

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Поединчук, В. П. Шестопалов, Н. П. Яшина, К спектральной теории коаксиально-волноводного резонатора, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986, том 26, номер 4, 552–562

<https://www.mathnet.ru/zvmmf4021>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

18 мая 2025 г., 07:16:24



УДК 517.958:621.372.831

К СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ  
КОАКСИАЛЬНО-ВОЛНОВОДНОГО РЕЗОНАТОРА

ПОЕДИНЧУК А. Е., ШЕСТОПАЛОВ В. П., ЯШИНА Н. П.

(Харьков)

Построена математическая модель, описывающая спектр собственных осесимметричных колебаний коаксиально-волноводного резонатора. Обоснован и реализован соответствующий вычислительный алгоритм; с его помощью получены распределения комплексных собственных частот резонатора.

Рассматривается задача нахождения спектра собственных частот резонатора, образованного отрезком круглого волновода, ограниченного коаксиально-волноводными разветвлениями (фиг. 1). Эта структура является одной из наиболее распространенных в СВЧ и измерительной технике. Исследуемое волноводное соединение, по сути, представляет собой открытый резонатор (область широкого волновода), излучение из которого происходит в бесконечные круглые и коаксиальные волноводы.

Известен ряд работ [1]—[4], посвященных решению задач дифракции волн на данной структуре. Однако лишь в [2], [3] поднимался вопрос о собственных режимах резонансного объема, причем авторы ограничились рассмотрением действительных собственных частот, определяемых из приближенного дисперсионного уравнения, полученного в предположении, что узкий и коаксиальный волноводы заперделены. Когда в этих волноводах возможно существование распространяющихся волн, т. е. в резонансном объеме существуют дифракционные потери, собственные частоты становятся комплексными и представляет несомненный интерес рассмотреть задачу нахождения собственных значений в общем случае.

Следует отметить, что в известных работах, связанных с решением внутренних задач электродинамики (за исключением [5], [6]), посвященных изучению волноводно-резонаторных устройств, изучались только действительные собственные частоты, а строгие математические модели, обеспечивающие анализ спектральных свойств резонансных структур, до сих пор отсутствовали.

Цель настоящей работы состоит в построении строгой математической модели, описывающей спектр собственных аксиально-симметричных колебаний типа  $H$  коаксиально-волноводного резонатора (к.в.р.).

Используемый метод опирается на результаты [7], [8].

§ 1. Постановка и решение спектральной задачи

Коаксиально-волноводный резонатор (к.в.р.) представлен на фиг. 1. Геометрия структуры

$$S = \bigcup_{i=1}^3 S_i,$$

обладающей круговой симметрией, описывается следующими параметрами:  $b$ ,  $\theta_1 b$  и  $\theta_2 b$  — радиусы волноводов  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$ ;  $l$  — расстояние между узкими волноводами  $S_2$  и  $S_3$ ;  $S_4$ ,  $S_5$ ,  $S_6$ ,  $S_7$  — поверхности плоскости раздела регулярных областей, соответствующие узким и коаксиальным волноводам.

Рассмотрим задачу о спектре собственных симметричных электромагнитных колебаний типа  $H$ . Эта задача состоит в определении значений спектрального параметра  $k$  с  $\text{Im } k \leq 0$ , при которых существует нетривиальное решение двумерного уравнения Гельмгольца

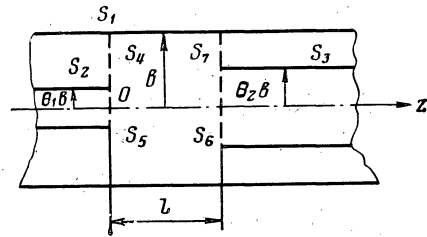
$$(1.1) \quad \Delta U(r, z) + k^2 U(r, z) = 0,$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$(1.2) \quad U|_{S_i} = 0, \quad i=1, 2, 3,$$

условию типа Мейкснера

$$(1.3) \quad \int_V (|U|^2 + |\text{grad } U|^2) dV < \infty,$$



Фиг. 1

где  $V$  — ограниченная область, и уходящему условию излучения (зависимость от времени выбрана  $e^{-i\kappa t}$ ): при  $z < 0$

$$(1.4a) \quad U(r, z) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_1\left(\frac{\nu_n r}{\theta_1 b}\right) \exp\left(-i \frac{2\pi}{b} \omega_{n2} z\right), & 0 \leq r \leq \theta_1 b, \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left\{ J_1\left(\frac{\mu_{n1} r}{b}\right) - \frac{J_1(\mu_{n1} \theta_1)}{N_1(\mu_{n1} \theta_1)} N_1\left(\frac{\mu_{n1} r}{b}\right) \right\} \exp\left(-i \frac{2\pi}{b} \varphi_{n1} z\right), & \theta_1 b \leq r \leq b; \end{cases}$$

