Л. А. Аксентьев, Ю. А. Решетников, Монотонность средних значений субгармонических функций в кольце,
Матем. заметки, 1980, том 27, выпуск 5, 813–823

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 27, № 5 (1980)

МОНОТОННОСТЬ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В КОЛЬЦЕ

Л. А. Аксентьев, Ю. А. Решетников

Пусть $T(z)$ — субгармоническая функция в области D комплексного переменного $z = \rho e^{i\theta}$. Тогда ее среднее значение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(\rho e^{i\theta})\, d\theta = I(\rho)$$

является неубывающей функцией, если D — круг $\rho < 1$, и выпуклой функцией относительно $\ln \rho$ в случае, когда D — кольцо $q < \rho < 1$ [1, § 8]. В работе приведены достаточные условия монотонности $I(\rho)$ в кольце $E(q, 1) = \{z: q < |z| < 1\}$ для некоторых подклассов субгармонических функций, связанных с регулярными функциями $f(z)$ в $E(q, 1)$. В качестве следствия получено одно необходимое условие однолистности функции $f(z)$.

Результаты статьи, касающиеся регулярных функций $f(z)$ и гармонических функций $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$, были доложены на V Донецком коллоквиуме по квазиконформным отображениям (сентябрь 1976 года).

§ 1. Имеет место следующее обобщение утверждений Правица, изложенных в монографии И. М. Милина [2, стр. 18—21].

ТЕОРЕМА 1. *Пусть регулярная в* $E(q, 1)$ *функция* $f(z) = Re^{i\Phi}$ *преобразует окружность* $C_q = \{z: |z| = q\}$ *в кривую Жордана и* $\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} d \arg f(\rho e^{i\theta}) \geqslant 0$, $q < \rho < 1$. *Пусть, кроме того, функция* $\Omega(R)$ *такова, что* $R\Omega'(R)$ — *неотрицательная, возрастающая функция от* R *в* *интервале* $(\inf |f(z)|, \sup |f(z)|)$ *и* $\Omega(|f(z)|) \in C^2(E(q, 1))$. *Тогда функция*

$$I(\rho) = \int_0^{2\pi} \Omega(|f(\rho e^{i\theta})|)\, d\theta \qquad (1)$$

возрастает в интервале $(q, 1)$.

Доказательство. Поскольку $\Omega(R)$— неубывающая и выпуклая функция от $\ln R$, то $\Omega(|f(z)|) = T(z)$ является субгармонической функцией (см. [3, стр. 186—187]). Значит, $I(\rho)$ вида (1) будет выпуклой функцией относительно $\ln \rho$ [1, § 8] с не более чем одним интервалом невозрастания и с не более чем одним интервалом неубывания по $\ln \rho$. Утверждение теоремы является более сильным: $I(\rho)$ в форме (1) возрастает по ρ, и поэтому участка невозрастания по $\ln \rho$ у $I(\rho)$ не будет.

Доказательство теоремы проведем по схеме доказательства теоремы из [2, стр. 19] с применением формулы Грина

$$\iint_D (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\, \rho\, d\theta\, d\rho = \int_{\partial D} \left(\psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial\psi}{\partial n}\right) ds, \qquad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, n — внутренняя нормаль в точках границы ∂D области D, функции φ и ψ принадлежат классу $C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, $\bar{D} = D \cup \partial D$.

В силу простоты образа окружности C_q и непрерывности $f(z)$ существует кольцо $E(q, q + 2\varepsilon)$, внутри которого $f(z)$ однолистна и $f(z) \neq 0$. Запишем (2) в случае $D = E(q + \varepsilon, \rho)$, $\rho < 1$, полагая $\varphi \equiv 1$, $\psi \equiv \Omega(R)$, $R = |f(z)|$,

$$\iint_{E(q+\varepsilon,\, \rho)} \Delta\Omega(R)\, \rho\, d\theta\, d\rho = \int_{C_\rho} \frac{\partial\Omega(R)}{\partial\rho}\, \rho\, d\theta - \int_{C_{q+\varepsilon}} \frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\, ds. \qquad (3)$$

