Решения задач М2490–М2492, Ф2497–Ф2500, *Квант*, 2018, номер 3, 20–24

Рис. 2

ном расходе воды Q_0 (в л/с) вся вода будет попадать в бутылку? Ускорение свободного падения $g = 9{,}8\ м/с^2$. Считать течение воды спокойным (ламинарным). Влиянием воздуха, вытесняемого из бутылки в процессе ее заполнения водой, пренебречь.[1]

Д.Медведев

Ф2511. Имеются 10 одинаковых флаконов с жидкостью. Они хранятся внутри ящика, из которого тепло наружу не выходит. Для лучшего хранения каждый флакон надо на некоторое время нагреть до температуры $+90\ °C$. Для этого взяли первый флакон и нагрели его до нужной температуры, затратив на это количество теплоты $Q = 30$ кДж. Затем поставили его внутрь ящика и подождали, пока температуры всех флаконов не выровнялись за счет теплообмена. Затем взяли второй флакон и проделали с ним ту же самую процедуру, включая последующее выравнивание температур, и так далее. Какое количество теплоты потребуется для прогрева десятого флакона?

В.Боровков

Ф2512. Деревянный сосуд цилиндрической формы (рис.3) плавает в воде, погрузившись на 0,2 своей высоты, когда он пустой, и на 0,95 высоты, когда он заполнен водой. Во сколько раз плотность дерева, из которого изготовлен сосуд, меньше плотности воды?

В.Баткин

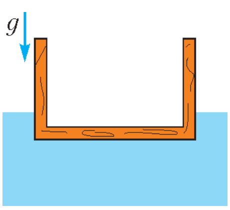

Рис. 3

Решения задач М2490–М2492, Ф2497–Ф2500

М2490. *Было 100 дверей, у каждой свой ключ (отпирающий только эту дверь). Двери пронумерованы числами 1, 2, … …, 100, ключи тоже пронумерованы, но, возможно, с ошибками: номер ключа совпадает с номером двери или отличается на 1. За одну попытку можно выбрать любой ключ, любую дверь и проверить, подходит ли этот ключ к этой двери. Можно ли гарантированно узнать, какой ключ какую дверь открывает, сделав не более: а) 99 попыток; б) 75 попыток; в) 74 попыток?*

Ответ. а), б) Можно; в) нельзя.

а) Попробуем, подходит ли первый ключ к первой двери. Если да, то первый ключ *опознан.* Если нет, то он подходит ко второй двери, а к первой двери подходит второй ключ. В этом случае опознаны два ключа. Берем очередной слева неопознанный ключ, проверяем его на соответствующей ему двери, распознаем хотя бы один ключ. Если после 99 таких попыток останется нераспознанное, то это последний ключ и для него осталась только одна дверь.

б) Попробуем, подходит ли третий ключ к третьей двери. Если он подходит, то с первыми двумя ключами мы сможем разобраться за одну попытку. Итого за две попытки опознаны первые три ключа.

Если он не подошел, то попробуем, подходит ли он ко второй двери. Если да, то первый ключ может подойти только к первой двери, а второй – к третьей. Опять за две попытки опознаны три первых ключа. Если снова не подошел, то он подходит к четвертой двери. Первые два ключа могут обслужить только две двери, следовательно, третью дверь открывает четвертый ключ. С первыми двумя ключами и дверьми разберемся за одну попытку. В этом случае за три попытки опознаны четыре ключа.

Повторяем процесс: пробуем третий слева неопознанный ключ к соответствующей двери. Распознаем за две попытки три ключа или за три попытки четыре ключа. Если мы уже не можем выполнить этот шаг, то осталось менее трех нераспознанных ключей. С двумя ключами разберемся за одну попытку, с одним – за ноль попыток.

[1] Например, потому, что в боковой стенке бутылки имеется отверстие для выпуска воздуха. *(Прим. ред.)*

Поскольку каждый раз количество попыток не превосходило 3/4 распознаваемых дверей, то всего попыток будет не более 75.