при  $z > l$

$$(1.4b) \quad U(r, z) =$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} D_n J_1\left(\frac{\nu_n r}{\theta_2 b}\right) \exp\left[i \frac{2\pi}{b} \omega_{n3} (z-l)\right], & 0 \leq r \leq \theta_2 b, \\ \sum_{n=1}^{\infty} G_n \left\{ J_1\left(\frac{\mu_{n2} r}{b}\right) - \frac{J_1(\mu_{n2} \theta_2)}{N_1(\mu_{n2} \theta_2)} N_1\left(\frac{\mu_{n2} r}{b}\right) \right\} \exp\left[i \frac{2\pi}{b} \omega_{n2} (z-l)\right], & \theta_2 b \leq r \leq b. \end{cases}$$

Здесь  $\omega_{n, i+1} = [\kappa^2 - (\nu_n / 2\pi \theta_i)^2]^{1/2}$ ,  $i=1, 2$ , — продольные волновые числа узких волноводов;  $\nu_n$  есть  $n$ -й корень уравнения  $J_1(x) = 0$ ,  $\varphi_i = [\kappa^2 - (\mu_{ni} / 2\pi)^2]^{1/2}$ ,  $i=1, 2$ , — продольные волновые числа коаксиальных волноводов;  $\mu_{ni}$  есть  $i$ -й корень уравнения  $J_1(x) N_1(x \theta_i) - J_1(x \theta_i) N_1(x) = 0$ ,  $i=1, 2$ ;  $\kappa = kb / 2\pi$ . Зависимость от комплексного спектрального параметра  $\kappa$  функций из (1.4) будем рассматривать на поверхности Римана  $C_\kappa$  их аналитического продолжения с интервала  $-\alpha_0 < \kappa < \alpha_0$ , на котором  $\text{Im}(\kappa^2 - \alpha_n^2)^{1/2} > 0$  для всех  $\pm \alpha_n = \nu_n (2\pi \theta_i)^{-1}$  и  $\pm \mu_n (2\pi)^{-1}$ ,  $n=1, 2, \dots$ ,  $i=1, 2$ ,

$$\alpha_0 = \min_{i,n} \left\{ \frac{\nu_n}{2\pi \theta_i}, \frac{\mu_{ni}}{2\pi} \right\}.$$

Эта поверхность Римана бесконечнолистная, и точки  $\pm\alpha_n$ ,  $n=1, 2, \dots$ , являются точками ветвления второго порядка. Для каждой фиксированной точки  $\kappa$  неравенство  $\text{Im}(\kappa^2 - \alpha_n^2)^{1/2} < 0$  имеет место не более чем для конечного множества значений  $\alpha_n$ .

Функция  $U(r, z)$  описывает единственную отличную от нуля компоненту электрического поля  $E_\varphi(r, z)$ . Остальные компоненты собственного электромагнитного поля выражаются через  $U(r, z)$  из однородной системы уравнений Максвелла.

В области  $(0 \leq r \leq b, 0 \leq z \leq l)$  поле представим в виде

$$U(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} J_1\left(\frac{\nu_n r}{b}\right) \left\{ A_n^+ \exp\left(i \frac{2\pi}{b} \omega_{n1} z\right) + A_n^- \exp\left[-i \frac{2\pi}{b} \omega_{n1} (z-l)\right] \right\},$$

где  $\omega_{n1} = [\kappa^2 - (\nu_n/2\pi)^2]^{1/2}$ .

Удовлетворяя условиям непрерывности на  $S_i$ ,  $i=4, 5, 6, 7$ , и производя в функциональных уравнениях переразложение по системам функций, полным на соответствующих интервалах, приходим к однородной бесконечной системе линейных алгебраических уравнений I рода (с.л.а.у. I) относительно коэффициентов разложения поля в резонаторе:

$$(1.5a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n^+ J_1(\nu_n \theta_1)}{\omega_{n1} - \varphi_{m1}} - \frac{A_n^- J_1(\nu_n \theta_1) e_{n1}}{\omega_{n1} + \varphi_{m1}} \right] = 0,$$

$$(1.5б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n^+ J_1(\nu_n \theta_1)}{\omega_{n1} - \omega_{m2}} - \frac{A_n^- J_1(\nu_n \theta_1) e_{n1}}{\omega_{n1} + \omega_{m2}} \right] = 0,$$

$$(1.5в) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n^+ J_1(\nu_n \theta_2) e_{n1}}{\omega_{n1} + \varphi_{m2}} - \frac{A_n^- J_1(\nu_n \theta_2)}{\omega_{n1} - \varphi_{m2}} \right] = 0,$$

$$(1.5г) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{A_n^+ J_1(\nu_n \theta_2) e_{n1}}{\omega_{n1} + \omega_{m3}} - \frac{A_n^- J_1(\nu_n \theta_2)}{\omega_{n1} - \omega_{m3}} \right] = 0, \quad m=1, 2, \dots,$$

где  $e_{n1} = \exp(i2\pi\omega_{n1}L)$ ,  $L=l/b$ .

