П. Самовол, М. Аппельбаум, А. Жуков, Как построить парадоксальный пример,
Квант, 2005, номер 1, 35–36

https://www.mathnet.ru/kvant3302

Как построить парадоксальный пример

П.САМОВОЛ, М.АППЕЛЬБАУМ, А.ЖУКОВ

На математических олимпиадах иногда встречаются задачи с парадоксальной формулировкой. Так, на одной из заочных олимпиад была предложена такая задача.

Задача 1. *Один человек каждый месяц записывал свой доход и расход. Возможно ли, чтобы за любые пять идущих подряд месяцев его общий расход превышал доход, а в целом за год его доход превысил расход?* [1]

С первого взгляда кажется, что такого не может быть. Однако после некоторого обдумывания удается построить пример, удовлетворяющий условию задачи.

Пусть ежемесячное сальдо – разность дохода и расхода – принимает только два значения: $x > 0$ и $y < 0$. Построим числовую последовательность, располагая в строку числа x и y таким образом, чтобы на любом отрезке длины 5 встречалось только одно значение y, например

$$x,\ x,\ x,\ x,\ y,\ x,\ x,\ x,\ x,\ y,\ x,\ x.$$

Далее потребуем, чтобы сумма чисел на отрезке длины 5 была отрицательной: $y + 4x < 0$, а сумма всех 12 членов последовательности – положительной: $2y + 10x > 0$. Отсюда получаем

$$-5x < y < -4x.$$

Достаточно взять, скажем, $x = 2$, $y = -9$.

В разобранной задаче речь шла о промежутке времени в 1 год. А сколько вообще времени может длиться описанная ситуация? В связи с этим рассмотрим такую задачу.

Задача 2 (по мотивам одной из задач XIX Международной математической олимпиады [2]). *В некоторой последовательности действительных чисел сумма любых семи идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых одиннадцати идущих подряд членов положительна.*

а) Какое наибольшее количество членов может быть в такой последовательности?

б) Постройте последовательность из 16 чисел с указанным свойством.

Решать пункт б) этой задачи также можно методом подбора, хотя здесь уже надо проявить некоторую долю изобретательности. Но можно подойти к его решению и совершенно стандартно.

Например, давайте найдем последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{16}$, подчиняющихся условиям:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 = -b,$$
$$x_2 + x_3 + \ldots + x_8 = -b,$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$x_{10} + x_{11} + \ldots + x_{16} = -b,$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{11} = a,$$
$$x_2 + x_3 + \ldots + x_{12} = a,$$
$$\ldots$$
$$x_6 + x_7 + \ldots + x_{16} = a,$$

где параметры a и b – некоторые положительные числа.

Упражнение 1. Решите систему этих уравнений.

Тот, кто повозится с этой системой, сможет оценить трудоемкость данного способа. Ниже мы покажем другой способ, позволяющий существенно упростить поиск примера к задаче 2,б). Но прежде давайте разберемся в решении пункта а) – оно нам подскажет направление поиска.

Рассмотрим более общую постановку вопроса. Пусть в строку выписано m чисел. Назовем сумму q идущих подряд чисел этой строки q-суммой. Последовательность, любая n-сумма которой имеет один знак, а любая k-сумма – другой знак, назовем $\{n,k\}$-последовательностью.

Задача 3. *Докажите, что число m выписанных членов $\{n,k\}$-последовательности не превышает величины $n + k - d - 1$, где d – наибольший общий делитель чисел n и k.*

Прежде всего заметим, что числа n и k не могут быть кратны друг другу (убедитесь в этом). Сначала мы докажем, что не существует $\{n,k\}$-последовательности из m чисел, если $m > n + k - d - 1$.

Предположим, нашлась нужная строка из $n + k - d$ чисел. Выберем из чисел n и k меньшее – пусть это будет, например, k. Вычеркнем первые k чисел. Тогда в строке из оставшихся $n - d$ чисел все k-суммы по-прежнему имеют один знак, а все $(n - k)$-суммы имеют другой знак (обдумайте последнее утверждение, рассуждая методом от противного). Поскольку

$$n - d = (n - k) + k - d,$$

то мы от $\{n,k\}$-последовательности перешли к $\{n-k,k\}$-последовательности. Повторяя этот спуск дальше, мы будем получать уменьшающиеся по длине последовательности в соответствии с цепочкой $\{n,k\} \to \{n_1,k_1\} \to \{n_2,k_2\} \to \ldots \to \{n_l,k_l\}$, где одно из чисел n_l или k_l в конце концов окажется равным d, а другое – кратным ему. Но это невозможно – противоречие.

