R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziev, N. M. Tukhtaeva, Direct and inverse problems for the Hilfer fractional differential equation, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2024, Volume 34, Issue 2, 167–181

DOI: 10.35634/vm240201

МАТЕМАТИКА 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 167–181.

УДК 517.95

© *Р. Р. Ашуров, Ю. Э. Файзиев, Н. М. Тухтаева*

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ПО ХИЛЬФЕРУ

В статье исследуются прямая и обратная задачи для уравнений субдиффузии с участием дробной производной в смысле Хильфера. В качестве эллиптической части уравнения взят произвольный положительный самосопряженный оператор A. В частности, в качестве оператора A можно взять оператор Лапласа с условием Дирихле. Сначала доказано существование и единственность решения прямой задачи. Затем с помощью представления решения прямой задачи доказывается существование и единственность обратной задачи нахождения правой части уравнения, зависящей только от пространственной переменной.

Ключевые слова: задачи Коши, производные Хильфера, уравнение субдиффузии, обратные задачи.

DOI: 10.35634/vm240201

Введение

Теория дифференциальных уравнений с дробными производными приобрела значительную популярность и важность в последние несколько десятилетий в основном благодаря их приложениям в многочисленных, казалось бы далеких друг от друга, областях науки и техники (см., например, [1–3]). Математические аспекты дробных дифференциальных уравнений и методы их решения изучались многими авторами, по этой теме опубликовано несколько монографий (см., например, [4–7]). Существуют различные определения дробных производных, которые не всегда совпадают друг с другом (см., например, [8, гл. 2]).

В данной статье изучается уравнение с дробной производной в смысле Хильфера, причем эллиптическая часть рассматриваемого уравнения состоит из произвольного положительного самосопряженного оператора.

Напомним определение производных Хильфера для вектор-функций. Всюду далее символом H обозначаем сепарабельное гильбертово пространство. Используя определения сильного интеграла и сильной производной, можно определить дробные аналоги интегралов и производных для вектор-функций $g\colon \mathbb{R}_+ \to H$, при этом известные формулы и свойства сохраняются (см., например, [4]). Итак, дробное интегрирование в смысле Римана–Лиувилля порядка τ имеет вид:

$$I^\tau g(t) = \frac{1}{\Gamma(\tau)} \int\limits_0^t (t-\xi)^{\tau-1} g(\xi)\, d\xi.$$

С помощью этой формулы двухпараметрическая дробная производная в смысле Хильфера для $0<\alpha<1$ и $0\leqslant\beta\leqslant 1$ определяется следующим образом (см. [1, с. 433], [9]):

$$D^{\alpha,\beta} g(t) = I^{\beta(1-\alpha)} \frac{d}{dt} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} g(t).$$

Отметим, что производная Хильфера является сравнительно новой, и она интерполирует между производными Капуто и Римана–Лиувилля: при значении параметра $\beta=1$ получим производную Капуто, при $\beta=0$ — Римана–Лиувилля. Различные модели прикладных задач, которые неадекватно моделируются производными Римана–Лиувилля и Капуто, и приводящие к таким дробным производным исследованы в работе Р. Хильфера и др. [9] (см. также [1]).

Начиная с 2000 года специалисты активно начали исследовать дифференциальные уравнения с дробными производными Хильфера (см. [1,2,9,10]). Например, в фундаментальной работе Р. Хильфера и Ю. Лучко [9] рассмотрена задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с производными Хильфера:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} y(t) - \lambda y(t) = g(t), \\ \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{d^k}{dt^k} \left(I^{(1-\beta)(n-\alpha)} y \right)(t) = c_k, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \tag{0.1}$$

где $n-1 < \alpha < n$ и $0 \leqslant \beta \leqslant 1$.

При моделировании различных процессов в уравнениях также появляются производные по пространственным переменным. Поэтому естественно возникает вопрос: можно ли сформулировать и изучить задачу, подобную (0.1), для уравнений в частных производных? В качестве примера можно взять следующую начально-краевую задачу, включающую оператор Лапласа

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad t > 0, \quad x \in \Omega \subset R^N; \\ u(x,t)|_{\partial\Omega} = 0; \\ \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{d^k}{dx^k} \left(I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u \right)(x,t) = \varphi(x). \end{cases} \tag{0.2}$$

Предметом данной работы является исследование задач типа (0.2). Такие задачи удобно изучать методом Фурье. Поскольку в этом методе от оператора Лапласа требуется лишь наличие полной ортонормированной системы собственных функций, то вместо оператора Лапласа можно рассматривать произвольный эллиптический оператор A или даже произвольный положительный самосопряженный абстрактный оператор, имеющий полную ортонормированную систему собственных функций. Исходя из этого, рассмотрим следующую задачу в абстрактной форме:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u(t) + Au(t) = f, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \lim\limits_{t\to+0} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t) = \varphi, \end{cases} \tag{0.3}$$

где $A\colon H \to H$ — произвольный положительный самосопряженный неограниченный оператор, определенный на плотном множестве $D(A) \subset H$, $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $f, \varphi \in H$ — заданные элементы. Предположим далее, что обратный оператор A^{-1} является компактным. Тогда оператор A имеет полную ортонормированную систему собственных функций $\{v_k\}$ в H с положительными собственными значениями $\{\lambda_k\}$: $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \to +\infty$. Область определения оператора A имеет следующий вид:

$$D(A) = \left\{ h \in H\colon \ \|h\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |h_k|^2 < \infty \right\},$$

где h_k — коэффициенты Фурье элемента h.

