс измельчения

$$\mathcal{T}^0 \supset \mathcal{T}^1 \supset \dots \supset \mathcal{T}^l \supset \mathcal{T}^{l+1} \supset \dots \quad (2.24)$$

разбиений окружности \mathbb{T} бесконечен.

Доказательство. 1. По определению (2.3), (2.21) имеем

$$\mathcal{T}^l = \mathcal{T}_0^l \cup \mathcal{T}_1^l, \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0^l &= T_0^l \cup f^1(T_0^l) \cup \dots \cup f^{m_1^l-1}(T_0^l), \\ \mathcal{T}_1^l &= T_1^l \cup f^1(T_1^l) \cup \dots \cup f^{m_0^l-1}(T_1^l) \end{aligned} \quad (2.26)$$

– орбиты интервалов T_0^l, T_1^l . Разберем случай $v^{l+1} \in T_0^l$. Случай $v^{l+1} \in T_1^l$ рассматривается аналогично. Вспоминая (2.18), (2.12), записываем

$$T_0^l = [0, v_0^{l+1}) \cup [v_0^{l+1}, v_0^l),$$

где $[0, v_0^{l+1}) = T_0^{l+1}$ и $[v_0^{l+1}, v_0^l) = f^{m_0^l}([v_1^l, 0)) = f^{m_0^l}(T_1^l)$. Отсюда приходим к разбиению

$$T_0^l = T_0^{l+1} \cup f^{m_0^l}(T_1^l). \quad (2.27)$$

Подставляя (2.27) в первую орбиту из (2.26), получаем разбиение

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0^l &= T_0^{l+1} \cup f^1(T_0^{l+1}) \cup \dots \cup f^{m_1^{l+1}-1}(T_0^{l+1}) \cup \\ & f^{m_0^l}(T_1^l) \cup f^{m_0^l+1}(T_1^l) \cup \dots \cup f^{m_0^{l+1}-1}(T_1^l), \end{aligned} \quad (2.28)$$

так как веса $m_0^{l+1} = m_0^l + m_1^l$ и $m_1^{l+1} = m_1^l$ по (2.20). Теперь заменим разбиение \mathcal{T}_0^l из (2.25) более мелким разбиением (2.28). Получим новое разбиение

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_0^l \cup \mathcal{T}_1^l &= T_0^{l+1} \cup f^1(T_0^{l+1}) \cup \dots \cup f^{m_1^{l+1}-1}(T_0^{l+1}) \\ & \cup T_1^l \cup f^1(T_1^l) \cup \dots \cup f^{m_0^{l+1}-1}(T_1^l) \\ &= T_0^{l+1} \cup f^1(T_0^{l+1}) \cup \dots \cup f^{m_1^{l+1}-1}(T_0^{l+1}) \\ & \cup T_1^{l+1} \cup f^1(T_1^{l+1}) \cup \dots \cup f^{m_0^{l+1}-1}(T_1^{l+1}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

поскольку $T_1^l = T_1^{l+1}$ согласно определениям (2.18) и (2.19). Последнее разбиение из (2.29) есть не что иное, как объединение отрезков $\mathcal{T}^{l+1} = \mathcal{T}_0^{l+1} \cup \mathcal{T}_1^{l+1}$ из (2.21). Это означает, что \mathcal{T}^{l+1} – разбиение окружности \mathbb{T} .

2. Из определения (2.25), (2.26) следует, что концы отрезков, образующих разбиение \mathcal{T}^l , – это в точности точки $f^j(0)$ с номерами $j = 0, 1, \dots, m^{l+1} - 1$, а точка $v^{l+1} = f^{m^{l+1}}(0)$ в силу (2.14) принадлежит ядру T^l , что доказывает второе утверждение теоремы.

3. Подействуем отображением f на разбиение \mathcal{T}^l , используя его разложение на орбиты (2.26). Имеем

$$f(\mathcal{T}^l) = f(\mathcal{T}_0^l) \cup f(\mathcal{T}_1^l), \quad (2.30)$$

где

$$\begin{aligned} f(\mathcal{T}_0^l) &= (f^1(T_0^l) \cup \dots \cup f^{m_1^l-1}(T_0^l)) \cup f^{m_1^l}(T_0^l), \\ f(\mathcal{T}_1^l) &= (f^1(T_1^l) \cup \dots \cup f^{m_0^l-1}(T_1^l)) \cup f^{m_0^l}(T_1^l), \end{aligned} \quad (2.31)$$

при этом

$$\begin{aligned} f^{m_1^l}(T_0^l) \cup f^{m_0^l}(T_1^l) &= f^{m_1^l}([0, v_0^l]) \cup f^{m_0^l}([v_1^l, 0]) \\ &= [v_1^l, v^{l+1}] \cup [v^{l+1}, v_0^l] \\ &= [v_1^l, v_0^l] = T^l. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Из (2.30)–(2.32) следует третье утверждение теоремы.