Из условия (1.3) следует, что неизвестные последовательности  $(A_n^\pm)_{n=1}^\infty$  должны принадлежать пространству  $l_2$ . Можно доказать, что матрицы из (1.5) задают в  $l$  вполне непрерывные операторы. Действительно, рассмотрим для определенности матрицу  $C = \|C_{mn}\|_{m,n=1}^\infty$ ,  $C_{mn} = J_1(\nu_n \theta_1) (\omega_{n1} - \varphi_{m1})^{-1}$ . Легко видеть, что  $C = C_1 C_2$ , где  $C_1 = \|C_{mn}^1\|_{m,n=1}^\infty$ ,

$$C_{mn}^1 = (\omega_{n1} - \varphi_{m1})^{-1}, \quad C_2 = \|C_{mn}^2\|_{m,n=1}^\infty,$$

$$C_{mn}^2 = J_1(\nu_n \theta_1) \delta_m^n, \quad \delta_m^n = \begin{cases} 1, & m=n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Так как  $J_1(\nu_n \theta_1) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то  $C_2$  задает в  $l_2$  вполне непрерывный оператор. Далее, используя асимптотические представления для  $\nu_n$  и  $\mu_{n1}$  при  $n \rightarrow \infty$ , получаем  $C_{mn}^1 \sim 2i[m\theta_1(1-\theta_1)^{-1}n - 0.25]^{-1}$  при  $n, m \rightarrow \infty$ . Поэтому, в силу [9],  $C_1$  задает в  $l_2$  ограниченный оператор, а значит,  $C = C_1 C_2$  зада-

ет вполне непрерывный оператор в  $l_2$  (аналогично рассматриваются остальные случаи). Это обстоятельство делает практически невозможным применение метода усечений к системе (1.5). Однако присутствие в матричных операторах из (1.5) разностной части позволяет провести регуляризацию с помощью метода полуобращения (здесь этот метод применен в варианте [7]). Данный метод использует явное решение системы уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{np}^{(i)} J_1(\nu_n \theta_i)}{\omega_{n1} - \varphi_{mi}} = \frac{J_1(\nu_p \theta_i)}{\omega_{p1} + \varphi_{mi}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{np}^{(i)} J_1(\nu_n \theta_i)}{\omega_{n1} - \omega_{m, i+1}} = \frac{J_1(\nu_p \theta_i)}{\omega_{p1} + \omega_{m, i+1}}, \quad p=1, 2, \dots, \quad i=1, 2,$$

которое определяется с помощью мероморфных функций  $F_i^{(p)}(w)$ ,  $i=1, 2$ . Эти функции строятся по заданному распределению нулей ( $w = \varphi_{mi}$ ,  $w = \omega_{n, i+1}$ ) и полюсов ( $w = -\omega_{p1}$ ,  $w = \omega_{m1}$ ), по требуемому убыванию на бесконечности ( $F_i^{(p)}(w) = O(|w|)^{-1/2}$  при  $|w| \rightarrow \infty$ ), по условию нормировки ( $\text{Res } F_i^{(p)}(w)|_{w=\omega_{p1}} = 1$ ) и имеют вид

$$F_i^{(p)}(w) = \frac{\exp[iv(\theta_i)(\omega_{p1} + w)]}{\omega_{p1} + w} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\omega_{n, i+1} - w)(\varphi_{ni} - w)(\omega_{n1} + \omega_{p1})}{(\omega_{n, i+1} + \omega_{p1})(\varphi_{ni} + \omega_{p1})(\omega_{n1} - w)},$$

где  $v(\theta_i) = 2[\theta_i \ln \theta_i + (1 - \theta_i) \ln(1 - \theta_i)]$ . Окончательно получаем бесконечную с.л.а.у. вида

$$(1.6) \quad x_m - \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}(\kappa) x_n = 0, \quad m=1, 2, \dots,$$

где  $x_m = A_m + J_1(\nu_m \theta_1)$ ,

$$a_{mn} = \frac{J_1(\nu_n \theta_2)}{J_1(\nu_m \theta_1)} \sum_{s=1}^{\infty} R_{ms}^{(1)}(\kappa) \exp(i2\pi \omega_{s1} L) R_{sn}^{(2)}(\kappa) \exp(i2\pi \omega_{n1} L),$$

$$R_{ms}^{(i)}(\kappa) = \frac{J_1(\nu_s \theta_i)}{J_1(\nu_m \theta_i)} \text{Res } F_i^{(s)}(w)|_{w=\omega_{n1}}, \quad i=1, 2.$$

Используя результаты работы [10], можно доказать эквивалентность системы (1.6) и исходной спектральной задачи.