Ясно, что если не существует строки из $n + k - d$ чисел, удовлетворяющей условию, то нельзя выписать и более длинную такую строку.

Пример с количеством $n + k - d - 1$ членов последовательности возможен. Мы будем искать его среди таких последовательностей, члены которых могут принимать только два значения x и y, величины которых мы подберем позже. «Путеводной звездой» нам будет служить цепочка пар чисел $(n,k) \to (n_1,k_1) \to (n_2,k_2) \to \ldots \to (n_l,k_l)$ из предыдущих рассуждений. Учитывая ее важность для дальнейшего, назовем эту цепочку *определяющей*. Эта цепочка реализует знаменитый алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя d чисел n и k. В самом деле, $d = |n_l - k_l|$. Сейчас, однако, мы используем эту цепочку в иных целях – для конструирования нужной нам последовательности, причем, создавая эту последовательность, мы будем двигаться от конца определяющей цепочки к ее началу.

Сначала, располагая парой чисел (n_l,k_l), построим последовательность

$$x,\ x,\ \ldots,\ x,\ y,\ x,\ \ldots,\ x,\ x. \qquad (*)$$

Количество чисел x слева от величины y такое же, как и справа, и равно $\begin{cases} n_l - 1, \text{ есл, } k_l > n_l, \\ k_l - 1, \text{ есл, } n_l > k_l. \end{cases}$

По аналогии с предыдущим, будем называть конечную последовательность выписанных в строку чисел $[p, q]$-последовательностью, если любая ее часть, составленная из p подряд идущих членов, содержит одно и то же количество букв y, а любая ее часть, составленная из q подряд идущих членов, также содержит одно и то же количество букв y (эти количества могут отличаться). Очевидно, последовательность (∗) является $[n_l, k_l]$-последовательностью: любая ее часть, составленная из n_l и k_l идущих подряд членов, содержит ровно одну букву y. Данное определение в некотором смысле характеризует *однородность* распределения букв y в последовательности.

Отправляясь от базовой последовательности (∗), далее будем наращивать количество членов последовательности, руководствуясь следующим правилом. Предположим, уже построена $[n_i, k_i]$-последовательность символов x и y, соответствующая паре чисел (n_i, k_i) из определяющей цепочки. Заметим, что пара чисел (n_i, k_i) могла быть получена из предыдущей пары (n_{i-1}, k_{i-1}) двояко: либо $n_i = n_{i-1} - k_{i-1}$, либо $k_i = k_{i-1} - n_{i-1}$.

Разберем первый случай (второй рассматривается аналогично). Для наращивания строки символов зафиксируем ее первые k_{i-1} символов и допишем их (продублировав) к строке слева. Докажем, что в результате получится $[n_{i-1}, k_{i-1}]$-последовательность.

Любая часть вновь полученной последовательности, составленная из $k_{i-1} = k_i$ подряд идущих членов, как и в предыдущей последовательности, содержит одно и то же количество букв y. *Любую* часть новой последовательности, составленную из $n_{i-1} = n_i + k_{i-1}$ подряд идущих членов, можно представить состоящей из двух частей: правой подстроки из n_i символов и левой подстроки из k_{i-1} символов. *Каждая* из этих подстрок имеет фиксированное количество букв y, поэтому и вся часть имеет фиксированное количество букв y, где бы мы ее ни взяли.

Решим теперь задачу 2,б).

Поскольку $(7, 11) \to (7, 4) \to (3, 4)$, то на первом шаге алгоритма строим последовательность

$$x,\ x,\ y,\ x,\ x.$$

На втором шаге получаем последовательность

$$x,\ x,\ y,\ x,\ x,\ x,\ y,\ x,\ x,$$

а на третьем –

$$x,\ x,\ y,\ x,\ x,\ x,\ y,\ x,\ x,\ y,\ x,\ x,\ x,\ y,\ x,\ x.$$

Поскольку сумма любых семи идущих подряд членов должна быть отрицательной, а сумма любых одиннадцати – положительной, то должны выполняться неравенства:

$$\begin{cases} 2y + 5x < 0, \\ 3y + 8x > 0, \end{cases} \text{ откуда } -\frac{5}{2}x > y > -\frac{8}{3}x.$$

Можно взять, например, $x = 5$, $y = -13$.

