О. М. Фоменко, Оценки внутреннего произведения Петерсона с приложением к теории кватернарных квадратичных форм,
Докл. АН СССР, 1963, том 152, номер 3, 559–562

https://www.mathnet.ru/dan28592

Доклады Академии наук СССР
1963. Том 152, № 3

МАТЕМАТИКА

О. М. ФОМЕНКО

ОЦЕНКИ ВНУТРЕННЕГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ПЕТЕРСОНА С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ТЕОРИИ КВАТЕРНАРНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 IV 1963)

Пусть $E(x_1, \ldots, x_4)$ — положительно определенная кватернарная квадратичная форма с целыми рациональными коэффициентами, имеющими общим наибольшим делителем 1; F — матрица формы; D — дискриминант; q — ступень формы; $C_1, C_2, \ldots$ — абсолютные положительные константы, причем все они являются эффективными; $\tau = x + iy$ — комплексная переменная, $y > 0$; $\Gamma(1) \supset \Gamma_0(q) \supset \Gamma(q)$ — хорошо известные группы целочисленных унимодулярных матриц второго порядка ([1]); $\sigma, \sigma_i, \sigma_j, \sigma_i^{(0)}$ — матрицы из $\Gamma(1)$; $t =$ н.о.д. $\left(q, \frac{\overline{L}FL}{2q}\right)$, причем $\overline{L}$, а также $\overline{L}^{(1)}, \overline{L}^{(2)}, \overline{N}, \overline{G}, \overline{X}$ означают четырехмерные целочисленные векторы;

$$\vartheta_F(\tau/L) = \sum_N \exp\left(\pi i \tau\left(\overline{N} + \frac{\overline{L}}{q}\right) F\left(N + \frac{L}{q}\right)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_F(n, L) \exp\left(\frac{2\pi i \tau t n}{q}\right)$$

тэта-ряд; $\vartheta_F(\tau/L) = E_F(\tau/L) + S_F(\tau/L)$ ([2]), где $E_F(\tau/L)$ — ряд Эйзенштейна; $S_F(\tau/L)$ — целая параболическая форма; $\varepsilon_F(n, L)$, $\omega_F(n, L)$ — коэффициенты при $\exp(2\pi i\tau tn/q)$ в разложении этих форм. Очевидно, $\alpha_F(n, L)$ равно количеству целочисленных решений уравнения

$$2qtn = (q\overline{X} + \overline{L})\, F\, (qX + L).$$

Напомним общий факт ([3]), что пространство целых параболических форм размерности $-2k$, принадлежащих подгруппе G группы Γ в (1) конечного индекса, есть гильбертово пространство конечной размерности с внутренним произведением Петерсона

$$(f, g) = \iint_{D_G} f(\tau)\, \overline{g(\tau)}\, y^{2(k-1)}\, dx\, dy,$$

где D_G — фундаментальная область для группы G. Цель настоящей заметки — оценить некоторые внутренние произведения целых параболических форм, связанных с представлением числа формой F, и получить отсюда некоторые арифметические следствия. Айхлер ([4]) дал для остаточного члена $\omega_F(n, 0)$ неулучшаемую в смысле n оценку, показав, что

$$|\omega_F(n, 0)| < c_{F,\varepsilon}\, n^{1/2+\varepsilon}, \qquad (n, Q) = 1.$$

Этот результат обобщили Шимура ([5]) и А. Н. Андрианов ([6]), показавшие, что

$$|\omega_F(n, L)| < c_{F,L}\, \tau(n)\sqrt{n}, \qquad (n, Q) = 1,$$

где $\tau(n)$ — количество делителей числа n; Q — некоторое целое число. Однако зависимость постоянной $c_{F,\varepsilon}$ (и $c_{F,L}$) от формы не была выяснена, что, в частности, не давало возможности судить, начиная с какого места число n представимо формой F. На основании оценок внутреннего произведения Петерсона целых параболических форм мы выясняем эту зависимость для случая $\overline{L} = 0$. Общий случай исследуется аналогично.

Из результатов Петерсона ([7]) следует, что пространство $\mathfrak{S}\left(q, \left(\frac{D}{a}\right), q\right)$ целых параболических форм вида $\{\Gamma(q), -2\}$ имеет базис $f_i(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_i(n)\, e^{2\pi i n \tau}$ $(i = 1, 2, \ldots, g)$, состоящий из собственных функций всех операторов Гекке T_n ([8]), где $(n, q) = 1$, действующих на этом пространстве, который является ортогональным, причем $\tau_i(1) = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, g)$. Известно ([3]), что $g < C_1 q^3$.