Задачу (0.3) далее будем называть *прямой задачей*.

Помимо прямой задачи, в уравнениях в частных производных дробного порядка важную роль играет решение различных обратных задач. Обратными задачами в теории уравнений в частных производных принято называть задачи, в которых наряду с решением дифференциального уравнения необходимо также определить коэффициент(ы) уравнения и/или правую часть (функцию-источник).

В настоящей статье исследуется как прямая задача так и обратная задача нахождения правой части уравнения (0.3), то есть функции источника f. Интерес к исследованию обратных задач идентификации источника вызван прежде всего в связи с практическими потребностями в различных областях механики, сейсмологии, медицинской томографии и геофизики (см., например, монографию С. И. Кабанихина [11] и обзорную статью Ю. Лю и др. [12]).

Напомним кратко некоторые известные работы, в которых изучались прямые и обратные задачи, близкие к нашим исследованиям.

Ранее уравнение (0.3) рассматривалось только в случае, когда оператор A определен одномерным дифференциальным выражением или оператором Лапласа на прямоугольнике. Так, в работах [13, 14] в случае $Au = u_{xx}$ доказана однозначная разрешимость прямой и обратной задач для уравнения субдиффузии с дробной производной более общей чем производные Хильфера. Отметим также работы [15, 16], где в качестве оператора A рассмотрены дифференциальные выражения u_{xx} и $u_{xx} + u_{yy}$ на отрезке и на прямоугольнике соответственно. При этом граничные условия являются несамосопряженными и поэтому решения прямой и обратной задач найдены в виде биортогонального ряда.

В последнее время обратные задачи для уравнений в частных производных с производными Капуто и Римана–Лиувилля изучались в работах многих авторов (см. работы [12, 17] и литературу там). Так в работах [18] и [19] исследована обратная задача для уравнения с производной Капуто а в работе [17] — с производной Римана–Лиувилля. Отметим, что в уравнении, рассмотренном в работе [19], участвуют также и младшие производные по t. В конце параграфа 2 (см. Замечание) приведем сравнение основного результат данной работы с результатами работ [17] и [18].

Для линейных абстрактных уравнений с производными Капуто обратные задачи систематически изучались в работах В. Е. Федорова и др. (см., например, работы [20–23] и литературу там). Например, в работе [20] рассматривается обратная задача по определению пары вектор-функций $\{x(t), u(t)\}$ для уравнения

$$D_t^{\alpha} Lx(t) = Mx(t) + B(t)u(t) + y(t),$$

с некоторым начальным условием и условием переопределения вида

$$\varPhi x(t) = \Psi(t).$$

Здесь $m-1 < \alpha \leqslant m$, M — замкнутый, L и B — непрерывные линейные операторы, действующие из некоторых банаховых пространствах в банахово пространство X, оператор $\varPhi$ и вектор-функции $y(t)$ и $\Psi(t)$ заданы. При определенных условиях на операторы M, L, B и $\varPhi$ и на вектор-функцию $\Psi(t)$ доказана теорема существования и единственности решения обратной задачи. В работе [24] исследована обратная задача для нелинейных абстрактных дифференциальных уравнений дробного порядка.

В заключение отметим работу [25], где исследуется обратная задача одновременного определения правой части уравнения и порядка дробной производной в уравнениях субдиффузии.

Всюду ниже символом $C((a,b);H)$ обозначен класс вектор-функций $u(t)$, непрерывных в интервале $t \in (a,b)$ со значениями в гильбертовом пространстве H.

Определение 0.1. Функцию $u(t) \in C((0,T];H)$ со свойствами

$$D_t^{\alpha,\beta} u(t),\ Au(t) \in C\big((0,T];H\big)$$

и удовлетворяющую условиям (0.3) будем называть *решением задачи* (0.3).

Для изучения обратной задачи нам потребуется дополнительное условие. В качестве такого условия возьмем следующее

$$u(\tau) = \psi, \quad 0 < \tau \leqslant T, \tag{0.4}$$

где $\psi \in H$ — некоторый заданный элемент, а τ — фиксированная точка.

Определение 0.2. Если функции $u(t) \in C\big((0,T];H\big)$ и $f \in H$ удовлетворяют условиям

$$D_t^{\alpha,\beta}u(t),\ Au(t) \in C\big((0,T];H\big)$$

и (0.3)–(0.4), то пару $\{u(t), f\}$ назовем *решением обратной задачи* (0.3)–(0.4).

§ 1. Прямая задача

Для того, чтобы найти решение прямой задачи, нам необходимы некоторые свойства функций Миттаг–Леффлера.