4. Свойства (2.23) и (2.24) вытекают из факта отсутствия одинаковых точек в орбите $\text{Orb}_f(0)$ (1.5). □

Определенные в (2.25), (2.26) разбиения $\mathcal{T}^l = \mathcal{T}_0^l \cup \mathcal{T}_1^l$ называются *ядерными разбиениями* l -го уровня окружности \mathbb{T} . Согласно второму утверждению теоремы 2.1, ядра T^l таких разбиений обладает *свойством минимальности*: среди точек орбиты $\text{Orb}^+(0)$ точка $f^{m^{l+1}}(0)$ порядка $m^{l+1} = m_{f,0}^l + m_{f,1}^l$ первой попадает в ядро T^l разбиения \mathcal{T}^l .

2.3. Ядро для предельной точки. Считаем, что у гомеоморфизма f (1.1) выбрана положительная ориентация, при которой движение происходит вправо от 0 к 1 вдоль единичного отрезка $\mathbb{I} = [0, 1]$ из (1.2).

Точка $x \in \mathbb{T}$ называется *предельной справа (слева)* относительно своей орбиты $\text{Orb}_f(x)$ (1.5), если любой непустой отрезок $[x, *)$ ($[*, x)$) $\subset \mathbb{T}$ содержит бесконечно много точек орбиты. Если выполнены оба свойства, то считаем точку x *двусторонне предельной*.

Предложение 2.1. Пусть $T^l = T_0^l \cup T_1^l$ – ядро l -го уровня (2.11); и пусть точка $0 \in \mathbb{T}$ является предельной справа или слева. Тогда

$$|T_0^l| = |[0, v_0^l]| \rightarrow 0 \quad \text{для } l \rightarrow +\infty \quad (2.33)$$

или

$$|T_1^l| = |[v_1^l, 1]| \rightarrow 0 \quad \text{для } l \rightarrow +\infty. \quad (2.34)$$

Если точка 0 двусторонне предельная, то

$$|T^l| = |[v_1^l, v_0^l]| \rightarrow 0 \quad \text{для } l \rightarrow +\infty. \quad (2.35)$$

Здесь $|*|$ – длина отрезка $*$.

Доказательство. Пусть 0 – предельная справа точка. Используя (2.23), рассмотрим последовательность вложенных отрезков

$$[0, v_0^0] \supset [0, v_0^1] \supset \dots \supset [0, v_0^l] \supset [0, v_0^{l+1}] \supset \dots \quad (2.36)$$

В каждом отрезке $[0, v_0^l]$ бесконечно много точек $f^n(0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) орбиты $\text{Orb}_f(0)$. Поэтому концы отрезков $v_0^l = f^{m_0^l}(0)$ имеют веса $m_0^l \rightarrow +\infty$ при $l \rightarrow +\infty$. С другой стороны, по теореме 2.1 отрезок $[0, v_0^l]$ не содержит ни одной точки $f^n(0)$ с номером $n < m_0^l < m^{l+1}$. Следовательно, длины отрезков в (2.36) должны стремиться к нулю.

Свойство (2.34) доказывается аналогично, а свойство (2.35) вытекает из (2.33) и (2.34). \square

Следствие 2.1. Если u гомеоморфизма f (1.1) есть двусторонне предельная точка $x_0 \in \mathbb{T}$, то, выбрав ее в качестве начальной точки вместо $x_0 = 0$, можно по правилу (2.25), (2.26) построить последовательность вложенных разбиений

$$\mathcal{T}^0(x_0) \supset \mathcal{T}^1(x_0) \supset \dots \supset \mathcal{T}^l(x_0) \supset \mathcal{T}^{l+1}(x_0) \supset \dots \quad (2.37)$$

окружности \mathbb{T} , обладающих свойствами 1)–4) из теоремы 2.1; при этом длины отрезков разбиений (2.37) стремятся к 0 при $l \rightarrow +\infty$.