Преобразуем сначала интегралы в правой части. Первый интеграл запишется так:

$$\int_{C_\rho} \frac{\partial\Omega(R)}{\partial\rho}\, \rho\, d\theta = \rho \frac{d}{d\rho} \int_0^{2\pi} \Omega(|f(\rho e^{i\theta})|)\, d\theta.$$

Для второго интеграла учтем следующие преобразования. Пользуясь в $E(q, q + \varepsilon)$ условиями Коши — Римана для функции $\ln f(\rho e^{i\theta}) = \ln |f(\rho e^{i\theta})| + i \arg f(\rho e^{i\theta})$, имеем

$$\frac{\partial\Omega(R)}{\partial\rho} = \Omega'(R)\frac{\partial R}{\partial\rho} = \Omega'(R)\frac{R}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f(\rho e^{i\theta}).$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial\Omega(R)}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=q+\varepsilon}\cdot(q+\varepsilon)\,d\theta =$$
$$= (q+\varepsilon)\int_0^{2\pi}\Omega'(R)\frac{R}{q+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\theta}\arg f[(q+\varepsilon)e^{i\theta}]\,d\theta =$$
$$= \int_{f(C_{q+\varepsilon})} R\Omega'(R)\,d\Phi,$$

где $\Phi = \arg f[(q+\varepsilon)e^{i\theta}]$ и интегрирование в последнем интеграле совершается по образу окружности $C_{q+\varepsilon} \subset \subset E(q, q+2\varepsilon)$. Поскольку $R\Omega'(R) \geqslant 0$ и возрастает, то, вводя полярную систему координат $R^* = \sqrt{2R\Omega'(R)}$, $\Phi^* = \Phi$, получим

$$\int_{C_{q+\varepsilon}}\frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\,ds = \frac{1}{2}\int_{L^*_{q+\varepsilon}} R^{*2}\,d\Phi^* = S^*_{q+\varepsilon}.$$

Здесь $S^*_{q+\varepsilon}$ — площадь конечной области, ограниченной простой кривой $L^*_{q+\varepsilon}$, образом окружности $C_{q+\varepsilon}$ в плоскости (R^*, Φ^*).

Преобразуем теперь левую часть (3). С этой целью найдем якобиан преобразования $f_*(z) = R^* e^{i\Phi^*} = \sqrt{2R\Omega'(R)}\,e^{i\Phi}$. Полагая $f_*(z) = u_*(x, y) + iv_*(x, y)$, $z = x + iy$, получим

$$\frac{D(u_*, v_*)}{D(x, y)} = R^*\left(\frac{\partial R^*}{\partial x}\frac{\partial\Phi^*}{\partial y} - \frac{\partial R^*}{\partial y}\frac{\partial\Phi^*}{\partial x}\right) =$$
$$= (\Omega'(R) + R\Omega''(R))\left(\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) =$$
$$= (\Omega'(R) + R\Omega''(R))\frac{1}{R}\frac{D(u, v)}{D(x, y)},$$

где $u = \operatorname{Re} f(z)$, $v = \operatorname{Im} f(z)$. Но $\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = |f'(z)|^2$ в силу регулярности $f(z)$; поэтому

$$\frac{D(u_*, v_*)}{D(x, y)} = \frac{1}{R}(\Omega'(R) + R\Omega''(R))\,|f'(z)|^2.$$

Далее,

$$\Delta\Omega(R) = \Omega''_{xx} + \Omega''_{yy} = \Omega''(R)(R_x'^2 + R_y'^2) + \Omega'(R)\,\Delta R.$$

Учитывая, что $R_x'^2 + R_y'^2 = |f'(z)|^2$, $\Delta R = |f'(z)|^2/R$, окончательно будем иметь

$$\Delta\Omega(R) = \left(\Omega''(R) + \frac{1}{R}\Omega'(R)\right)|f'(z)|^2 = \frac{D(u_*, v_*)}{D(x, y)},$$

причем $\Delta\Omega(R) \geqslant 0$ в силу субгармоничности $\Omega(R)$ в $E(q, 1)$.