Пусть $\rho > 0$ и $\mu \in \mathbb{C}$ — комплексное число. Следующая (см. [3, с. 56])

$$E_{\rho,\mu}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\rho k + \mu)}$$

функция называется двухпараметрической функцией Миттаг–Леффлера.

Лемма 1.1. *Пусть $0 < \rho < 1$ и μ — вещественная постоянная. Тогда для любого $t \geqslant 0$ имеем* (*см.* [7, с. 136])

$$0 < E_{\rho,\mu}(-t) \leqslant \frac{C}{1+t},$$

где константа C не зависит от t.

Лемма 1.2. *Пусть $0 < \rho < 1$ и μ — вещественная постоянная. Асимптотическая оценка двухпараметрической функции Миттаг–Леффлера имеет следующий вид* (*см.* [7, с. 134]):

$$E_{\rho,\mu}(-t) = -\sum_{k=1}^{p} \frac{(-t)^{-k}}{\Gamma(\mu - k\rho)} + O\big(t^{-1-p}\big), \quad t > 1.$$

Для прямой задачи верно следующее утверждение:

Теорема 1.1. *Пусть $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ и $\varphi \in H$. Тогда прямая задача* (0.3) *имеет единственное решение, и оно имеет вид:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha) + f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha)\big) v_k, \tag{1.1}$$

где φ_k и f_k — коэффициенты Фурье элементов φ и f соответственно.

Доказательство. Для того чтобы найти решение задачи (0.3), используем метод Фурье. Решение задачи ищем в виде формального ряда:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) v_k.$$

Тогда относительно $T_k(t)$ получим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} T_k(t) + \lambda_k T_k(t) = f_k, \\ \lim\limits_{t\to+0} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} T_k(t) = \varphi_k, \quad k \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

где φ_k и f_k — коэффициенты Фурье элементов φ и f соответственно. Решение задачи (1.2) имеет вид (см. [1, с. 115], [9])

$$T_k(t) = \varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha) + f_k \int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\big(-\lambda_k (t-\tau)^\alpha\big)\, d\tau.$$

Если учесть равенство (см. [5, с. 24])

$$\int\limits_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\big(-\lambda_k (t-\tau)^\alpha\big)\, d\tau = t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha),$$

то

$$T_k(t) = \varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha) + f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha).$$

Отсюда следует, что функция $u(t)$, определенная рядом (1.1), является формальным решением задачи (0.3).

Теперь докажем, что функция $u(t)$ действительно является решением. Для этого покажем, что эта функция удовлетворяет всем условиям определения 0.1.

Частичную сумму ряда (1.1) обозначим через $S_n(t)$. Тогда действие оператора A на $S_n(t)$ будет иметь вид:

$$AS_n(t) = \sum_{k=1}^n \big(\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha) + f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha)\big) \lambda_k v_k.$$

Согласно равенству Парсеваля, имеем

$$\|AS_n(t)\|^2 = \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \big|\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha) + f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha)\big|^2.$$

Следовательно, используя неравенство $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$, получаем оценку

$$\|AS_n(t)\|^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \big|\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha)\big|^2 + 2\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \big| f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha)\big|^2 = \\ = AS_n^1 + AS_n^2,$$

где

$$AS_n^1 = 2\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \big|\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha)\big|^2, \qquad AS_n^2 = 2\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \big| f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha)\big|^2.$$

Используя лемму 1.1 при $t > 0$, получим

$$AS_n^1 = 2\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \big|\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha)\big|^2 \leqslant 2C^2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \big|\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)}\big|^2 \left|\frac{1}{1+\lambda_k t^\alpha}\right|^2 \leqslant \\ \leqslant 2C^2 \sum_{k=1}^n \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 t^{2(1-\beta)(\alpha-1)} \frac{1}{\lambda_k^2 t^{2\alpha}} = \frac{2C^2}{t^{2(1-\beta+\alpha\beta)}} \sum_{k=1}^n |\varphi_k|^2$$

и

$$AS_n^2 = 2\sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 \big| f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha)\big|^2 \leqslant 2C^2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |f_k t^\alpha|^2 \left|\frac{1}{1+\lambda_k t^\alpha}\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2C^2 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |f_k|^2 t^{2\alpha} \frac{1}{\lambda_k^2 t^{2\alpha}} = 2C^2 \sum_{k=1}^{n} |f_k|^2.$$

Если $\varphi, f \in H$, то для всех $t > 0$, переходя к пределу при $n \to \infty$, имеем

$$\|Au(t)\|^2 \leqslant \frac{2C^2}{t^{2(1-\beta+\alpha\beta)}} \|\varphi\|^2 + 2C^2 \|f\|^2 .$$

Очевидно, что эта оценка справедлива на любом сегменте $[a, T]$, где $a > 0$ — произвольное число. Следовательно, рассматриваемый ряд сходится равномерно на этом сегменте. Поскольку сумма равномерно сходящего ряда непрерывных функций непрерывна, то отсюда вытекает, что $Au(t) \in C([a, T]; H)$. Из произвольности числа a получим $Au(t) \in C((0, T]; H)$.