в) Предположим, что Хвастун умеет это делать за 74 попытки. Разобьем двери и ключи на 25 подряд идущих четверок. Облегчим Хвастуну задачу. Будем предлагать ему только такие расположения ключей, в которых ключи не могут открывать двери из других четверок, и сообщим Хвастуну об этом. Тогда бессмысленно будет пробовать ключ к двери из другой четверки, и у Хвастуна все равно есть стратегия за 74 попытки. По этой стратегии в какой-то четверке он делает не более двух попыток. У пары попыток есть лишь четыре различных исхода, и для каждого из них Хвастун указывает какое-то расположение ключей в четверке. Но вариантов соответствия четырех ключей и четырех дверей больше: (1234), (2134), (1324), (1243), (2143). Противоречие.

А.Лебедев, А.Шаповалов

М2491. *Кусок сыра надо разрезать на части с соблюдением таких правил: 1) вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем еще на 2 куска, затем один из трех кусков опять режем на 2 куска и т.д.; 2) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение веса любой части к весу любой другой должно быть строго больше заданного числа R.*

а) Докажите, что при R = 0,5 можно резать сыр так, что процесс никогда не остановится (после любого числа разрезаний можно будет отрезать еще один кусок).

б) Докажите, что если R > 0,5, то процесс резки когда-нибудь остановится.

в) На какое наибольшее число кусков можно разрезать сыр, если R = 0,6?

г) Докажите, что если при данном R сыр можно разрезать на 11 кусков, то его также можно разрезать и на 12 кусков.

Решение – в статье А.Толпыго «Как разрезать сыр?»

М2492. *В неравнобедренном треугольнике ABC проведены медианы AA_0, BB_0, CC_0 и высоты AA_1, BB_1, CC_1. Пусть A_2 – точка пересечения окружностей, описанных около треугольников BA_1B_0 и CA_1C_0, отличная от точки A_1. Аналогично определим точки B_2 и C_2. Докажите, что прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в одной точке.*

Применим следующее преобразование: сначала выполним инверсию относительно окружности с центром в точке B радиуса $\sqrt{\dfrac{AB \cdot BC}{2}}$, а затем – симметрию относительно биссектрисы угла B. При таком преобразовании A перейдет в A_0 (и наоборот), C – в C_0. Основание высоты B_1 перейдет в точку X, для которой $\Delta BAB_1 \sim \Delta BA_0X$, $\Delta BCB_1 \sim \Delta BC_0X$. Отсюда $XA_0 \perp BC$, $XC_0 \perp BA$, т.е. X совпадает с центром O описанной окружности треугольника ABC. Тогда интересующие нас описанные окружности треугольников AB_1A_0 и CB_1C_0 перейдут в описанные окружности треугольников A_0OA и C_0OC (рис.1), а точка B_2 переходит во вторую

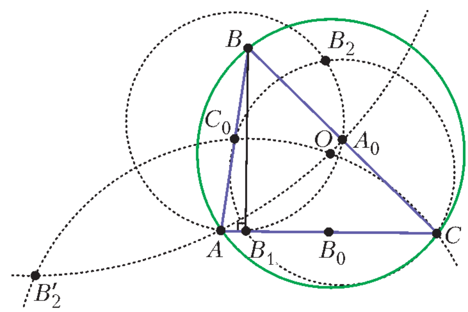

Рис. 1

(отличную от O) точку пересечения этих окружностей; назовем эту точку B_2'. Аналогично определим A_2' и C_2'. Заметим, что прямые BB_2 и BB_2' симметричны относительно биссектрисы угла B и аналогичное утверждение верно для пар прямых AA_2 и AA_2', CC_2 и CC_2', поэтому достаточно показать, что прямые AA_2', BB_2', CC_2' пересекаются в одной точке; тогда прямые AA_2, BB_2, CC_2 будут пересекаться в изогонально сопряженной точке.