§3. ПОВОРОТ ОКРУЖНОСТИ

3.1. Ядерные разбиения для поворота окружности. Пусть

$$\mathbb{T} \xrightarrow{f_\alpha} \mathbb{T}, \quad x \mapsto f_\alpha(x) \equiv x + \alpha \pmod{1} \quad (3.1)$$

– поворот окружности на иррациональное число вращения $\alpha = \alpha_f$ гомеоморфизма f , определенное в (1.4). Здесь $0 < \alpha < 1$. Поворот f_α является одним из базовых примеров сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности \mathbb{T} .

Выбирая гомеоморфизм $f = f_\alpha$ и начальную точку $x_0 = 0$ снова по правилу (2.25), (2.26) строим последовательность вложенных разбиений

$$\mathcal{T}_\alpha^0 \supset \mathcal{T}_\alpha^1 \supset \dots \supset \mathcal{T}_\alpha^l \supset \mathcal{T}_\alpha^{l+1} \supset \dots \quad (3.2)$$

Поворот f_α на иррациональный угол α является *минимальным* отображением, при котором любая точка имеет всюду плотную орбиту [3]. Следовательно, $x_0 = 0$ – двусторонне предельная точка; и тогда по следствию 2.1 длины отрезков разбиений (3.2) стремятся к нулю при $l \rightarrow +\infty$.

3.2. Ядра разбиений для поворота окружности. Удобно ядро 0-го уровня

$$T_\alpha^0 = T_{\alpha,0}^0 \cup T_{\alpha,1}^0$$

строить из двух отрезков

$$T_{\alpha,0}^0 = [0, v_{\alpha,0}^0) = [0, \alpha), \quad T_{\alpha,1}^0 = [v_{\alpha,1}^0, 0) = [\alpha - 1, 0).$$

Для ядер

$$T_\alpha^l = T_{\alpha,0}^l \cup T_{\alpha,1}^l \quad (3.3)$$

уровней $l = 0, 1, 2, \dots$ введем обозначения:

$$T_{\alpha,0}^l = [0, v_{\alpha,0}^l), \quad T_{\alpha,1}^l = [v_{\alpha,1}^l, 0), \quad (3.4)$$

где

$$v_{\alpha,0}^l = m_{\alpha,0}^l \alpha - p_{\alpha,0}^l, \quad v_{\alpha,1}^l = m_{\alpha,1}^l \alpha - p_{\alpha,1}^l. \quad (3.5)$$

Здесь веса $m_{\alpha,k}^l = 1, 2, \dots$ и свободные члены $p_{\alpha,k}^l = 0, 1, 2, \dots$ такие, что

$$0 < v_{\alpha,0}^l < 1, \quad -1 < v_{\alpha,1}^l < 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, по определению (3.4), (3.5), для уровня $l = 0$ имеем

$$m_{\alpha,0}^0 = 1, \quad p_{\alpha,0}^0 = 0; \quad m_{\alpha,1}^0 = 1, \quad p_{\alpha,1}^0 = -1.$$

Полагая

$$v_\alpha^{l+1} = v_{\alpha,0}^l + v_{\alpha,1}^l,$$

индукционный переход $l \rightarrow l + 1$ выполним по правилу:

$$v_{\alpha,0}^{l+1} = v_\alpha^{l+1}, \quad v_{\alpha,1}^{l+1} = v_{\alpha,1}^l,$$

или

$$v_{\alpha,0}^{l+1} = v_{\alpha,0}^l, \quad v_{\alpha,1}^{l+1} = v_\alpha^{l+1},$$

если соответственно

$$v_\alpha^{l+1} \in T_{\alpha,0}^l \quad \text{или} \quad v_\alpha^{l+1} \in T_{\alpha,1}^l. \quad (3.7)$$

Предложение 3.1. 1. Пусть

$$m_\alpha^{l+1} = m_{\alpha,0}^l + m_{\alpha,1}^l, \quad p_\alpha^{l+1} = p_{\alpha,0}^l + p_{\alpha,1}^l. \quad (3.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_{\alpha,0}^{l+1} &= m_\alpha^{l+1}, & p_{\alpha,0}^{l+1} &= p_\alpha^{l+1}, \\ m_{\alpha,1}^{l+1} &= m_{\alpha,1}^l, & p_{\alpha,1}^{l+1} &= p_{\alpha,1}^l \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} m_{\alpha,0}^{l+1} &= m_{\alpha,0}^l, & p_{\alpha,0}^{l+1} &= p_{\alpha,0}^l, \\ m_{\alpha,1}^{l+1} &= m_\alpha^{l+1}, & p_{\alpha,1}^{l+1} &= p_\alpha^{l+1} \end{aligned}$$

соответственно первому или второму условию из (3.7).