Справедливость $u(t) \in C((0, T]; H)$ доказывается так же как и выше. В данном случае нам необходимо оценить $S_n(t)$ и в отличие от $AS_n(t)$ в $S_n(t)$ множитель λ_k не участвует.

Из уравнения задачи (0.3) получим $D_t^{\alpha,\beta} u(t) = f - Au(t)$. Поскольку $f \in H$, $Au(t) \in C((0, T]; H)$, то отсюда следует, что $D_t^{\alpha,\beta} u(t) \in C((0, T]; H)$.

Теперь покажем, что функция $u(t)$, определенная формулой (1.1), удовлетворяет начальному условию. Для этого воспользуемся следующим равенством (см. [7, с. 120, (1.16)])

$$\frac{1}{\Gamma(\mu)} \int_0^t (t-\tau)^{\mu-1} \tau^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\lambda_k \tau^\alpha)\, d\tau = t^{\mu+\beta-1} E_{\alpha,\beta+\mu}(-\lambda_k t^\alpha).$$

Используя эту формулу, напишем

$$I^{(1-\beta)(1-\alpha)} S_n(t) = \frac{1}{\Gamma((1-\beta)(1-\alpha))} \int_0^t (t-\tau)^{(1-\beta)(1-\alpha)-1} S_n(\tau)\, d\tau =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \big(\varphi_k E_{\alpha,1}(-\lambda_k t^\alpha) + f_k t^{\alpha\beta-\beta+1} E_{\alpha,\alpha\beta-\beta+2}(-\lambda_k t^\alpha)\big) v_k.$$

Если учесть, что $\alpha\beta - \beta + 1 > 0$ и $E_{\alpha,1}(0) = 1$, то имеем

$$I^{(1-\beta)(1-\alpha)} S_n(0+) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k v_k.$$

Переходя к пределу $n \to \infty$, получим

$$I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(0+) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k v_k = \varphi.$$

Итак, функция $u(t)$, определенная формулой (1.1), удовлетворяет начальному условию.

Единственность. Теперь докажем, что решение задачи (0.3) единственно. Для этого используем стандартный метод, то есть предположим противное. Пусть задача (0.3) имеет два различных решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Обозначим $u_1(t) - u_2(t) = u(t)$.

Для того чтобы найти функцию $u(t)$, получим

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u(t) + Au(t) = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \lim\limits_{t\to+0} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t) = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Чтобы доказать единственность решения задачи (0.3), достаточно показать, что задача (1.3) имеет только нулевое решение. Введем обозначение $u_k(t) = (u(t), v_k)$. В этом случае из первого равенства задачи (1.3) и в силу самосопряженности оператора A, имеем следующие равенства:

$$D_t^{\alpha,\beta} u_k(t) = \big(D_t^{\alpha,\beta} u(t), v_k\big) = -\big(Au(t), v_k\big) = -\big(u(t), Av_k\big) =$$
$$= -\big(u(t), \lambda_k v_k\big) = -\lambda_k\big(u(t), v_k\big) = -\lambda_k u_k(t), \quad 0 < t \leqslant T.$$

При применении условия задачи (1.3), получим

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u_k(t) + \lambda_k u_k(t) = 0, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \lim\limits_{t\to+0} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u_k(t) = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

Тогда задача (1.4) имеет решение $u_k(t) \equiv 0$ (см. [9]). В силу полноты системы собственных функций $\{v_k\}$, имеем $u(t) \equiv 0$. Теорема 1.1 доказана полностью. □

§ 2. Обратная задача

В этом параграфе изучим обратную задачу нахождения правой части уравнения.

Пусть в следующей задаче функция $u(t)$ и элемент f неизвестны:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u(t) + Au(t) = f, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \lim\limits_{t\to+0} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t) = \varphi, \quad \varphi \in H. \end{cases} \tag{2.1}$$

Отметим, что элемент $f \in H$ не зависит от переменной t.

Теорема 2.1. *Пусть* $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\varphi \in H$ *и* $\psi \in D(A)$. *Тогда обратная задача* (2.1), (0.4) *имеет единственное решение* $\{u(t), f\}$, *и это решение имеет вид:*

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k t^\alpha) + f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha)\big) v_k, \tag{2.2}$$

где

$$f_k = \frac{\psi_k}{\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k \tau^\alpha)} - \frac{\varphi_k \tau^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k \tau^\alpha)}{\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k \tau^\alpha)}$$

и

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} f_k v_k. \tag{2.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как отмечено выше, неизвестный элемент f не зависит от переменной t. Предполагая, что элемент f известен, напишем решение прямой задачи в виде (2.2). Затем, используя дополнительное условие (0.4), имеем:

$$u(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \big(\varphi_k \tau^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k \tau^\alpha) + f_k \tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k \tau^\alpha)\big) v_k = \psi.$$