В результате проведенных преобразований формула (3) принимает вид

$$0 \leqslant \iint_{E(q+\varepsilon, \rho)} \frac{D(u_*, v_*)}{D(x, y)} dx\, dy =$$
$$= \rho \frac{d}{d\rho} \int_0^{2\pi} \Omega(|f(\rho e^{i\theta})|)\, d\theta - S^*_{q+\varepsilon}.$$

В пределе, при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{d}{d\rho} \int_0^{2\pi} \Omega(|f(\rho e^{i\theta})|) d\theta =$$
$$= \frac{1}{\rho}\left(\iint_{E(q, \rho)} \frac{D(u_*, v_*)}{D(x, y)} dx\, dy + S^*_q\right) = \frac{1}{\rho} S^*_\rho > 0, \tag{4}$$

где S^*_ρ — площадь конечной области, ограниченной контуром L^*_ρ с уравнением $f_* = f_*(\rho e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Теорема доказана.

Как следствие теоремы 1 получается

ТЕОРЕМА 2. *Пусть регулярная в* $E(q, 1)$ *функция* $f(z)$ *преобразует окружность* C_q *в кривую Жордана и* $\int_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} d \arg f(\rho e^{i\theta}) \geqslant 0$, $q < \rho < 1$. *Тогда функция*

$$I_\alpha(\rho) = \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^\alpha d\theta, \qquad \alpha > 0, \tag{5}$$

возрастает в интервале $(q, 1)$, *если дополнительно выполняется одно из условий*: 1) $\alpha \geqslant 2$; 2) $|f(z)| > 0$, $z \in E(q, 1)$.

Для доказательства нужно положить $\Omega(R) = R^\alpha$. Каждое из условий 1), 2) теоремы 2 обеспечивает принадлежность этой функции классу $C^2(E(q, 1))$. Отметим еще, что если $f(z)$ имеет нули порядка не ниже k, то в условии 1) теоремы 2 достаточно потребовать $\alpha \geqslant 2/k$.

Замечание. Вывод теорем 1, 2 остается в силе, если условие — образ окружности C_q является кривой

Жордана — заменить следующим: площадь области, ограниченной кривой L_q^*, положительна. Действительно, формулу (4) можно представить в виде $\mathrm{d}I(\rho)/\mathrm{d}\ln\rho = S_\rho^*$. Вследствие выпуклости $I(\rho)$ относительно $\ln\rho$ площадь S_ρ^* не убывает. Поэтому, если $S_q^* > 0$, то $\frac{\mathrm{d}I(\rho)}{\mathrm{d}\rho} = \frac{1}{\rho} S_\rho^* \geqslant \frac{1}{\rho} S_q^* > 0$.

Докажем видоизменение теоремы 2, используя аппарат рядов Лорана. Введем в рассмотрение $S_\alpha(\rho)$ — площадь фигуры с ориентированной границей $w = f^{\alpha/2}(\rho e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, при фиксированном ρ с обходом в сторону роста θ.

ТЕОРЕМА 3. *Если регулярная в кольце* $E(q, 1)$ *функция* $f(z)$ *удовлетворяет условию*

$$\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \mathrm{d}\arg f(\rho e^{i\theta}) = 0, \qquad q < \rho < 1, \tag{6}$$

то величина (5) *убывает при тех* ρ, *для которых* $S_\alpha(\rho) < 0$, *и возрастает при тех* ρ, *для которых* $S_\alpha(\rho) > 0$. $I_\alpha(\rho)$ *имеет не более одного минимума именно в той точке* ρ_0, *для которой* $S_\alpha(\rho_0) = 0$, $q \leqslant \rho_0 \leqslant 1$.

Доказательство. Условие (6) означает, что

$$\underset{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}{\text{изм.}} \arg f(\rho e^{i\theta}) = 0,$$

т. е. начало координат не «окружается» кривой с уравнением $w = f(\rho\, e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Кроме того, точки 0 и ∞ не будут покрываться областью $f(E(q, 1))$ — образом кольца $E(q, 1)$ при отображении функцией $f(z)$.