2. Если $m_{\alpha,k}^l, p_{\alpha,k}^l$ для $k = 0, 1$ удовлетворяют неравенствам (3.6), то $m_{\alpha,k}^{l+1}, p_{\alpha,k}^{l+1}$ также им удовлетворяют.

3. Определенные в (3.3)–(3.5) ядра T_α^l совпадают с ядрами $T_f^l = T^l$ из (2.17) для гомеоморфизма $f = f_\alpha$.

Доказательство. Эти утверждения следуют из определений, равенств

$$\begin{aligned} v_\alpha^{l+1} &= v_{\alpha,0}^l + v_{\alpha,1}^l = (m_{\alpha,0}^l \alpha - p_{\alpha,0}^l) + (m_{\alpha,1}^l \alpha - p_{\alpha,1}^l) \\ &= (m_{\alpha,0}^l + m_{\alpha,1}^l) \alpha - (p_{\alpha,0}^l + p_{\alpha,1}^l) \end{aligned}$$

и сравнения $f_\alpha^{m_{\alpha,0}^l + m_{\alpha,1}^l}(0) \equiv (m_{\alpha,0}^l + m_{\alpha,1}^l) \alpha \pmod{1}$. \square

3.3. Другие способы вычисления свободных членов. Разобьем единичный интервал \mathbb{I} из (1.2) на два интервала

$$\mathbb{I}_{\alpha,0} = [0, f_\alpha^{-1}(0)), \quad \mathbb{I}_{\alpha,1} = [f_\alpha^{-1}(0), 1). \quad (3.9)$$

Затем, полагая $p_\alpha(0) = 0$ и $\alpha^m = f_\alpha^m(0) \equiv m\alpha \pmod{1}$ для $m = 0, 1, 2, \dots$, определим последовательность $p_\alpha(m)$ рекуррентными правилами.

Правило 1:

$$p_\alpha(m+1) = p_\alpha(m) + \varepsilon_\alpha(m+1), \quad (3.10)$$

где

$$\varepsilon_\alpha(m+1) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha^m < \alpha^{m+1}, \\ 1, & \text{если } \alpha^m > \alpha^{m+1}. \end{cases}$$

Правило 2:

$$p_\alpha(m+1) = p_\alpha(m) + \varepsilon'_\alpha(m), \quad (3.11)$$

где

$$\varepsilon'_\alpha(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha^m \in \mathbb{I}_{\alpha,0}, \\ 1, & \text{если } \alpha^m \in \mathbb{I}_{\alpha,1}. \end{cases}$$

Лемма 3.1. 1. Определения (3.10) и (3.11) последовательности чисел $p_\alpha(m)$ эквивалентны.

2. Свободные члены $p_{\alpha,0}^l, p_{\alpha,1}^l$ из (3.8) вычисляются по формулам

$$p_{\alpha,0}^l = p_\alpha(m_{\alpha,0}^l), \quad p_{\alpha,1}^l = p_\alpha(m_{\alpha,1}^l) - 1, \quad (3.12)$$

где $m_{\alpha,0}^l, m_{\alpha,1}^l$ – веса из (3.8).

Доказательство. 1. Первое утверждение справедливо, так как

$$\begin{aligned} \alpha^m < \alpha^{m+1} &\Leftrightarrow \alpha^m \in \mathbb{I}_0, \\ \alpha^m > \alpha^{m+1} &\Leftrightarrow \alpha^m \in \mathbb{I}_1. \end{aligned}$$

2. Пусть $\alpha_0^{(m)} = m\alpha - p_\alpha(m), \alpha_1^{(m)} = m\alpha - p_\alpha(m) - 1$. Из определения (3.5) следуют сравнения

$$v_{\alpha,0}^l \equiv \alpha_0^{(m_{\alpha,0}^l)}, \quad v_{\alpha,1}^l \equiv \alpha_1^{(m_{\alpha,1}^l)} \pmod{1}. \quad (3.13)$$

Сопоставляя неравенства (3.6) с неравенствами

$$0 < \alpha_0^{(m)} < 1, \quad -1 < \alpha_1^{(m)} < 0,$$

вытекающими из (3.10), в силу (3.13) приходим к формулам (3.12). \square

3.4. Разбиения окружности и цепные дроби. Согласно (3.4) и (3.5) записываем

$$|m_{\alpha,0}^l \alpha - p_{\alpha,0}^l| = |T_{\alpha,0}^l|, \quad |m_{\alpha,1}^l \alpha - p_{\alpha,1}^l| = |T_{\alpha,1}^l|, \quad (3.14)$$

где $|T_{\alpha,k}^l|$ обозначают длины интервалов $T_{\alpha,k}^l$ ($k = 0, 1$).