Следовательно,

$$\varphi_k \tau^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k\tau^\alpha) + f_k \tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k\tau^\alpha) = \psi_k,$$

или

$$f_k = \frac{\psi_k}{\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k\tau^\alpha)} - \frac{\varphi_k \tau^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k\tau^\alpha)}{\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k\tau^\alpha)}.$$

Введем обозначения:

$$f_{k_1} = \frac{\psi_k}{\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k\tau^\alpha)}, \quad f_{k_2} = -\frac{\varphi_k \tau^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k\tau^\alpha)}{\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k\tau^\alpha)}.$$

Тогда

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} [f_{k_1} + f_{k_2}] v_k.$$

Покажем сходимость ряда (2.3). Для этого обозначим через F_n частичную сумму ряда (2.3). Тогда, в силу равенства Парсеваля, получим

$$\|F_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |f_{k_1} + f_{k_2}|^2 \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} f_{k_1}^2 + 2\sum_{k=1}^{n} f_{k_2}^2 = 2M_{1n} + 2M_{2n}. \tag{2.4}$$

Для того чтобы оценить M_{in}, $(i = 1, 2)$, используем лемму 1.2:

$$M_{1n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi_k|^2}{\left|\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k\tau^\alpha)\right|^2} \leqslant C \sum_{k=1}^{n} \frac{|\psi_k|^2}{\left|\tau^\alpha (\lambda_k\tau^\alpha)^{-1}\Big[1 + O\big((\lambda_k\tau^\alpha)^{-1}\big)\Big]\right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k^2 |\psi_k|^2}{\left|1 + O\big((\lambda_k\tau^\alpha)^{-1}\big)\right|^2} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^2 |\psi_k|^2,$$

$$M_{2n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k|^2 \tau^{2(1-\beta)(\alpha-1)} \left|E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-\lambda_k\tau^\alpha)\right|^2}{\tau^{2\alpha}\left|E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k\tau^\alpha)\right|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k|^2 \tau^{2(1-\beta)(\alpha-1)} \left|\frac{1}{1+\lambda_k\tau^\alpha}\right|^2}{\tau^{2\alpha}(\lambda_k\tau^\alpha)^{-2}\Big(1 + O\big((\lambda_k\tau^\alpha)^{-1}\big)\Big)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{|\varphi_k|^2 \frac{1}{\lambda_k^2\tau^{2\alpha}}}{\tau^{2(1-\beta+\alpha\beta)}(\lambda_k\tau^\alpha)^{-2}\Big(1 + O\big((\lambda_k\tau^\alpha)^{-1}\big)\Big)^2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_2}{\tau^{2(1-\beta+\alpha\beta)}} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^2.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим

$$M_{1n} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\psi_k|^2, \qquad M_{2n} \leqslant C_\tau \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2.$$

Из этих оценок и (2.4) следует сходимость ряда (2.3) при условии $\varphi \in H$, $\psi \in D(A)$. Отсюда вытекает существование элемента $f \in H$, определяемого рядом (2.3). Тот факт, что функция, определенная равенством (2.2), удовлетворяет всем условиям определения 0.2, доказывается теперь так же, как и в теореме 1.1.

Единственность. Предположим, что данная задача имеет два решения $\{u_1(t), f_1\}$ и $\{u_2(t), f_2\}$. Докажем, что $u(t) = u_1(t) - u_2(t) = 0$ и $f = f_1 - f_2 = 0$. Используя линейность условий задачи, для определения $u(t)$ и f имеем:

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u(t) + Au(t) = f, \quad 0 < t \leqslant T; \\ \lim_{t\to+0} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u(t) = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$u(\tau) = 0. \tag{2.6}$$

Пусть $u(t)$ является решением данной задачи. Введем обозначение $u_k(t) = (u(t), v_k)$. Тогда из уравнения (2.5) и самосопряжённости оператора A будем иметь

$$D_t^{\alpha,\beta} u_k(t) = D_t^{\alpha,\beta}(u(t), v_k) = -(Au(t), v_k) + (f, v_k) = -(u(t), Av_k) + (f, v_k) = \\ = -(u(t), \lambda_k v_k) + f_k = -\lambda_k (u(t), v_k) + f_k = -\lambda_k u_k(t) + f_k.$$

Используя условие (2.5), получим

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u_k(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k, \quad 0 < t \leqslant T, \\ \lim\limits_{t\to+0} I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u_k(t) = 0. \end{cases}$$

Решение данной задачи имеет вид (см. [9]):

$$u_k(t) = f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha).$$

Применяя условие (2.6), имеем

$$u_k(\tau) = f_k \tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k \tau^\alpha) = 0.$$

Так как $\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k \tau^\alpha) \neq 0$, то $f_k = 0$ для всех $k \geqslant 1$.