Для обоснования корректности приведенного выше алгоритма осталось убедиться в том, что система неравенств, накладываемых в общем случае на значения величин x и y, всегда совместна. Предлагаем читателям сделать это самостоятельно, выполнив следующее упражнение.

Упражнение 2. Пусть в результате изложенного выше алгоритма построена последовательность из символов x и y. Обозначим через a количество букв y в любой ее части, составленной из n идущих подряд членов, через b – количество букв y в любой ее части, составленной из k идущих подряд членов. Докажите, что система неравенств

$$\begin{cases} ay + (n-a)x > 0, \\ by + (k-b)x < 0, \end{cases}$$

так же, как и система неравенств

$$\begin{cases} ay + (n-a)x < 0, \\ by + (k-b)x > 0, \end{cases}$$

совместна.

Упражнение 3. Про некоторую последовательность из 23 действительных чисел известно, что в ней сумма любых 10 записанных подряд чисел отрицательна, а сумма любых k записанных подряд чисел положительна. Чему равно k, если количество членов в этой последовательности максимально возможное? Приведите пример.

Упражнение 4. Для последовательности действительных чисел, записанных в строчку, выполняются следующие условия: сумма любых n идущих подряд членов отрицательна, а сумма любых k идущих подряд членов положительна. Известно, что максимальное число членов последовательности равно 30. Найдите максимум возможной разности $|k - n|$. Приведите пример, удовлетворяющий условию задачи.

Задача 4. *Про интегрируемую функцию $f(x)$ на отрезке $[0; c]$ известно, что любой определенный интеграл по отрезку длины n положителен, а по отрезку длины m отрицателен, $c > m > n > 0$. Пусть $\frac{m}{n} = \frac{q}{p}$ – несократимая дробь, т.е. p, q – взаимно простые натуральные числа. Докажите, что $c < m + n - \frac{m}{q}$.*

Обозначим $d = \frac{m}{q} = \frac{n}{p}$, так что $n = pd$, $m = qd$. Предположим, что $c \ge m + n - \frac{m}{q} = (p + q - 1)d$. Для любого натурального k такого, что $kd \le c$, обозначим $S_k = \int\limits_{(k-1)d}^{kd} f(x)\,dx$ и рассмотрим числовую последовательность, состоящую из $p + q - 1$ членов: $S_1, S_2, \ldots, S_{p+q-1}$. Несложно проверить, что в соответствии с условием задачи эта последовательность обладает следующими свойствами:

1) сумма любых подряд идущих p ее членов положительна;

2) сумма любых подряд идущих q ее членов отрицательна.

В соответствии с результатом задачи 3, такая последовательность не может содержать больше чем $p + q - 2$ членов. Полученное противоречие завершает доказательство.

Упражнение 5. Про заданную на отрезке $[0; 23]$ функцию $f(x)$ известно, что любой определенный интеграл от нее по отрезку длины 10 положителен, а по отрезку длины 16 отрицателен. Может ли такое быть? Как изменится ответ, если $x \in [0; 24]$?

Подсказка. Воспользуйтесь результатом упражнения 3. Функцию $f(x)$ можно определить как ступенчатую, принимающую только два значения 7 и −29.

Упражнение 6. Существует ли непрерывная функция $y = f(x)$ такая, что любой определенный интеграл от функции по отрезку $n = 3$ отрицателен, а по отрезку $n = 5$ положителен?

Литература

1. *Н.Б.Васильев, В.Л.Гутенмахер, Ж.М.Раббот, А.Л.Тоом.* Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1987, с.105, 108–109.

2. Международные математические олимпиады. Составители *А.А.Фомин, Г.М.Кузнецова.* – М.: Дрофа, 2000, с.5, 34–35.

3. *В.Произволов, А.Спивак.* Усреднение по окружности. – Журнал «Квант», 1998, №1, с.29–31.