S. V. Agapov, A. A. Valyuzhenich, V. V. Shubin, Some remarks on high degree polynomial integrals of the magnetic geodesic flow on the two-dimensional torus, *Sibirsk. Mat. Zh.*, 2021, Volume 62, Number 4, 715–720

DOI: 10.33048/smzh.2021.62.401

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2021. Том 62, № 4

УДК 517.938

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛАХ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ МАГНИТНОГО ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ПОТОКА НА ДВУМЕРНОМ ТОРЕ

С. В. Агапов,
А. А. Валюженич, В. В. Шубин

Аннотация. Исследуется магнитный геодезический поток на двумерном торе, обладающий дополнительным полиномиальным по импульсам первым интегралом высокой степени, не зависящим от интеграла энергии. В более ранней работе первых двух авторов было анонсировано, что если такой интеграл сохраняется на достаточно большом количестве различных уровней энергии, то в этом случае обязательно существует линейный интеграл на всех уровнях энергии. Приведенное в той же работе доказательство этого утверждения было неполным. В данной работе завершается доказательство вышеприведенного утверждения.

DOI 10.33048/smzh.2021.62.401

Ключевые слова: магнитный геодезический поток, полиномиальный первый интеграл.

1. Введение

Магнитный геодезический поток на двумерной поверхности с римановой метрикой $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ задается гамильтоновой системой

$$\dot{x}^j = \{x^j, H\}_{mg}, \quad \dot{p}_j = \{p_j, H\}_{mg}, \quad H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j, \quad j = 1, 2, \tag{1.1}$$

магнитная скобка Пуассона имеет вид

$$\{F, H\}_{mg} = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i}\right) + \Omega(x^1, x^2)\left(\frac{\partial F}{\partial p_1}\frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial F}{\partial p_2}\frac{\partial H}{\partial p_1}\right),$$

где $\omega = \Omega(x^1, x^2)\, dx^1 \wedge dx^2$ — замкнутая 2-форма, которая задает магнитное поле. Геодезический поток (1.1) *вполне интегрируем*, если существует дополнительный первый интеграл, т. е. такая функция $F(x^1, x^2, p_1, p_2)$, что $\frac{dF}{dt} = \{F, H\}_{mg} \equiv 0$, при этом F и H функционально независимы почти всюду.

Исследованию интегрируемых магнитных геодезических потоков на различных конфигурационных пространствах посвящено большое количество работ (соответствующие ссылки можно найти в [1]). Мы приведем здесь некоторые результаты, относящиеся к двумерному тору. Интегрируемость одновременно на всех уровнях энергии имеет место лишь в следующих случаях.

Исследование первого автора выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19–11–00044).

Пример 1. Пусть метрика и магнитное поле имеют вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \quad \omega = B dx \wedge dy, \quad B = \mathrm{const} \neq 0.$$

Тогда магнитный геодезический поток (1.1) вполне интегрируем и существует первый интеграл вида

$$F_0 = \cos\left(\frac{p_1}{B} - y\right).$$

Пример 2. Пусть метрика и магнитное поле имеют вид

$$ds^2 = \Lambda(y)(dx^2 + dy^2), \quad \omega = -u'(y)\, dx \wedge dy.$$

Тогда магнитный геодезический поток (1.1) вполне интегрируем и существует линейный по импульсам первый интеграл вида $F_1 = p_1 + u(y)$.

В [2] установлено, что квадратичный интеграл (с аналитическими периодическими коэффициентами) геодезического потока (1.1) в ненулевом магнитном поле на двух различных уровнях энергии всегда сводится к линейному интегралу F_1 на всех уровнях. При этом если магнитное поле равно нулю, то, как известно, на двумерном торе существуют метрики Лиувилля, геодезический поток которых обладает дополнительным квадратичным интегралом (см., например, [3]). Таким образом, при наличии магнитного поля интегрируемость одновременно на нескольких уровнях энергии является весьма ограничительным требованием. Связь между полиномиальной интегрируемостью на конечном числе уровней энергии и на всех уровнях установлена в [1]; несколько более точная оценка была получена позднее в [4].

Стоит отметить, что на фиксированном уровне энергии на двумерном торе существуют интегрируемые примеры, отличные от примеров 1, 2. В [5, 6] построены примеры квадратичного по импульсам первого интеграла, не зависящего от интеграла энергии. Вопрос о существовании интегралов степени выше двух на одном уровне энергии, насколько нам известно, остается открытым.

2. Полиномиальные интегралы на различных уровнях энергии

В этом разделе вкратце изложим результаты, полученные в [1]. Основной результат в [1] заключается в следующем.

Теорема 1. *Предположим, что геодезический поток* (1.1) *на двумерном торе в ненулевом магнитном поле обладает дополнительным полиномиальным по импульсам первым интегралом F произвольной степени N с аналитическими периодическими коэффициентами на M попарно различных уровнях энергии $\{H = E_1\}, \dots, \{H = E_M\}$. Тогда если $N = 3$, $M = 2$ или $N = 4$, $M = 3$, или $N > 4$, $M = N + 2$, то магнитное поле и метрика являются функциями одного аргумента и существует линейный по импульсам первый интеграл F_1 на всех уровнях энергии.*

Приведем схему доказательства теоремы 1. Имеет место

Лемма 1. *Предположим, что магнитный геодезический поток* (1.1) *на двумерном торе обладает полиномиальным интегралом F произвольной степени N на $N + 2$ попарно различных уровнях энергии $\{H = E_1\}, \dots, \{H = E_{N+2}\}$. Тогда F является первым интегралом того же самого потока одновременно на всех уровнях энергии.*

Далее, пусть первый интеграл имеет следующий вид:

$$F = \sum_{s=0}^{N} \sum_{k=0}^{s} a_{s,k}(x,y) p_1^{s-k} p_2^k. \tag{2.1}$$

Коэффициенты $a_{s,k}(x,y)$ — аналитические функции, периодические по обеим переменным. Обозначим

$$\alpha_j = a_{N-j,0} - a_{N-j,2} + a_{N-j,4-\ldots}, \quad \beta_j = a_{N-j,1} - a_{N-j,3} + a_{N-j,5-\ldots},$$

где $a_{m,n} = 0$ при $m < n$. Заметим, что $\beta_N = 0$, а α_0, β_0 — константы Колокольцова. Положим $\alpha_0 = -1$, $\beta_0 = 0$ и обозначим $\alpha_1 = f$, $\beta_1 = g$.