Отсюда следует, что $u_k(t) = 0$ для всех k. Из полноты системы собственных функций $\{v_k\}$ будем иметь $f \equiv 0$ и $u(t) \equiv 0$. Теорема 2.1 полностью доказана. □

Замечание. В случае уравнения Римана–Лиувилля (т. е. $\beta = 0$) формула для f в теореме 2.1 совпадает с результатом работы [17]. Поскольку в данной работе рассматривается классическое решение, в ней соответствующие классы для функций φ и ψ отличаются от наших. Если производная совпадает с производной Капуто (т. е. $\beta = 1$), то формула для f совпадает с аналогичной формулой в работе [18]. Здесь следует отметить, что в теореме 2.1 существование функции f было доказано для всех функций φ из H, а в работе [18] только для функций φ из $D(A)$.

Пример. Рассмотрим следующую задачу

$$\begin{cases} D_t^{\alpha,\beta} u(x,t) - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0; \\ u(0,t) = 0; \\ u(1,t) = 0; \\ \lim\limits_{t\to+0} \left(I^{(1-\beta)(1-\alpha)} u\right)(x,t) = \varphi(x). \end{cases} \tag{2.7}$$

В качестве дополнительного условия возьмем следующее

$$u(x,\tau) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 < \tau \leqslant T, \tag{2.8}$$

где $\psi(x) \in L_2(0,1)$, а τ — фиксированная точка. Пусть $A = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ и

$$D(A) = \{h\colon h \in W_2^2(0,1),\ h(0) = h(1) = 0\}.$$

Тогда оператор A имеет полную ортогональную систему собственных функций $\{\sin \pi k x\}$ в $L_2(0,1)$ с положительными собственными значениями $\lambda_k = (\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$.

Если $0 < \alpha < 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\varphi \in L_2(0,1)$, $\psi \in D(A)$, тогда, в силу теоремы 2.1, обратная задача (2.7), (2.8) имеет решение

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\varphi_k t^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}(-(\pi k)^2 t^\alpha) + f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-(\pi k)^2 t^\alpha)\right) \sin \pi k x,$$

где

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \sin \pi k x \, dx,$$

$$f_k = \frac{\psi_k}{\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}\left(-(\pi k)^2 \tau^\alpha\right)} - \frac{\varphi_k \tau^{(1-\beta)(\alpha-1)} E_{\alpha,\alpha+\beta(1-\alpha)}\left(-(\pi k)^2 \tau^\alpha\right)}{\tau^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}\left(-(\pi k)^2 \tau^\alpha\right)}$$

и

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k \sin \pi k x.$$

Авторы выражают благодарность Министерству высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за финансовую поддержку (грант № F-FA-2021-424). Авторы также благодарны анонимному рецензенту журнала за его/ее комментарии, которые значительно улучшили содержание этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. Singapore: World Scientific, 2000. https://doi.org/10.1142/3779
2. Hilfer R. Threefold introduction to fractional derivatives // Anomalous transport: foundations and applications. Weinheim: Wiley, 2007. P. 17–73. https://doi.org/10.1002/9783527622979.ch2
3. Gorenflo R., Kilbas A., Mainardi F., Rogosin S. Mittag–Leffler functions, related topics and applications. New York: Springer, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2
4. Lizama C. Abstract linear fractional evolution equations // Handbook of fractional calculus with applications. Vol. 2. Fractional differential equations. Berlin–Boston: De Gruyter, 2019. P. 465–497. https://doi.org/10.1515/9783110571660-021
5. Podlubny I. Fractional differential equations. San Diego: Academic Press, 1999.
6. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005.
7. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. https://zbmath.org/0154.37702
8. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.
9. Hilfer R., Luchko Yu., Tomovski Ž. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2009. Vol. 12. No. 3. P. 299–318. https://www.researchgate.net/publication/228746820
10. Tomovski Ž., Hilfer R., Srivastava H. M. Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag–Leffler type functions // Integral Transforms and Special Functions. 2010. Vol. 21. Issue 11. P. 797–814. https://doi.org/10.1080/10652461003675737

11. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
12. Liu Yikan, Li Zhiyuan, Yamamoto Masahiro. Inverse problems of determining sources of the fractional partial differential equations // Handbook of fractional calculus with applications. Vol. 2. Fractional differential equations. Berlin–Boston: De Gruyter, 2019. P. 411–430. https://doi.org/10.1515/9783110571660-018
13. Karimov E. T., Turdiev Kh. N. Direct and inverse source problems for sub-diffusion equation involving generalized Hilfer derivative with a non-classical boundary condition // Bulletin of the Institute of Mathematics. 2022. Vol. 5. No. 5. P. 53–59.
14. Karimov E. T., Toshtemirov B. H. Non-local boundary value problem for a mixed-type equation involving the bi-ordinal Hilfer fractional differential operators // Uzbek Mathematical Journal. 2021. Vol. 65. Issue 2. P. 61–77. https://doi.org/10.29229/uzmj.2021-2-5
15. Furati Kh. M., Iyiola O. S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion // Applied Mathematics and Computation. 2014. Vol. 249. P. 24–31. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.046
16. Malik S. A., Aziz S. An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions // Computers and Mathematics with Applications. 2017. Vol. 73. Issue 12. P. 2548–2560. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.03.019
17. Ашуров Р. Р., Мухиддинова А. Т. Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии // Дифференциальные уравнения. 2020. Т. 56. № 12. С. 1596–1609. https://doi.org/10.1134/S0374064120120043
18. Orlovsky D. G. Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1205. 012042. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1205/1/012042
19. Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B. T. Inverse source problems for positive operators. I: Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2019. Vol. 27. Issue 6. P. 891–911. https://doi.org/10.1515/jiip-2019-0031
20. Fedorov V. E., Kostić M. Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov–Caputo derivative // Differential Equations. 2020. Vol. 56. No. 12. P. 1613–1627. https://doi.org/10.1134/S00122661200120101
21. Orlovsky D., Piskarev S. Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. 2020. Vol. 30. Issue 2. P. 221–237. https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0094
22. Fedorov V. E., Nazhimov R. R. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative // Fractional Calculus and Applied Analysis. 2019. Vol. 22. Issue 2. P. 271–286. https://doi.org/10.1515/fca-2019-0018
23. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case // Mathematical Methods in the Applied Sciences. 2021. Vol. 44. Issue 15. P. 11961–11969. https://doi.org/10.1002/mma.6794
24. Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., Avilovich A. S. Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43. Issue 11. P. 3125–3141. https://doi.org/10.1134/S1995080222140116
25. Ashurov R. R., Fayziev Yu. E. Determination of fractional order and source term in a fractional subdiffusion equation // Eurasian Mathematical Journal. 2022. Vol. 13. No. 1. P. 19–31. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2022-13-1-19-31

Поступила в редакцию 07.03.2024

Принята к публикации 05.06.2024

Ашуров Равшан Раджабович, д. ф.-м. н., профессор, зав. лабораторией, Институт математики Академии наук Узбекистана, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 9;
Ташкентский университет прикладных наук, 100149, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Гавхар, 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5130-466X
E-mail: ashurovr@gmail.com

Файзиев Юсуф Эргашевич, д. ф.-м. н., доцент, Национальный университет Узбекистана, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, Студенческий городок;
Университет точных и социальных наук, Узбекистан, Ташкентский район, Кизгалдок, ул. Халка йули.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8361-2525
E-mail: fayziev.yusuf@mail.ru

Тухтаева Нозима Махмуд кизи, Институт математики Академии наук Узбекистана, 100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, 9.
E-mail: nozimatoxtayeva3715@gmail.com

Цитирование: Р. Р. Ашуров, Ю. Э. Файзиев, Н. М. Тухтаева. Прямая и обратная задачи для дифференциального уравнения дробного порядка по Хильферу // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2024. Т. 34. Вып. 2. С. 167–181.

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
MATHEMATICS 2024. Vol. 34. Issue 2. Pp. 167–181.

R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziev, N. M. Tukhtaeva

Direct and inverse problems for the Hilfer fractional differential equation

Keywords: Cauchy problems, Hilfer derivatives, subdiffusion equation, inverse problems.

MSC2020: 35R11, 34A12

DOI: 10.35634/vm240201

The article studies direct and inverse problems for subdiffusion equations involving a Hilfer fractional derivative. An arbitrary positive self-adjoint operator A is taken as the elliptic part of the equation. In particular, as the operator A we can take the Laplace operator with the Dirichlet condition. First, the existence and uniqueness of a solution to the direct problem is proven. Then, using the representation of the solution to the direct problem, the existence and uniqueness of the inverse problem of finding the right-hand side of the equation, which depends only on the spatial variable, is proved.

REFERENCES

1. Hilfer R. *Applications of fractional calculus in physics*, Singapore: World Scientific, 2000. https://doi.org/10.1142/3779
2. Hilfer R. Threefold introduction to fractional derivatives, *Anomalous Transport: Foundations and Applications*, Weinheim: Wiley, 2007, pp. 17–73. https://doi.org/10.1002/9783527622979.ch2
3. Gorenflo R., Kilbas A., Mainardi F., Rogosin S. *Mittag–Leffler functions, related topics and applications*, New York: Springer, 2014. https://doi.org/10.1007/978-3-662-43930-2
4. Lizama C. Abstract linear fractional evolution equations, *Handbook of fractional calculus with applications. Vol. 2. Fractional differential equations*, Berlin–Boston: De Gruyter, 2019. P. 465–497. https://doi.org/10.1515/9783110571660-021
5. Podlubny I. *Fractional differential equations*, San Diego: Academic Press, 1999.
6. Pskhu A. V. *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka* (Fractional partial differential equations), Moscow: Nauka, 2005.
7. Dzhrbashyan M. M. *Integral'nye preobrazovaniya i predstavlenie funktsii v kompleksnoi oblasti* (Integral transforms and representation of functions in the complex domain), Moscow: Nauka, 1966. https://zbmath.org/0154.37702
8. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam: Elsevier, 2006.
9. Hilfer R., Luchko Yu., Tomovski Ž. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann–Liouville fractional derivatives, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2009, vol. 12, no. 3, pp. 299–318. https://www.researchgate.net/publication/228746820
10. Tomovski Ž., Hilfer R., Srivastava H. M. Fractional and operational calculus with generalized fractional derivative operators and Mittag–Leffler type functions, *Integral Transforms and Special Functions*, 2010, vol. 21, issue 11, pp. 797–814. https://doi.org/10.1080/10652461003675737
11. Kabanikhin S. I. *Inverse and ill-posed problems: Theory and applications*, Berlin–Boston: De Gruyter, 2011. https://doi.org/10.1515/9783110224016
12. Liu Yikan, Li Zhiyuan, Yamamoto Masahiro. Inverse problems of determining sources of the fractional partial differential equations, *Handbook of fractional calculus with applications. Vol. 2. Fractional differential equations*, Berlin–Boston: De Gruyter, 2019, pp. 411–430. https://doi.org/10.1515/9783110571660-018
13. Karimov E. T., Turdiev Kh. N. Direct and inverse source problems for sub-diffusion equation involving generalized Hilfer derivative with a non-classical boundary condition, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2022, vol. 5, no. 5, pp. 53–59.
14. Karimov E. T., Toshtemirov B. H. Non-local boundary value problem for a mixed-type equation involving the bi-ordinal Hilfer fractional differential operators, *Uzbek Mathematical Journal*, 2021, vol. 65, issue 2, pp. 61–77. https://doi.org/10.29229/uzmj.2021-2-5