Чтобы оценить длины, вернемся к разбиениям окружности, определенным в (3.2) и (2.25), (2.26). Данные разбиения $\mathcal{T}_\alpha^l = \mathcal{T}_{\alpha,0}^l \cup \mathcal{T}_{\alpha,1}^l$ разложены на орбиты

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{\alpha,0}^l &= T_{\alpha,0}^l \cup f^1(T_{\alpha,0}^l) \cup \dots \cup f^{m_{\alpha,1}^l - 1}(T_{\alpha,0}^l), \\ \mathcal{T}_{\alpha,1}^l &= T_{\alpha,1}^l \cup f^1(T_{\alpha,1}^l) \cup \dots \cup f^{m_{\alpha,0}^l - 1}(T_{\alpha,1}^l). \end{aligned}$$

Интервалы каждой орбиты имеют одну и ту же длину и все вместе составляют единичную окружность \mathbb{T} . Поэтому длины интервалов должны удовлетворять неравенствам

$$|T_{\alpha,0}^l| \leq \frac{1}{m_{\alpha,1}^l}, \quad |T_{\alpha,1}^l| \leq \frac{1}{m_{\alpha,0}^l}. \quad (3.15)$$

Предложение 3.2. *Имеют место рациональные приближения*

$$\left| \alpha - \frac{p_{\alpha,0}^l}{m_{\alpha,0}^l} \right| \leq \frac{1}{m_{\alpha,0}^l m_{\alpha,1}^l}, \quad \left| \alpha - \frac{p_{\alpha,1}^l}{m_{\alpha,1}^l} \right| \leq \frac{1}{m_{\alpha,0}^l m_{\alpha,1}^l} \quad (3.16)$$

иррационального числа α , где числители и знаменатели определены в предложении 3.1.

Доказательство. Утверждение следует из представлений (3.14) и неравенств (3.15). \square

Замечание 3.1. 1. Участвующие в предложении 3.2 рациональные приближения $p_{\alpha,k}^l/m_{\alpha,k}^l$ есть не что иное, как промежуточные дроби из теории цепных дробей [5].

2. Связь между разбиениями \mathcal{T}_α^l окружности \mathbb{T} и цепными дробями была исследована в [6].

§4. АППРОКСИМАЦИЯ ЧИСЛА ВРАЩЕНИЯ

4.1. Связь между гомеоморфизмом и поворотом окружности.

Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм (1.1) окружности \mathbb{T} и f_α – поворот окружности (3.1) на иррациональное число вращения $\alpha = \alpha_f$ гомеоморфизма f . Тогда эти отображения можно связать через коммутативную диаграмму [3]:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T} & \xrightarrow{f} & \mathbb{T} \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{f_\alpha} & \mathbb{T} \end{array} \quad (4.1)$$

Здесь

$$\mu(x) = \mu([0, x]) \quad (4.2)$$

– мера отрезка $[0, x] \subset \mathbb{T}$, где μ – нормированная борелевская мера на окружности \mathbb{T} , инвариантная относительно гомеоморфизма f . В силу иррациональности числа вращения α , такая мера μ непрерывна.

4.2. Веса и свободные члены для гомеоморфизма. Используя отождествление $\mathbb{I} \xrightarrow{\pi} \mathbb{T}$ из (1.2), аналогично (3.9) разобьем единичный интервал \mathbb{I} на два интервала

$$\mathbb{I}_{f,0} = [0, f^{-1}(0)), \quad \mathbb{I}_{f,1} = [f^{-1}(0), 1).$$

Затем, полагая $p_f(0) = 0$ и

$$\alpha_f^m = f^m(0)$$

для $m = 0, 1, 2, \dots$, определим последовательность $p_f(m)$, полагая

$$p_f(m+1) = p_f(m) + \varepsilon'_f(m),$$

где

$$\varepsilon'_f(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha_f^m \in \mathbb{I}_0, \\ 1, & \text{если } \alpha_f^m \in \mathbb{I}_1. \end{cases}$$

Аналогично (3.12) введем обозначения

$$p_{f,0}^l = p_f(m_{f,0}^l), \quad p_{f,1}^l = p_f(m_{f,1}^l) - 1, \quad (4.3)$$

где веса $m_{f,0}^l, m_{f,1}^l$ – веса из (2.20).