Покажем, что на самом деле $A_2' = B_2' = C_2'$, или, эквивалентно, что центры окружностей A_0OA, B_0OB и C_0OC лежат на одной прямой (тогда помимо точки O эти окружности действительно имеют еще одну общую точку – симметричную точке O относительно линии центров). Центр описанной окружности треугольника B_0OB лежит на пересечении серединных перпендикуляров к отрезкам OB и OB_0 (рис.2).

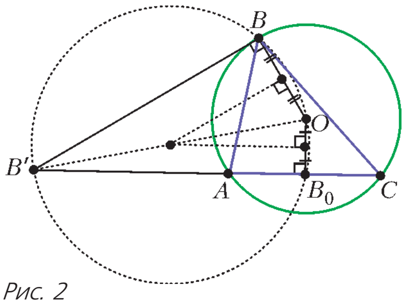

Рис. 2

Гомотетия с центром O и коэффициентом 2 переведет центр окружности B_0OB в точку B' пересечения AC и касательной к окружности, описанной около треугольника ABC, проведенной через точку B. Аналогично определяются точки A' и C'. Нам остается доказать, что точки A', B' и C' лежат на одной прямой.

Это можно сделать разными способами. Например, это следует из вырожденного случая теоремы Паскаля (для шестерки точек A, A, B, B, C, C). Другой способ – рассмотреть треугольник, образованный касательными AA', BB', CC', и применить теорему Дезарга к этому треугольнику и треугольнику ABC. Задача решена.

В заключение заметим, что задача может быть решена и вычислительно (например, с помощью теоремы Чевы в форме синусов), правда, совсем простого решения нам не известно. В качестве упражнения предлагаем доказать, что для равнобедренного (но не равностороннего треугольника) прямые AA_2, BB_2, CC_2 пересекаются в точке, симметричной точке пересечения медиан относительно основания.

Т.Ковалев, А.Львов

Ф2497. *В журнале «Физика в школе» было опубликовано такое условие задачи: «Свободно падающее с ускорением $g = 10$ м/с^2 тело спустя некоторое время после начала движения оказывается на высоте $h_1 = 300$ м над землей, а еще через время $\Delta t = 10$ с – на высоте $h_2 = 120$ м над землей. С какой высоты падало тело?» И был дан такой ответ: «$H = 1531$ м». Найдите две опечатки (по одному символу в каждой) в опубликованном материале.*

Понятно, что приведенные числовые значения никоим образом друг другу не подходят. Предположим, что высоты h_1 и h_2 указаны правильные, тогда время Δt никак не может быть равным 10 с. А вот если предположить, что в числе для Δt между символами «1» и «0» пропущена запятая, т.е. время равно точно 1,0 с, тогда ответ должен получиться 1831 м. Ну вот, и вторая опечатка найдена: начальная высота приблизительно равна не 1531 м, а 1831 м! Иными словами, вместо символа «8» был ошибочно поставлен символ «5».

У.Страшнов

Ф2498. *Стенки пластиковой бутылки от сильно газированного напитка могут выдержать давление (изнутри) $p = 10$ атм. В такую бутылку емкостью $V = 1$ л налили $V/2$ жидкого азота, закрыли бутылку пробкой и положили на асфальт, накрыв бутылку сверху пустым жестяным ведром емкостью 10 л и массой 1 кг. Через некоторое время произошел взрыв. Ведру достался 1% внутренней энергии газа внутри бутылки до взрыва. Оцените высоту подъема ведра над местом старта. Температура кипения жидкого азота при давлении $p = 10$ атм равна примерно $T = 100$ К. Плотность ρ жидкого азота примерно равна плотности воды $\rho_в = 1$ г/см^3.*