Покажем, что (1.6) представляет собой задачу на характеристические числа некоторой оператор-функции, действующей в пространстве  $l_2$ . Легко видеть, что матричные элементы  $a_{mn}(\kappa)$  являются мероморфными функциями спектрального параметра  $\kappa$  на поверхности Римана  $C_{\kappa}$ . Пусть  $B \subset C_{\kappa}$  — произвольный компакт, не содержащий полюса функций  $a_{mn}(\kappa)$ ,  $m, n=1, 2, \dots, \infty$ . Тогда, используя асимптотические разложения для  $\nu_n$ ,  $\mu_n$  при  $n \rightarrow \infty$  (см. [11]) и оценки для  $R_{ms}^{(i)}(\kappa)$  (см. [12]), получаем оценку для  $a_{mn}(\kappa)$  при  $m, n \rightarrow \infty$  и  $\kappa \in B$ :

$$(1.7) \quad |a_{mn}(\kappa)| < C(B) n^{-1/2} m^{-3/2} \exp(-\pi Ln),$$

где  $C(B)$  — константа, зависящая только от компакта  $B$  и геометрических параметров структуры.

Справедлива

Лемма 1. Пусть  $D=C_x \setminus \Gamma$ ,  $\Gamma$  — множество полюсов функций  $a_{mn}(x)$ ,  $m, n=1, 2, \dots, \infty$ . Тогда для любого  $x \in D$  матрица  $\|a_{mn}(x)\|_{m,n=1}^{\infty}$  задает в  $l_2$  ядерный оператор.

Действительно, если  $B$  — произвольный компакт в  $D$ , то в силу оценки (1.7) имеем

$$\sum_{m,n} |a_{mn}(x)| < \text{const} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \exp(-\pi Ln) < \infty$$

и тем более

$$\sum_{m,n} |a_{mn}(x)|^2 < \infty.$$

Поэтому оператор  $A(x) : l_2 \rightarrow l_2$ , задаваемый по формулам  $(A(x)e_m, e_n) = a_{mn}(x)$ , где  $e_n = (\delta_n^k)_{k=1}^{\infty}$ ,  $n=1, 2, \dots, \infty$ ,  $\delta_n^k$  — символ Кронекера, является оператором Гильберта — Шмидта. Далее, пусть  $(f_m)_{m=1}^{\infty}$  — произвольный ортонормированный базис в  $l_2$ . Для ядерности  $A(x)$  достаточно показать (см. [13]), что ряд  $\sum_m (A(x)f_m, f_m)$  сходится абсолютно. Имеем

$$f_m = \sum_n f_m^n e_n, \quad \sum_m |f_m^n|^2 = \sum_n |f_m^n|^2 = 1,$$

$$\sum_m |(A(x)f_m, f_m)| < \sum_{n,p} |a_{np}(x)| \sum_m |f_m^n f_m^p| \leq \sum_{n,p} |a_{np}(x)| < \infty,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, семейство операторов  $A(x) : l_2 \rightarrow l_2$  можно рассматривать, как оператор-функцию спектрального параметра  $x$  с областью определения  $D$  и областью значений в пространстве ядерных операторов, действующих в  $l_2$ .

Докажем теперь, что  $A(x)$  аналитична в  $D$ . Пусть  $L : l_2 \rightarrow C$  — произвольный ограниченный функционал. Рассмотрим функцию  $F(x) = L(A(x)x)$  и покажем, что она аналитична в  $D$  для любого  $x \in l_2$ . Это эквивалентно аналитичности  $A(x)$  (см. [13]). В силу [13],

$$(1.8) \quad F(x) = \sum_m y_m \sum_n a_{mn} x_n,$$

где  $y = (y_m)_{m=1}^{\infty} \in l_2$  и однозначно определяется функционалом  $L$ . Как уже отмечалось выше,  $a_{mn}(x)$  мероморфны в  $C_x$  и аналитичны в  $D$ . Теперь достаточно заметить, что, в силу оценки (1.7), ряд в (1.8) сходится равномерно на любом компакте в  $D$ .

На основании изложенного систему (1.6) будем рассматривать как операторное уравнение в  $l_2$ :

$$(1.9) \quad [I - A(x)]x = \theta,$$

где  $I$  — тождественный оператор,  $\theta$  — нулевой элемент. Уравнение (1.9) является задачей на характеристические числа оператор-функции  $I - A(x)$ . Обозначим через  $\rho(A) \subset D$  множество регулярных точек  $I - A(x)$  (т. е. если  $x \in \rho(A)$ , то существует ограниченный  $(I - A(x))^{-1}$ ), тогда  $\sigma(A) = D \setminus \rho(A)$  — множество характеристических чисел  $I - A(x)$ . На основании [14],  $\sigma(A)$  является конечнократным и дискретным в  $D$ .

## § 2. Численный алгоритм расчета характеристических чисел оператор-функции $I - A(\kappa)$

Построим последовательность конечномерных оператор-функций  $(A_n(\kappa))_{n=1}^{\infty}$ , аппроксимирующую оператор-функцию  $I - A(\kappa)$  в том смысле, который будет указан ниже.

Введем последовательность ортопроекторов  $P_N: l_2 \rightarrow l_2$ , проецирующих  $l_2$  на конечномерные подпространства:

$$P_N(l_2) = \{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n = 0, n > N\}.$$

Рассмотрим последовательность конечномерных оператор-функций вида  $A_n(\kappa) = P_N - P_N A(\kappa) P_N$ . Последовательность  $(A_n(\kappa))_{n=1}^{\infty}$  удовлетворяет следующим свойствам, которые сформулируем в виде ряда лемм.