15. Furati Kh. M., Iyiola O. S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion, *Applied Mathematics and Computation*, 2014, vol. 249, pp. 24–31. https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.10.046
16. Malik S. A., Aziz S. An inverse source problem for a two parameter anomalous diffusion equation with nonlocal boundary conditions, *Computers and Mathematics with Applications*, 2017, vol. 73, issue 12, pp. 2548–2560. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.03.019
17. Ashurov R. R., Mukhiddinova A. T. Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, issue 12, pp. 1550–1563. https://doi.org/10.1134/S00122661200120046
18. Orlovsky D. G. Determination of the parameter of the differential equation of fractional order with the Caputo derivative in Hilbert space, *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1205, 012042. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1205/1/012042
19. Ruzhansky M., Tokmagambetov N., Torebek B. T. Inverse source problems for positive operators. I: Hypoelliptic diffusion and subdiffusion equations, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2019, vol. 27, issue 6, pp. 891–911. https://doi.org/10.1515/jiip-2019-0031
20. Fedorov V. E., Kostić M. Identification problem for strongly degenerate evolution equations with the Gerasimov–Caputo derivative, *Differential Equations*, 2020, vol. 56, issue 12, pp. 1613–1627. https://doi.org/10.1134/S00122661200120101
21. Orlovsky D., Piskarev S. Inverse problem with final overdetermination for time-fractional differential equation in a Banach space, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, 2020, vol. 30, issue 2, pp. 221–237. https://doi.org/10.1515/jiip-2020-0094
22. Fedorov V. E., Nazhimov R. R. Inverse problems for a class of degenerate evolution equations with Riemann–Liouville derivative, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2019, vol. 22, issue 2, pp. 271–286. https://doi.org/10.1515/fca-2019-0018
23. Fedorov V. E., Nagumanova A. V., Avilovich A. S. A class of inverse problems for evolution equations with the Riemann–Liouville derivative in the sectorial case, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2021, vol. 44, issue 15, pp. 11961–11969. https://doi.org/10.1002/mma.6794
24. Fedorov V. E., Ivanova N. D., Borel L. V., Avilovich A. S. Nonlinear inverse problems for fractional differential equations with sectorial operators, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2022, vol. 43, issue 11, pp. 3125–3141. https://doi.org/10.1134/S1995080222140116
25. Ashurov R. R., Fayziev Yu. E. Determination of fractional order and source term in a fractional subdiffusion equation, *Eurasian Mathematical Journal*, 2022, vol. 13, no. 1, pp. 19–31. https://doi.org/10.32523/2077-9879-2022-13-1-19-31

Received 07.03.2024

Accepted 05.06.2024

Ravshan Radjabovich Ashurov, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Laboratory, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 9, Tashkent, 100174, Uzbekistan;
Tashkent University of Applied Sciences, ul. Gavhar, 1, Tashkent, 100149, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5130-466X
E-mail: ashurovr@gmail.com

Yusuf Ergashevich Fayziev, Doctor of Physics and Mathematics, Associate Professor, National University of Uzbekistan, VUZ Gorodok, Tashkent, 100174, Uzbekistan;
University of Exact and Social Sciences, ul. Khalka Yoli, Kizgaldok, Tashkent district, Uzbekistan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8361-2525
E-mail: fayziev.yusuf@mail.ru

Nozima Makhmud qizi Tukhtaeva, Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, ul. Universitetskaya, 9, Tashkent, 100174, Uzbekistan.
E-mail: nozimatoxtaeva3715@gmail.com

Citation: R. R. Ashurov, Yu. E. Fayziev, N. M. Tukhtaeva. Direct and inverse problems for the Hilfer fractional differential equation, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2024, vol. 34, issue 2, pp. 167–181.