Возьмем бесконечнолистную риманову поверхность функции $\mathrm{Ln}\, w$ с точками ветвления 0 и ∞. Разместим на этой поверхности область $f(E(q, 1))$ таким образом, чтобы на каждом листе изм. $\arg f \leqslant 2\pi$ вдоль участков кривых $w = f(\rho\, e^{i\theta})$ при фиксированном ρ, $q < \rho < 1$. Тогда в области $f(E(q, 1))$ можно выделить ветвь функции $\zeta = w^{\alpha/2} = \exp\left(\frac{\alpha}{2} \mathrm{Ln}\, w\right)$. При этом получим вполне определенную область — образ кольца при отображении функцией $f^{\alpha/2}(z)$. Следовательно, функция $f^{\alpha/2}(z)$ будет регулярной функцией с учетом выбранной ветви преобразования $w^{\alpha/2}$. Функция $f^{\alpha/2}(z)$ при целом $\alpha/2$ регулярна и без выполнения условия (6).

Разложим регулярную в кольце $E(q, 1)$ функцию $f^{\alpha/2}(z)$ в ряд Лорана

$$f^{\alpha/2}(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\alpha) z^k=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\alpha) \rho^k e^{ik\theta}. \qquad (7)$$

Выразим величину $I_\alpha(\rho)$ через коэффициенты этого ряда. Именно,

$$I_\alpha(\rho)=\int_0^{2\pi} f^{\alpha/2}(\rho e^{i\theta}) \overline{f^{\alpha/2}(\rho e^{i\theta})}\, d\theta=2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(\alpha)|^2 \rho^{2k}.$$

Теперь, следуя Г. Я. Хажалию [4], сравним производную от $I_\alpha(\rho)$ по ρ с формулой для $S_\alpha(\rho)$, записанной через коэффициенты ряда (7). Имеем (см. [5, стр. 209])

$$S_\alpha(\rho)=\frac{1}{2} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} \overline{f^{\alpha/2}(\rho e^{i\theta})} \frac{\partial f^{\alpha/2}(\rho e^{i\theta})}{\partial \theta} d\theta=$$

$$=\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} k\, |c_k(\alpha)|^2 \rho^{2k} \qquad (8)$$

и поэтому

$$\frac{dI_\alpha(\rho)}{d\rho}=\frac{4}{\rho} S_\alpha(\rho).$$

Непосредственно из (8) видим, что

$$\frac{dS_\alpha(\rho)}{d\rho}=\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2k^2 |c_k(\alpha)|^2 \rho^{2k-1}>0,$$

т. е. $S_\alpha(\rho)$ является возрастающей функцией. Поэтому участков монотонности у $I_\alpha(\rho)$ будет не более двух и не более одного минимума в интервале $(q, 1)$. В частности, если $S_\alpha(q)>0$, то $\frac{dI_\alpha(\rho)}{d\rho}>0$, $q<\rho<1$.

Небольшим изменением доказательства теоремы 3 обосновывается такое утверждение.

ТЕОРЕМА 3′. *Пусть функция $f(z)$ регулярна в кольце $E(q, 1)$,*

$$m=\frac{1}{2\pi} \int_{0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi} d \arg f(\rho e^{i\theta}), \qquad q<\rho<1,$$

— целое число (в частности, $m=0$), $\varphi_\alpha(z)=[f(z)/z^m]^{\alpha/2}$ и $\sigma_\alpha(\rho)$ — площадь фигуры с ориентированной границей $\varphi_\alpha(\rho e^{i\theta})$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Тогда величина (5) *определяется из соотношения*

$$\frac{d(I_\alpha(\rho)/\rho^{m\alpha})}{d\rho}=\frac{4}{\rho} \sigma_\alpha(\rho),$$

причем $\sigma_\alpha(\rho)$ *является монотонно возрастающей функцией, т. е. справедливо утверждение теоремы* 3 *для* $I_\alpha(\rho)/\rho^{m\alpha}$.

Средние модули $I_\alpha(\rho)$, регулярных в кольце функций, изучал Г. Я. Хажалия [4]. Однако в формулировке основной теоремы из [4] и в ее доказательстве при $\alpha \neq 2$ имеются погрешности. В частности, условий теоремы недостаточно для выделения регулярной ветви функции $f^{\alpha/2}(z)$.