*Лемма 2.* Пусть последовательность  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  такова, что  $x_N \in P_N(l_2)$ ,  $\|x_N\| < \text{const}$ ,  $\|P_N y - A_N(\kappa) x_N\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ ; тогда  $\|x_N - A(\kappa) x_N - y\| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

В самом деле, имеем

$$\|A(\kappa) x_N - x_N + y\| \leq \|A_n(\kappa) x_N - P_N y\| + \|P_N y - y\| + \|x_N\| \|A(\kappa)\|.$$

Теперь достаточно заметить, что, в силу оценки (1.7),

$$\|A(\kappa) - P_N A(\kappa) P_N\| < \left( \sum_{p>N, n>N} |a_{pn}|^2 \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

Следовательно,  $(A_n(\kappa))_{n=1}^{\infty}$  сходится собственно к оператор-функции  $I - A(\kappa)$  для любого  $\kappa \in D$  (согласно терминологии работы [15]).

*Лемма 3.* Последовательность  $\|A_N(\kappa)\|$  равномерно ограничена по  $\kappa$  и  $N$  на любом компакте  $B \subset D$ .

Действительно,

$$\begin{aligned} \|A_N(\kappa)\| &\leq 1 + \|A(\kappa)\| \leq 1 + \left( \sum_{m,n=1}^{\infty} |a_{mn}(\kappa)|^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq 1 + \text{const} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} m^{-3} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \exp(-2\pi Ln) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Из доказанных лемм и результатов работы [15] следует, что характеристические числа оператор-функции  $I - A(\kappa)$  можно аппроксимировать характеристическими числами конечномерных оператор-функций  $A_N(\kappa)$ , а следовательно, корнями уравнений

$$(2.1) \quad \det A_N(\kappa) = 0, \quad N = 1, 2, \dots$$

Получим асимптотическую оценку скорости сходимости численного алгоритма, основанного на последовательности уравнений (2.1). Пусть  $(\kappa_N)_{N=1}^{\infty}$  — последовательность корней уравнений (2.1) такая, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \kappa_N = \kappa_0 \in D;$$

тогда  $\kappa_0$  — характеристическое число оператор-функции  $I - A(\kappa)$ . Предположим для простоты, что  $\dim \ker [I - A(\kappa_0)] = 1$ . Как было доказано, оператор-функция  $A(\kappa)$  аналитична при  $\kappa = \kappa_0$  и является ядерной, следовательно, существует функция  $\Delta(\kappa) = \det [I - A(\kappa)]$ , аналитическая при

$\kappa = \kappa_0$ . Пусть  $R > 0$  таков, что  $\Delta(\kappa)$  аналитична в круге  $|\kappa - \kappa_0| \leq R$  и  $0 < k < 1$ . Легко доказать неравенство

$$(2.2) \quad |\kappa_N - \kappa_0| < \Delta(\kappa_N) \left[ \left| \frac{d\Delta(\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} + (\kappa_N - \kappa_0) B(\kappa_0) \right]^{-1},$$

справедливое при  $|\kappa_N - \kappa_0| < kR$ . Для функции  $B(\kappa_0)$  справедлива оценка

$$|B(\kappa_0)| < \frac{M}{R^2(1-k)}, \quad M = \max_{|\kappa - \kappa_0|=R} \Delta(z).$$

В силу неравенства для ядерных операторов (см. [15]) имеем

$$(2.3) \quad |\Delta(\kappa_N)| < \|B_N(\kappa_N)\|_1 \exp[2\|A(\kappa_N)\|_1 + 1].$$

где  $\|\cdot\|_1$  — ядерная норма,  $B_N(\kappa_N) = A(\kappa_N) - P_N A(\kappa_N) P_N$ . Займемся вычислением  $\|B_N(\kappa_N)\|_1$ . По определению (см. [13]),

$$\|B_N(\kappa_N)\|_1 = \sum_{i=1}^N S_i(B_N(\kappa_N)).$$

Здесь  $S_i(\cdot)$  — сингулярные числа оператора  $B_N(\kappa_N)$ . В силу теоремы Аллахвердиева (см. [13]) имеем

$$S_{i+1}(B_N(\kappa_N)) = \min_Q \|B_N(\kappa_N) - Q\|.$$

Минимум берется по всем конечномерным операторам  $Q$  размерности не выше  $i$ . В нашем случае получаем

$$(2.4) \quad S_i(B_N(\kappa_N)) < \begin{cases} \|A(\kappa_N) - P_N A(\kappa_N) P_N\|, & i \leq N, \\ \|A(\kappa_N) - P_i A(\kappa_N) P_i\|, & i > N. \end{cases}$$