Предложение 4.1. Пусть $m_{f,0}^l = m_0^l, m_{f,1}^l = m_1^l$ – веса для гомеоморфизма f , определенные в (2.20), $m_{\alpha,0}^l, m_{\alpha,1}^l$ – веса для поворота окружности f_α из предложения 3.1; и пусть свободные члены $p_{\alpha,k}^l$ и $p_{f,k}^l$ ($k = 0, 1$) определены в (3.12) и (4.3) соответственно. Тогда справедливы равенства

$$m_{\alpha,0}^l = m_{f,0}^l, \quad m_{\alpha,1}^l = m_{f,1}^l, \quad p_{\alpha,0}^l = p_{f,0}^l, \quad p_{\alpha,1}^l = p_{f,1}^l. \quad (4.4)$$

Доказательство. Это следует из предложения 3.1 и коммутативности диаграммы (4.1). □

4.3. Число вращения и цепные дроби.

Теорема 4.1. Пусть f – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм (1.1) окружности \mathbb{T} с иррациональным числом вращения α_f (1.4); и пусть для $l = 0, 1, 2, \dots$ целые числа $m_{f,0}^l, m_{f,1}^l$ и $p_{f,0}^l, p_{f,1}^l$ определены в (2.20) и (4.3) соответственно. Тогда имеют место приближения

$$\left| \alpha_f - \frac{p_{f,0}^l}{m_{f,0}^l} \right| \leq \frac{1}{m_{f,0}^l m_{f,1}^l}, \quad \left| \alpha_f - \frac{p_{f,1}^l}{m_{f,1}^l} \right| \leq \frac{1}{m_{f,0}^l m_{f,1}^l}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Если выбрать $\alpha = \alpha_f$, то неравенства (4.5) получаются из неравенств (3.16) подстановкой (4.4). □

Замечание 4.1. В силу (2.22) приближения (4.5) обладают свойством минимальности.

Замечание 4.2. Значение доказанной теоремы 4.1 состоит в том, что она позволяет находить приближения цепными дробям $p_{f,0}^l/m_{f,0}^l, p_{f,1}^l/m_{f,1}^l$ числа вращения α_f гомеоморфизма окружности f . Число

вращения α_f не задается непосредственно самим гомеоморфизмом f и определяется как предел в (1.3). Такое определение не позволяет получать для α_f хорошие приближения. Числители и знаменатели приближений (4.5) вычисляются дискретным алгоритмом, основанным на ядерных разбиениях окружности \mathcal{T}^l из теоремы 2.1, не требующим знания числа вращения α_f .

Замечание 4.3. Гомеоморфизм f называется (топологически) транзитивным, если у него есть всюду плотная орбита. По теореме Пуанкаре о классификации [4], если гомеоморфизм f транзитивен, то он сопряжен

$$f = h^{-1}f_\alpha h \quad (4.6)$$

повороту окружности f_α (3.1) с углом поворота α , равным числу вращения α_f . Для таких гомеоморфизмов мы приходим к приближениям обычными цепными дробями (3.16), однако, для этого потребуются знать сопрягающее отображение h в (4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Г. Журавлев, *Одномерные разбиения Фибоначчи*. — Изв. РАН, сер. матем., **71**, No. 2 (2007), 89–122.
2. З. Нитецки, *Введение в дифференциальную динамику*. Москва, Мир, 1975.
3. И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. В. Фомин, *Эргодическая теория*. Москва, Наука, 1980.
4. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*. Москва, Факториал, 1999.
5. Хинчин А. Я., *Цепные дроби*, четвертое изд., Москва, Наука, 1978.
6. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivatives of circle rotations and similarity of orbits*, Max-Planck-Institut für Mathematik, Preprint Series **62** (2004), 1–11.

Zhuravlev V. G. Circle homeomorphisms and continued fractions.

For an orientation preserving homeomorphism $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ of the circle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ with an irrational rotation number α_f , we build karyon tilings \mathcal{T}^l of levels $l = 0, 1, 2, \dots$ that are quasi-invariant with respect to f and have minimal kernels. These tilings are used to obtain approximations for the rotation number α_f by continued fractions.

Владимирский государственный университет
пр. Строителей, 11, 600024 Владимир, Россия
E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 11 марта 2023 г.