Л е м м а 1. *Пусть $f(\tau)$, $\varphi(\tau)$ — модулярные формы размерности — $2k$; Φ — некоторая область в верхней полуплоскости τ-плоскости. Тогда*

$$\iint_{\sigma\Phi} f(\tau)\, \overline{\varphi(\tau)}\, y^{2(k-1)}\, dx\, dy = \iint_{\Phi} f(\tau)/\sigma \cdot \overline{\varphi(\tau)/\sigma}\, y^{2(k-1)}\, dx\, dy$$

(*предполагается, что, по крайней мере, один из интегралов сходится*).

Л е м м а 2.

$$(f_i(\tau), f_i(\tau)) > \frac{1}{4\pi e^{4\pi}}\, q\varphi(q) \quad (i = 1, 2, \ldots, g). \tag{1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\Gamma_0(q) = \Gamma(q)\sigma_1' \cup \Gamma(q)\sigma_2' \cup \ldots \cup \Gamma(q)\sigma_{g_1}'$, где $g_1 = q\varphi(q)$. Тогда ([3]) $D = \sigma_1' D^{(0)} \cup \sigma_2' D^{(0)} \cup \ldots \cup \sigma_{g_1}' D^{(0)}$, где $D^{(0)}$, D — фундаментальные области соответственно для групп $\Gamma_0(q)$, $\Gamma(q)$. Применяя лемму 1, имеем

$$(f_i(\tau), f_i(\tau)) = \iint_{D} f_i(\tau)\, \overline{f_i(\tau)}\, dx\, dy = \sum_{\sigma_j', D^{(0)}} \iint_{D^{(0)}} f_i(\tau)/\sigma_j' \cdot \overline{f_i(\tau)/\sigma_j'}\, dx\, dy.$$

Так как $f_i(\tau)$ — формы характера D/a, [последняя сумма равна $q\varphi(q) \iint_{D^{(0)}} f_i(\tau)\, \overline{f_i(\tau)}\, dx\, dy$. Далее

$$\iint_{D^{(0)}} f_i(\tau)\, \overline{f_i(\tau)}\, dx\, dy > \iint_{D_0} f_i(\tau)\, \overline{f_i(\tau)}\, dx\, dy > \frac{1}{4\pi e^{4\pi}},$$

где D_0 — фундаментальная область для группы $\Gamma(1)$ и можно считать ([3]), что она состоит из точек τ с условиями $|\tau| > 1$, $x < {}^1/_2$; $D^{(0)}$ выбирается так, что $D_0 \subset D^{(0)}$.

З а м е ч а н и е. По-видимому, имеет место более сильное неравенство $(f_i(\tau), f_i(\tau)) > C_2 q^3$, однако мы пока не можем получить этот результат.

Л е м м а 3.

$$(S_F(\tau), S_F(\tau)) < C_3 q^7. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g^2 = q^3 \prod_{p/q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$. Известно ([3]), что $\Gamma(q)$ является нормальным делителем группы $\Gamma(1)$ с индексом g_2. Пусть

$$\Gamma(1) = \Gamma(q)\sigma_1 \cup \Gamma(q)\sigma_2 \cup \ldots \cup \Gamma(q)\sigma_{g_2}, \qquad \sigma_i = \begin{pmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ \gamma_i & \delta_i \end{pmatrix}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, g_2).$$

Можно считать, что $1 \leqslant \gamma_i \leqslant q$. В соответствии с этим однозначно определяется и область D, ибо $D = \sigma_1 D_0 \cup \sigma_2 D_0 \cup \ldots \cup \sigma_{g_2} D_0$. Из системы представителей σ $(i = 1, 2, \ldots, g_2)$ выберем полную подсистему элементов $\sigma_i^{(0)}$, не эквивалентных относительно соотношения эквивалентности $\sigma_{i_1}^{(0)} \sim \sigma_{i_2}^{(0)}$, которое равносильно равенству

$$\sigma_{i_1}^{(0)} = \sigma_{i_2}^{(0)} \mathfrak{p}_k, \quad \text{где } \mathfrak{p}_k \in \Gamma(q) \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (k = 0, 1, \ldots, q-1).$$

Число элементов в такой подсистеме равно $g_3 = q^2 \prod_{p/q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$. Сдвигая D_0 вправо на $1, 2, \ldots, q$ и объединяя полученные области, имеем новую область ширины q, которую обозначим через D_1. Пусть P — часть верхней полуплоскости τ-плоскости, ограниченная прямыми $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{2q-1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Очевидно, $D_1 \subset P$. Пусть $\sigma_i^{(0)} = \begin{pmatrix} \alpha_i^{(0)} & \beta_i^{(0)} \\ \gamma_i^{(0)} & \delta_i^{(0)} \end{pmatrix}$ $(i = 1, 2, \ldots, g_3)$. Легко видеть, что

$$(S_F(\tau), S_F(\tau)) = \sum_{i=1}^{g_3} \iint_{D_1} S_F(\tau)/\sigma_i^{(0)} \cdot \overline{S_F(\tau)/\sigma_i^{(0)}}\, dx\, dy.$$