§ **2.** По аналогии с теоремой 1 доказывается

ТЕОРЕМА 4. *Пусть регулярная в* $E(q, 1)$ *функция* $f(z) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$ *преобразует окружность* C_q *в кривую Жордана и* $\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} d\arg f(\rho e^{i\theta}) \geqslant 0, \quad q < \rho < 1$. *Пусть, кроме того, субгармоническая в* $E(q, 1)$ *функция* $\Omega(u(z))$ *такова, что* $\Omega(u(z)) \in C^2(E(q, 1))$, а $d\,\Omega/du$ — *строго монотонная по u функция в интервале* $(\inf u(z), \sup u(z))$, $z \in E(q, 1)$. *Тогда функция*

$$J(\rho) = \int_0^{2\pi} \Omega(u(\rho e^{i\theta}))\, d\theta$$

возрастает в интервале $(q, 1)$.

Доказательство. Применим к функции $\Omega(u(z))$ формулу (3):

$$0 \leqslant \iint_{E(q+\varepsilon,\, \rho)} \Delta\Omega(u(\rho e^{i\theta}))\, \rho\, d\theta\, d\rho =$$

$$= \rho \frac{d}{d\rho} \int_0^{2\pi} \Omega(u(\rho e^{i\theta}))\, d\theta - \int_{C_{q+\varepsilon}} \frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\, ds. \qquad (9)$$

Далее,

$$\int_{C_{q+\varepsilon}} \frac{\partial\Omega}{\partial\rho}\, ds = (q+\varepsilon) \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{du} \frac{\partial u}{\partial\rho}\, d\theta =$$

$$= \int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \frac{d\Omega}{du}\, dv(q+\varepsilon, \theta) =$$

$$= \int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \tilde{u}(q+\varepsilon, \theta)\, d\tilde{v}(q+\varepsilon, \theta) = \tilde{S}_{q+\varepsilon},$$

где $\tilde{u} = d\,\Omega/du$, $\tilde{v} = v$, $\tilde{S}_{q+\varepsilon}$ — площадь конечной области, ограниченной кривой $\tilde{L}_{q+\varepsilon}$, параметрическое уравнение которой $\tilde{f} = \tilde{u}(q+\varepsilon, \theta) + i\tilde{v}(q+\varepsilon, \theta)$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$.

Убедимся в том, что кривая $\tilde{L}_{q+\varepsilon}$ не имеет самопересечений, как и кривая $f(C_q)$. Для этого возьмем на окружности $C_{q+\varepsilon}$ две произвольные точки $z_k = (q+\varepsilon)\, e^{i\theta_k}$,

$k = 1, 2$. Если $\tilde{v}(q+\varepsilon, \theta_1) \neq \tilde{v}(q+\varepsilon, \theta_2)$, то $\tilde{f}(z_1) \neq \tilde{f}(z_2)$. Пусть $\tilde{v}(q+\varepsilon, \theta_1) = \tilde{v}(q+\varepsilon, \theta_2)$; тогда $u(q+\varepsilon, \theta_1) \neq u(q+\varepsilon)\,\theta_2)$, так как $f(z_1) \neq f(z_2)$, $f(z) = u + iv = u + i\tilde{v}$. В силу монотонного изменения функции $\tilde{u}(u) = \mathrm{d}\,\Omega/\mathrm{d}u$ из неравенства $u(q+\varepsilon, \theta_1) \neq u(q+\varepsilon, \theta_2)$ следует, что $\tilde{u}(q+\varepsilon, \theta_1) \neq \tilde{u}(q+\varepsilon, \theta_2)$, т. е. $\tilde{f}(z_1) \neq \tilde{f}(z_2)$. Итак, $\tilde{L}_{q+\varepsilon}$ — простая кривая, значит, $\tilde{S}_{q+\varepsilon} > 0$, $\varepsilon \geqslant 0$.