Следовательно, учитывая (2.2) — (2.4), имеем

$$(2.5) \quad |\kappa_N - \kappa_0| < \exp[2\|A(\kappa_N)\|_1 + 1] \left[ \left| \frac{d\Delta(\kappa)}{d\kappa} \right|_{\kappa=\kappa_0} + (\kappa_N - \kappa_0) B(\kappa_0) \right]^{-1} \times \\ \times \left[ N\|A(\kappa_N) - P_N A(\kappa_N) P_N\| + \sum_{i=N+1}^{\infty} \|A(\kappa_N) - P_i A(\kappa_N) P_i\| \right].$$

Далее, используя оценку (1.7), получаем

$$(2.6) \quad \|A(\kappa_N) - P_i A(\kappa_N) P_i\| < C(k) \sum_{n=i+1}^{\infty} n^{-3} \sum_{m=i+1}^{\infty} m^{-1} \exp(-2\pi L m) < \\ < C(k) \exp[-2\pi L(i+1)] (i+1)^{-2} [1 - \exp(-2\pi L)]^{-1},$$

где  $k = \{\kappa: |\kappa - \kappa_0| \leq kR\}$ . Подставляя (2.5) в (2.6), окончательно получаем

$$(2.7) \quad |\kappa_N - \kappa_0| < \text{const} \exp[-\pi L(N+1)].$$

Константа в (2.7) зависит от  $\kappa_0$  и геометрических параметров резонатора.

При численной реализации построенного алгоритма необходимо решить две ключевые задачи: 1) оптимально точно и экономично рассчитывать элементы определителя (2.1), представляющие собой бесконечные произведения; 2) отработать методику решения дисперсионного уравне-



ния (2.1). При решении первой задачи целесообразно воспользоваться схемой вычисления бесконечных произведений, подробно описанной в [7], вводя некоторые изменения с учетом комплексности  $\kappa$ .

В силу аналитичности определителя (2.1), для решения дисперсионного уравнения (2.1) удобно применить метод Ньютона с численным определением производной. В качестве начальных приближений выбираются значения  $\kappa$ , соответствующие различным предельным ситуациям (например,  $\theta_i \approx 1$  или  $\theta_i \approx 0$ ,  $L \gg 1$  и т. д.).

В результате численных экспериментов установлено, что для определения  $\kappa$  с точностью до четырех значащих цифр достаточно в уравнении (1.9) выбирать порядок усечения определителя  $N > [2|\kappa|]$ . При этом для отыскания корня достаточно не более пяти итераций. На ЭВМ БЭСМ-6 для нахождения одного корня требовалось  $\sim 20'' \div 30''$ .

### § 3. Распределение собственных частот колебаний типа $H_{0nm}$

Вычислительный алгоритм, основанный на строгой модели, является эффективным способом всестороннего анализа спектральных характеристик к. в. р. Ограничимся некоторыми результатами для случая резонатора, симметричного относительно плоскости  $z=l/2$ , т. е.  $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ .

Рассматриваемые квазисобственные режимы по своей физической природе связаны с резонансами на «запертых» модах. В задачах рассеяния такого рода резонансам соответствует полное отражение падающего поля. В отличие от рассматриваемых ранее структур [5], данный резонансный объем имеет четыре канала связи, которые влияют на спектральные характеристики к. в. р. Назовем режимом возбуждения  $\begin{pmatrix} n_1 & n_2 \\ n_1 & n_3 \end{pmatrix}$  такой колебательный процесс в к. в. р., когда в широком, коаксиальном и узком волноводах может распространяться  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  волн соответственно. Из физических соображений условие возбуждения квазисобственного режима теперь определяется таким образом:

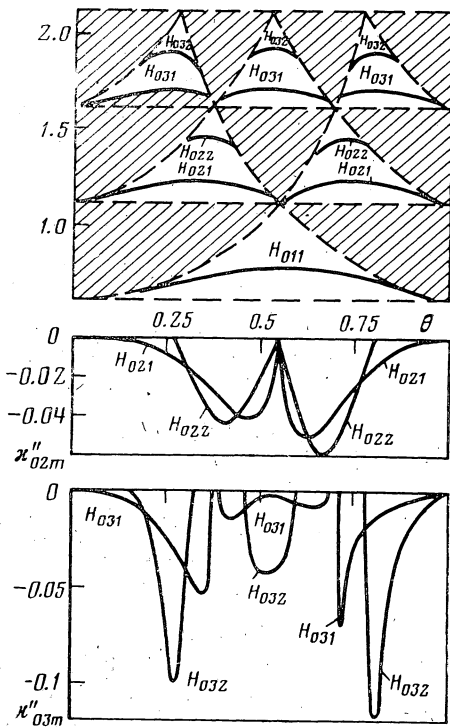
$$(3.1) \quad n_1 > n_2 + n_3.$$

Области параметров, в которых выполняется равенство  $n_1 = n_2 + n_3$ , являются зонами «молчания» резонатора, поскольку в этом случае в резонансном объеме отсутствуют запертые моды.