Для формы $S_F(\tau)$ верна формула обращения (соответствующую формулу для ϑ-рядов см. в ([9])):

$$S_F(\tau)/\sigma_i^{(0)} =$$

$$= \frac{1}{(-1)(\gamma_i^{(0)})^2 \sqrt{D}} \sum_{\substack{L \bmod q \\ FL \equiv 0 \pmod q}} \exp\left(-\pi i \beta_i^{(0)} \frac{\delta_i^{(0)} \overline{L} F L}{q^2}\right) \varphi(\delta_i^{(0)} L, 0)\, S(\tau/L),$$

где

$$\varphi(\delta_i^{(0)} L, 0) = \sum_{\substack{G \bmod (\gamma_i^{(0)} q) \\ G \equiv \delta_i^{(0)} L (\text{mod } q)}} \exp\left(\pi i \alpha_i^{(0)} \frac{\overline{G} F G}{\gamma_i^{(0)} q^2}\right).$$

Очевидно, $|\varphi(\delta_i^{(0)} L, 0)| \leqslant (\gamma_i^{(0)})^4$. Теперь легко получить неравенство

$$(S_F(\tau), S_F(\tau)) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\sigma_i^{(0)} \\ i=1, 2, \ldots, g_3}} \frac{(\gamma_i^{(0)})^4}{D} \sum_{\substack{L^{(1)} \bmod q \\ FL^{(1)} \equiv 0 \pmod q}} \sum_{\substack{L^{(2)} \bmod q \\ FL^{(2)} \equiv 0 \pmod q}} \left| \iint_P S(\tau/L^{(1)}) \overline{S(\tau/L^{(2)})}\, dx\, dy \right|.$$

Остается оценить $\iint_P S(\tau/L^{(1)}) \overline{S(\tau/L^{(2)})}\, dx\, dy$. Имеем

$$S(\tau/L) = \sum_{n=1}^{n} \omega_F(n, L) \exp\left(\frac{2\pi i t n \tau}{q}\right).$$

Но $\omega_F(n, L) = \alpha_F(n, L) - \varepsilon_F(n, L)$. Исходя из геометрических соображений, легко получить оценку $\alpha_F(n, L) < C_4 \frac{n^2 t^2}{q^2 \sqrt{D}}$. Пользуясь базисом пространств рядов Эйзенштейна размерности -2, который в явном виде получил Гекке ([2]), легко показать, что $\varepsilon_F(n, L) < C_5 \frac{ntq}{\sqrt{D}}$, откуда при

$n > C_6 q^4$ получаем $|\omega_F(n, L)| < C_7 \frac{n^2 t^2}{q^2 \sqrt{D}}$. С помощью этой оценки доказываем, что

$$\left| \iint\limits_P S(\tau / L^{(1)}) \overline{S(\tau / L^{(2)})} \, dx \, dy \right| < C_8 \frac{q}{D}. \qquad (3)$$

Пользуясь леммой о числе решений сравнения $FL \equiv 0 \pmod q$ ([10]) и (3), легко получаем (2).

Теорема 1.

$$|\omega_F(n, 0)| < C_9 q^4 \ln \ln q \sqrt{n} \, \tau(n). \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть $S_F(\tau) = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i f_i(\tau)$. Из результатов работ ([4-6], [11]) следует, что $|\tau_i(n)| \leqslant \tau(n) \sqrt{n}$, $(n, q) = 1$. Так как

$$(S_F(\tau), S_F(\tau)) = \sum_{i=1}^{g} |\alpha_i|^2 (f_i(\tau), f_i(\tau)),$$

утверждение теоремы следует из лемм 2 и 3.

Теорема 2. *Пусть $n > C_{10} D^{14,01}$ — нечетное число и выполнены некоторые естественные конгруэнциальные условия (см. ([12])). Тогда n представимо формой F и для числа представлений имеет место асимптотическая формула.*

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
2 IV 1963

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Hecke, Kgl. Danske Vid. Selskab., 13, № 12, 1 (1940). [2] E. Hecke, Abh. Math. Seminar Hamburger Univ., 5, 199 (1927). [3] R. C. Gunning, Lectures on Modular Forms, Princeton, 1962. [4] M. Eichler, Arch. Math., 5, 355 (1954). [5] G. Shimura, J. Math. Soc. Japan, 10, 1 (1958). [6] А. Н. Андрианов, ДАН, 141, № 1, 9 (1961). [7] H. Petersson, Math. Ann., 117, № 1, 39 (1939). [8] H. Hecke, Math. Ann., а) 114, 1 (1937); б) 114, 316 (1937). [9] W. Pfetzer, Arch. Math., 6, 448 (1953). [10] M. Eichler, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin, 1952. [11] J. Igusa, Am. J. Math., 81, № 3, 576 (1959). [12] А. В. Малышев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 65 (1962).