Заметим еще, что $\Delta\Omega(u) = \dfrac{D(\tilde{u}, \tilde{v})}{D(x, y)}$. В самом деле, $\Delta\Omega(u) = \Omega''(u)(u_x'^2 + u_y'^2) + \Omega'(u)\,\Delta u = \Omega''(u)\,|f'(z)|^2$. С другой стороны,

$$\frac{D(\tilde{u}, \tilde{v})}{D(x, y)} = \tilde{u}_x'\tilde{v}_y' - \tilde{u}_y'\tilde{v}_x' = \Omega''(u)(u_x'v_y' - u_y'v_x') = \Omega''(u)\,|f'(z)|^2.$$

Все это позволяет представить (9) в следующем виде:

$$\rho\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\rho} = \int\!\!\int_{E(q+\varepsilon,\,\rho)} \frac{D(\tilde{u}, \tilde{v})}{D(x, y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \tilde{S}_{q+\varepsilon} > 0.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}\rho} = \frac{1}{\rho}\tilde{S}_\rho > 0, \qquad q < \rho < 1.$$

Как следствие доказанной теоремы 4 получается

ТЕОРЕМА 5. *Пусть регулярная в* $E(q, 1)$ *функция* $f(z) = u + iv$ *преобразует окружность* C_q *в кривую Жордана и* $\int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} \mathrm{d}\arg f(\rho e^{i\theta}) \geqslant 0$, $q < \rho < 1$. *Тогда функция*

$$J_\alpha(\rho) = \int_0^{2\pi} |u(\rho e^{i\theta})|^\alpha\,\mathrm{d}\theta$$

возрастает в интервале $(q, 1)$, *если дополнительно выполняется одно из условий*: 1) $\alpha \geqslant 2$; 2) $u(z) > 0$, $z \in E(q, 1)$, $\alpha > 1$.

Для доказательства положим $\Omega(u) = |u|^\alpha$. Функции $\Omega(u(z))$, $\mathrm{d}\,\Omega/\mathrm{d}u$ удовлетворяют всем условиям теоремы 4.

Замечание. Теоремы 4, 5 имеют место и в том случае, если вместо условия — образ окружности C_q является кривой Жордана — предполагать, что площадь области, ограниченной кривой $\tilde{L}_q$, положительна. Это утверждение обосновывается так же, как соответствующее замечание в § 1.

По отношению к интегральным средним для гармонических функций можно использовать аппарат рядов Лорана только при $\alpha = 2$. Именно так доказывается следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть гармоническая функция* $u(\rho, \theta)$ *является вещественной частью регулярной в кольце* $E(q, 1)$ *функции* $f(\rho e^{i\theta})$, *и пусть* $S(\rho)$ *будет площадью области, ограниченной кривой с уравнением* $f = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$. *Величина* $J_2(\rho) = \int_0^{2\pi} u^2(\rho, \theta)\, d\theta$ *убывает при тех* ρ, *для которых* $S(\rho) < 0$, *и возрастает, когда* $S(\rho) > 0$. $J_2(\rho)$ *имеет не более одного минимума в той именно точке* ρ_0, $q \leqslant \rho_0 \leqslant 1$, *где* $S(\rho_0) = 0$.

Доказательство. Разложим в ряд Лорана регулярную функцию $f(\rho e^{i\theta}) = u(\rho, \theta) + iv(\rho, \theta)$:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k)(\rho e^{i\theta})^k =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^k (\alpha_k \cos k\theta - \beta_k \sin k\theta) +$$
$$+ i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho^k (\alpha_k \sin k\theta + \beta_k \cos k\theta).$$

Подсчитаем интеграл $J_2(\rho)$ через коэффициенты ряда Лорана:

$$J_2(\rho) = 2\pi\alpha_0^2 +$$
$$+ \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} [(\rho^k \alpha_k + \rho^{-k}\alpha_{-k}) \cos k\theta - (\rho^k \beta_k + \rho^{-k}\beta_{-k}) \sin k\theta]^2 \cdot$$
$$\cdot d\theta = 2\pi\alpha_0^2 + \pi \sum_{k=1}^{\infty} \{\rho^{2k}(\alpha_k^2 + \beta_k^2) +$$
$$+ \rho^{-2k}(\alpha_{-k}^2 + \beta_{-k}^2) + 2(\alpha_k \alpha_{-k} + \beta_k \beta_{-k})\}.$$