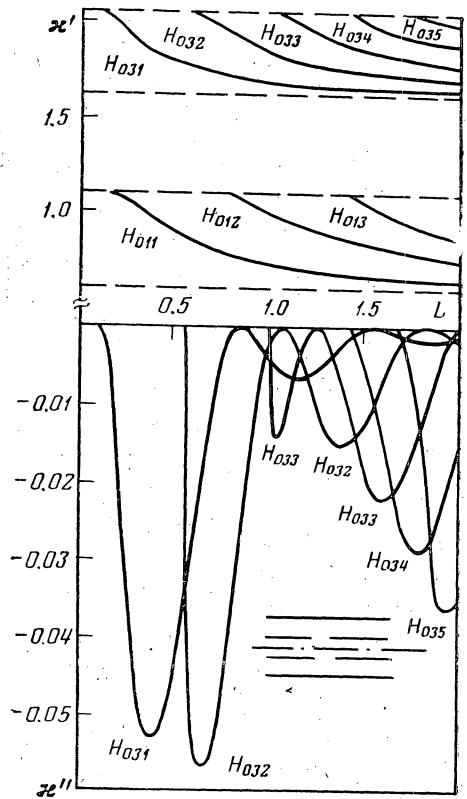
На фиг. 2 приведено распределение собственных частот  $\kappa_{0nm} = \kappa'_{0nm} + i\kappa''_{0nm}$  к. в. р. в зависимости от  $\theta$  для колебаний  $H_{0nm}$  ( $n$  — поперечный,  $m$  — продольный индексы) при  $L=0.8$ . Штриховыми линиями на фиг. 2 нанесены диаграммы распределения критических частот широкого ( $\kappa' = v_n/2\pi$ ), узкого ( $\kappa' = v_n/2\pi\theta$ ) и коаксиального ( $\kappa' = \mu_n/2\pi$ ) волнопроводов. В силу условия (3.1), возбуждение колебания типа  $H_{0nm}$  возможно лишь в определенных областях  $\kappa'$  и  $\theta$  (на фиг. 2 не заштрихованы), определяемых соотношением

$$(3.2) \quad v_n/2\pi < \kappa_{0nm} < \min(v_i/2\pi\theta, \mu_i/2\pi), \quad i=1, 2, \dots, n.$$

Все остальные области значений  $\kappa'$ ,  $\theta$  являются для к. в. р. зонами молчания. Относительно небольшая длина резонатора ( $L=0.8$ ) выбрана не случайно: с увеличением  $L$  происходит сгущение спектра и картина распределения квазисобственных частот становится менее наглядной.



Фиг. 2



Фиг. 3

При идентификации типа колебания той или иной дисперсионной кривой поперечный индекс определялся из (3.2). Для установления продольного индекса в области резонатора  $0 \leq z \leq l$  строилась картина распределения поля по линиям  $|E_{\varphi}(r, z)| = \text{const}$ . Наиболее обширная область существования характерна для колебания  $H_{011}$ , возбуждаемого в зоне параметров, соответствующих запредельным узкому и коаксиальному волноводам, где  $\kappa'_{011} = 0$ . Наибольшее значение находится в окрестности точки  $\theta_c = v_1/v_2 \approx 0.546$ . При этом значении  $\theta$  торец узкого волновода попадает в пучность поля  $E_{\varphi}(r)|_{z=0, z=l}$  и, таким образом, максимально возмущает электрическую компоненту поля колебания  $H_{011}$ , при этом уменьшается проникновение поля в подводящие волноводы, т. е. уменьшается «эффективный объем» резонатора.

Все кривые  $\kappa_{0nm}(\theta)$  в зонах возбуждения резонатора имеют одинаковый характер: на краях областей существования  $\kappa'$  уменьшается,  $\kappa''_{0nm}$  в точках срыва колебаний обращается в нуль; возрастанию  $\kappa'_{0nm}$  соответствует и существенное увеличение  $|\kappa''_{0nm}|$ , т. е. в центре зон возбуждения

добротность колебаний  $Q_{0nm} = |\kappa'_{0nm} / 2\kappa''_{0nm}|$  имеет минимум.

Необычным является поведение  $\kappa''_{031}$  в области средних значений  $\theta$  (для колебаний типа  $H_{03m}$  существуют уже три зоны возбуждения). В окрестности точки  $\theta_c$  величина  $|\kappa''_{031}(\theta)|$  имеет минимум ( $\sim 0.001$ ), т. е. происходит значительное увеличение добротности. Поскольку торец узкого волновода находится в узле поля  $E_{\varphi}(r)|_{z=0, z=l}$  волны  $H_{02}$  и она «высвечивается» в подводящие волноводы, то в резонаторе остаются лишь  $H_{01}$ - и  $H_{03}$ -волны. При частотах, соответствующих колебаниям  $H_{031}$ , коэффициент отражения  $H_{03}$ -волны оказывается максимальным.