Будем считать, что весь кислород, который входил в состав воздуха в бутылке, сконденсировался и в газообразном состоянии в бутылке в объеме 0,5 литра перед взрывом находился только азот. Этот азот после заливки в бутылку жидкого азота, естественно, охладился, и его вклад в суммарное давление перед взрывом был меньше атмосферного, поэтому этим вкладом можно пренебречь. Сжимаемостью жидкого азота тоже можно пренебречь. Оценим объем ΔV жидкого азота, который перешел в газообразное состояние, чтобы создать в бутылке давление 10 атм:

$$p\left(0,5V + \Delta V\right) = \frac{\rho \Delta V}{\mathrm{M}} RT,$$

откуда

$$\Delta V = \frac{V}{2} \frac{1}{\frac{\rho RT}{\mathrm{M}p} - 1} = 0,035\frac{V}{2}.$$

Таким образом, объем газа в бутылке перед взрывом был равен

$$V_{\text{газа}} = 0,5175 \text{ л}.$$

Азот – двухатомный газ, поэтому внутренняя энергия газообразного азота внутри бутылки перед взрывом равна

$$U = \frac{5}{2} pV_{\text{газа}} \approx 1,3 \text{ кДж}.$$

По условию, 1% этой энергии превратился в кинетическую энергию ведра. Отсюда находим максимальную высоту ведра над уровнем старта:

$$H = \frac{0,01 \cdot 1,3 \text{ кДж}}{1 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 1,3 \text{ м}.$$

Поскольку эксперимент с такой бутылкой дает высоту подъема ведра около 10 метров, это означает, что ведру на самом деле достается не 1% внутренней энергии газа, а примерно 8%.

А.Зотов

Ф2499. *Длина круговой траектории протонов в Большом адронном коллайдере (БАК) равна L = 26659 м. Индукция магнитного поля, направленного перпендикулярно плоскости траектории, равна B = 7,5 Тл. Вычислите разницу между скоростью света и скоростью протонов в коллайдере.*

Протоны в коллайдере движутся со скоростями, сравнимыми со скоростью света c. Согласно специальной теории относительности Эйнштейна, в таком случае связь между импульсом и скоростью частицы дается соотношением

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

где m_0 называют массой покоя, а массу m движущейся частицы определяют как зависящий от скорости коэффициент пропорциональности между p и v:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Обозначим величину, которую нужно найти, через Δv, тогда $v + \Delta v = c$. Понятно, что $\Delta v/c \ll 1$. На движущийся по окружности радиусом $R = L/(2\pi)$ протон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца, равная $F = qvB$. Запишем закон движения протона:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{v^2}{R} = qvB, \text{ или}$$

$$\frac{m_0 c\left(c - \Delta v\right)}{\sqrt{2c\Delta v - \Delta v^2}} = BRq, \text{ или}$$

$$\left(\frac{m_0 c}{BRq}\right)^2 \left(1 - 2\frac{\Delta v}{c} + \frac{\Delta v^2}{c^2}\right) = 2\frac{\Delta v}{c} - \frac{\Delta v^2}{c^2}.$$

Можно, конечно, и честно решить это квадратное относительно Δv уравнение, но поскольку $\Delta v/c \ll 1$, то его можно переписать в виде

$$\left(\frac{2\pi m_0 c}{LBq}\right)^2 = 2\frac{\Delta v}{c}.$$

Отсюда находим

$$\Delta v = \frac{c}{2}\left(\frac{2\pi m_0 c}{LBq}\right)^2 \approx 1,4 \text{ м/с}.$$

С.Дмитриев

Ф2500. *Сплошной прозрачный цилиндр, изготовленный из материала, коэффициент преломления которого зависит от расстояния r между местом в цилиндре и его осью симметрии по «закону»*

$$n = 1 + \left(n_0 - 1\right) \cdot \left(1 - \left(r/r_0\right)^2\right).$$

Здесь r_0 – это радиус цилиндра, $n_0 = 1,2$. Узкий луч лазера падает перпендикулярно на торец цилиндра в направлении, параллельном оси цилиндра, в точку, расположенную на расстоянии $r_0/10$ от оси цилиндра. По какой траектории движется лазерный луч внутри цилиндра?