Производная функции $J_2(\rho)$ выражается через площадь

$$\frac{dJ_2}{d\rho} = \frac{2\pi}{\rho} \sum_{k=1}^{\infty} (k\,|a_k|^2 \rho^{2k} - k\,|a_{-k}|^2 \rho^{-2k}) = \frac{2}{\rho} S(\rho),$$

как в теореме 3. В заключение нужно провести такие же рассуждения, как в конце доказательства теоремы 3.

§ 3. Дадим применение доказанных теорем к неравенствам для коэффициентов.

Если функция $f(z)$ регулярна, за исключением полюса в $z = \infty$, однолистна в $|z| > 1$ и $f(z) \neq 0$, то, как показал Правиц (см., например, [2, стр. 20]), при любом $\lambda > 0$

имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} (k-\lambda) | D_k(\lambda)|^2 \leqslant \lambda, \tag{10}$$

где обозначено

$$\left(\frac{f(z)}{z}\right)^{\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(\lambda) z^{-k}, \qquad D_0(\lambda) = 1.$$

Из (10) при $\lambda = 1$ следует известная в теории однолистных функций теорема площадей.

Теорема 2 позволяет распространить неравенство (10) на случай кольца. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Пусть функция $f(z)$ регулярна, однолистна в $E(q, 1)$ и $f(z) \neq 0$. Тогда при любом $\lambda > 0$ имеет место неравенство*

$$\sum_{k=-\infty}^{\prime\infty} | D_k(\lambda)|^2 (k - \lambda m) \leqslant \lambda m, \tag{11}$$

где

$$\left(\frac{f(z)}{z^m}\right)^{\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k(\lambda) z^{-k}, D_0(\lambda) = 1,$$

$$m = \frac{1}{2\pi} \int_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} d \arg f(\rho e^{i\theta}) = 0 \text{ или } m = 1;$$

Σ' означает, что при суммировании $k \neq 0$.

Доказательство. Согласно теореме 2 имеем

$$0 \leqslant \frac{d}{d\rho} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta})|^{2\lambda} d\theta = \frac{d}{d\rho} \int_0^{2\pi} \left| \left(\frac{f(\rho e^{i\theta})}{(\rho e^{i\theta})^m} \right)^{\lambda} \right|^2 |\rho e^{i\theta}|^{2\lambda m} d\theta =$$

$$= \frac{d}{d\rho} \int_0^{2\pi} \rho^{2\lambda m} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k(\lambda)(\rho e^{i\theta})^{-k} \right|^2 d\theta =$$

$$= \frac{d}{d\rho} \left[\rho^{2\lambda m} \int_0^{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} | D_k(\lambda)|^2 \rho^{-2k} d\theta \right] =$$

$$= \frac{d}{d\rho} \left[2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} | D_k(\lambda)|^2 \rho^{2(\lambda m - k)} \right].$$

Следовательно, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} | D_k(\lambda)|^2 (\lambda m - k) \rho^{2(\lambda m - k) - 1} \geqslant 0$, $q < \rho < 1$. При $\rho \to 1$ получим $\sum_{k=-\infty}^{\infty} | D_k(\lambda)|^2 (\lambda m - k) \geqslant \geqslant 0$, или (11), что и требовалось доказать.

Казанский университет.
Ульяновский политехнический институт

Поступило 29.VI.1977

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Привалов И. И., Субгармонические функции, М.— Л., ОНТИ, 1937.

[2] Милин И. М., Однолистные функции и ортонормированные системы, М., «Наука», 1971.

[3] Тиман А. Ф., Трофимов В. Н., Введение в теорию гармонических функций, М., «Наука», 1968.

[4] Хажалия Г. Я., О средних модулях аналитических функций в двусвязных областях, Докл. АН СССР, **226**, № 6 (1976), 1287—1290.

[5] Голузин Г. М., Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., «Наука», 1966.