На фиг. 3 представлены кривые  $\kappa_{0nm}(L)$  при  $\theta = \theta_c$ . В отличие от задачи о скачкообразном расширении [5], здесь существует значительная область молчания резонатора  $v_2/2\pi\theta \leq \kappa' \leq v_2/2\pi$ , поэтому четко разнесены область, где  $\kappa_{01m}'' = 0$  (подводящие волноводы запредельны), и область, где существуют дифракционные потери, причем открыты сразу все четыре канала излучения (режим  $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ). Колебания  $H_{02m}$  в этом случае не возбуждаются. Значительно шире, чем при других  $\theta$ , становится частотная полоса перестройки в режиме  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , что оказывается полезным при конструировании запредельных резонаторов. Колебания  $H_{03m}$  при рассматриваемом  $\theta$  имеют в среднем более высокую добротность, чем колебания этого же типа при больших или меньших  $\theta$ . Таким образом, средний диапазон  $\theta$  оказывается оптимальным при работе к. в. р. на колебаниях  $H_{01m}$  и  $H_{03m}$ .

Кривые  $\kappa_{0nm}(L)$  при  $\theta < \theta_c$  и  $\theta > \theta_c$  по своему характеру аналогичны подобным зависимостям для скачкообразного расширения круглого волновода [5], поскольку при таких  $\theta$  в значительном диапазоне один из каналов излучения остается закрытым и к. в. р. превращается в резонатор с двумя каналами излучения.

Отметим еще одну особенность, связанную с тем, что спектральные характеристики к. в. р., попадающие в область  $\kappa'_{0nm} < v_1/2\pi\theta$  и  $\kappa'_{0nm} < \mu_1/2\pi$ , обладают некоторой симметрией относительно линии  $\theta = \theta_c$ . Это объясняется эквивалентным влиянием на резонансное поле, которое оказывают в качестве каналов излучения круглый и коаксиальный волноводы в ситуации, когда один из них запредельный. Единственное различие состоит в том, что когда каналом излучения служит круглый волновод, добротность колебаний несколько меньше, чем когда излучение происходит в коаксиальный волновод, т. е. у к. в. р. дифракционная связь с круглым волноводом больше, чем с коаксиальным.

Полученное строгое решение задачи о спектре собственных колебаний к. в. р. и соответствующий эффективный вычислительный алгоритм могут представлять собой основу для исследования спектральных характеристик более сложных резонансных устройств данного класса. С небольшими изменениями этот алгоритм может быть использован для нахождения собственных частот аналогичных структур в прямоугольных и коаксиальных волноводах.

#### Литература

1. *Ogushi B.* Circular electric mode directional coupler.— IRE Trans., MTT, 1960, v. 8, № 6, p. 660–666.
2. *Wenger N. C.* Resonant frequency of open-ended cylindrical cavity.— IEEE Trans. MTT, 1967, v. 15, № 6, p. 334–340.
3. *Вайслейб Ю. В.* Дифракция электромагнитных волн на кольцевой щели во внутренней трубе коаксиального волновода.— Радиотехн. и электроника, 1975, т. 20, № 7, с. 1362–1369.
4. *Кабачков Л. Т.* Резонансные явления в отрезке нагруженного запредельного волновода.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1977, т. 20, № 5, с. 30–35.
5. *Кирилленко А. А., Яшина Н. П.* О связи резонансов на «запертых» модах с возбуждением квазисобственных режимов незамкнутых объемов.— Письма в ЖТФ, 1980, т. 6, № 24, с. 1511–1516.
6. *Велиев Э. И., Шестопапов В. П.* Рассеяние  $H_{01}$ -волны прямоугольного волновода цилиндром с продольной щелью.— Ж. техн. физ., 1979, т. 49, № 6, с. 1167–1177.

7. Кириленко А. А., Шестопалов В. П., Яшина Н. П. Строгое решение задачи о круглом волноводе со скачком поперечного сечения. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1977, т. 17, № 6, с. 1482–1493.
8. Поединчук А. Е. К спектральной теории открытых двумерных резонаторов с диэлектрическими включениями. — Докл. АН УССР, сер. А, 1984, № 1, с. 66–70.
9. Харди Г. Г., Литтлвуд Д. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Изд-во иностр. лит., 1948.
10. Сиренко Ю. К. К обоснованию метода полуобращения матричных операторов в задачах дифракции волн. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1983, т. 23, № 6, с. 1381–1391.
11. Грэй Э., Мэтьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения в физике и механике. М.: Изд-во иностр. лит., 1953.
12. Яшина Н. П. Рассеяние электромагнитных волн на некоторых скачкообразных неоднородностях в круглых волноводах: Дис. ... канд. физ.-матем. н. Харьков: ХГУ, 1979.
13. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1965.
14. Гохберг И. Ц. О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра. — Докл. АН СССР, 1951, т. 178, № 4, с. 629–633.
15. Вайникко Г. М., Карма О. О. О быстрой сходимости приближенных методов в проблеме собственных значений с нелинейным вхождением параметра. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 6, с. 1393–1404.
16. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 18.VIII.1984  
 Переработанный вариант 16.I.1985