Как следует из условия, падающий луч света и ось симметрии цилиндра лежат в одной плоскости, и это останется справедливым для всей траектории луча света внутри цилиндра. В этой плоскости луч света не будет прямолинейным. Если рассмотреть два соседних очень тонких слоя прозрачного материала, которые пересекаются лучом света под некоторыми небольшими углами dr/dx с поверхностью раздела, то из закона преломления света следует условие $n(r)\cdot\sin(\pi/2 - dr/dx) = = \text{const}$. Минимальное значение $\sin(\pi/2 - dr/dx)$ достигается в тот момент, когда луч света пересекает ось цилиндра. При этом $\sin(\pi/2 - dr/dx) = 0{,}9983(3)$ и $dr/dx = 0{,}05774\ldots$ При таком малом значении угла (dr/dx) можно синус угла $(\pi/2 - dr/dx)$ представить в виде

$$\sin(\pi/2 - dr/dx) = \sqrt{1-\cos^2(dr/dx)} = = 1 - (dr/dx)^2/2.$$

В результате из закона преломления следует такое равенство:

$$\left(1 + (n_0-1)\cdot\left(1-(r/r_0)^2\right)\right)\cdot\left(1-(dr/dx)^2/2\right) = = \text{const}.$$

Раскрыв скобки, получаем

$$(n_0-1)\cdot(r/r_0)^2 + n_0\cdot(dr/dx)^2/2 - - (n_0-1)\cdot(r/r_0)^2\cdot(dr/dx)^2/2 = \text{const}.$$

Третье слагаемое представляет собой произведение двух очень малых величин, и этим третьим слагаемым можно пренебречь. Тогда имеем

$$(n_0-1)\cdot(r/r_0)^2 + n_0\cdot(dr/dx)^2/2 = \text{const}.$$

Продифференцируем полученное соотношение по координате x:

$$2r\cdot(dr/dx)\cdot(n_0-1)\cdot(1/r_0)^2 + + n_0\cdot(dr/dx)\cdot\left(d_2r/dx^2\right) = 0.$$

Разделим оба слагаемых на одинаковый множитель $n_0(dr/dx)$:

$$2r\cdot(1-1/n_0)\cdot(1/r_0)^2 + \left(d_2r/dx^2\right) = 0.$$

Получено уравнение второго порядка, аналогичное уравнению гармонических колебаний, только в роли координаты «время» в этом уравнении выступает координата «x». Решение этого уравнения – гармоническая функция расстояния r от координаты x:

$$r(x) = (r_0/10)\cdot\cos\left((x/r_0)\cdot\sqrt{2-2/n_0}\right).$$

С.Муравьев

Как разрезать сыр?

А.Толпыго

Эта статья посвящена обсуждению и решению задачи М2491 «Задачника «Кванта».

Мы будем решать следующую задачу: требуется разрезать головку сыра на некоторое (по возможности большее) число кусков. При этом должны соблюдаться следующие правила: (i) мы вначале режем сыр на 2 куска, затем один из них режем на 2 части, потом одну из трех частей опять режем на 2 части и так далее; (ii) после каждого разрезания части могут быть разными по весу, но отношение весов любых двух частей должно быть больше заданного числа R. В этом случае мы будем говорить, что сыр резали *правильно*.

Очевидно, прежде всего, что интересны только случаи, когда заданное число R находится в пределах от $1/2$ до 1. В самом деле, если $R \geq 1$, то сыр нельзя разрезать даже на две части (ибо каждая обязана быть строго больше другой), тогда как при $R < 1/2$ резать можно неограниченно: разрежем сыр пополам, потом каждую часть (по очереди) пополам, затем каждую четвертушку пополам и так далее. Соответственно, дальше мы всюду будем считать, что $1/2 \leq R < 1$.

Рассмотрим для начала случай $R = 1/2$. Здесь уже все не так ясно: если разрезать сыр точно пополам, то после этого уже ничего сделать будет нельзя: разрезав одну