Лемма 2. *Если геодезический поток* (1.1) *на двумерном торе в ненулевом магнитном поле допускает первый интеграл* (2.1) *на всех уровнях энергии, то имеют место следующие соотношения:*

$$N\alpha_{j_x} - N\beta_{j_y} - (N+1-j)\beta_{j-1}(f_y + g_x) = 0, \tag{2.2}$$

$$N\alpha_{j_y} + N\beta_{j_x} + (N+1-j)\alpha_{j-1}(f_y + g_x) = 0, \tag{2.3}$$

где $j = 1, \ldots, N$. *Кроме того,*

$$f_x = g_y, \quad \Omega(x,y) = \frac{1}{N}(f_y + g_x), \quad (\alpha_{N-1}\Lambda)_x + (\beta_{N-1}\Lambda)_y = 0. \tag{2.4}$$

Доказательства этих технических лемм можно найти в [1]. Соотношения (2.2)–(2.4) ключевые для дальнейших рассуждений. Перекрестным дифференцированием (2.2), (2.3) получим

$$N\triangle\alpha_j + (N+1-j)((\alpha_{j-1}(f_y+g_x))_y - (\beta_{j-1}(f_y+g_x))_x) = 0, \tag{2.5}$$

$$N\triangle\beta_j + (N+1-j)((\alpha_{j-1}(f_y+g_x))_x + (\beta_{j-1}(f_y+g_x))_y) = 0. \tag{2.6}$$

Отсюда следует (см. теорему 6.2 в приложении в [1]), что α_j, β_j — полиномы по f, g с постоянными коэффициентами при всех $j = 1, \ldots, N$. Поскольку $\beta_N \equiv 0$, из (2.6) при $j = N$ вытекает существование нетривиального полинома P такого, что $P(f,g) = 0$. В [1] рассмотрен случай, когда ввиду наличия такого полинома можно однозначно выразить, например, $f = f(g)$ (или наоборот). Тогда соотношение $f_x = g_y$ принимает вид

$$g_y - f'(g) g_x = 0,$$

и стандартным методом характеристик в [1] показывается, что аналогично уравнению Хопфа данное уравнение не имеет глобальных гладких периодических решений $g(x,y)$, отличных от постоянных. Дальнейшее доказательство, изложенное в [1], не вызывает никаких затруднений. Позднее в [7] было указано на недостаточность этих рассуждений. Затруднение состоит в том, что для того чтобы воспользоваться методом характеристик, необходимо выразить f как однозначную функцию от g на всем конфигурационном пространстве, а это можно сделать далеко не всегда. Для большей ясности выпишем полином $P(f,g)$ в случаях, когда степень интеграла равна трем или четырем. Согласно соотношениям (32) и (55) в [1] имеем

$$N = 3, \quad P(f,g) = K_1 g + K_2 f + \frac{1}{3} g^3 - g f^2 - K_3, \tag{2.7}$$

$$N = 4, \quad P(f,g) = fg(f^2 - g^2) - 2K_1 fg + K_2(f^2 - g^2) + K_3 g + K_4 f - K_5.$$

Здесь $K_1, \ldots, K_5$ — произвольные постоянные. В общем случае для произвольного N выписать полином $P(f,g)$ в явном виде достаточно сложно, однако уже при $N = 3, 4$ видно, что глобально $f = f(g)$ может определяться неоднозначно и потому для завершения доказательства теоремы 1 требуются более тонкие рассуждения. Эти рассуждения приведены в следующем разделе.

3. Завершение доказательства теоремы 1

Будем рассуждать следующим образом. Ввиду $f_x = g_y$, $P(f,g) = 0$ имеем

$$P_f g_y + P_g g_x = 0, \quad P_f f_y + P_g f_x = 0. \tag{3.1}$$

Пусть функции f, g удовлетворяют (3.1). Рассмотрим фазовую траекторию $(x(t), y(t))$ системы

$$\frac{dx}{dt} = P_g(f,g), \quad \frac{dy}{dt} = P_f(f,g).$$

Вдоль этой траектории выполнено $df/dt = dg/dt = 0$, т. е. функции f, g принимают постоянные значения. Поэтому характеристики являются прямыми с направляющим вектором $v = (P_g, P_f)$ и задаются уравнением

$$P_f x - P_g y = C,$$

где C — произвольная постоянная. Для того чтобы существовали непостоянные гладкие решения во всех точках (x,y)-плоскости, необходимо потребовать, чтобы характеристики не пересекались, т. е. чтобы эти прямые были параллельны. Действительно, предположим, что две характеристики пересекаются в некоторой точке. Так как функции f и g постоянны на характеристиках и должны быть гладкими, они принимают одинаковые значения на обеих характеристиках. Но это означает, что величины $P_g(f,g)$, $P_f(f,g)$ также принимают одинаковые значения на этих характеристиках, т. е. характеристики совпадают. Таким образом, две различные характеристики не могут пересекаться ни в одной точке. Это, очевидно, эквивалентно тому, что во всех точках (x,y) выполнено $P_g \equiv kP_f$, где k — некоторая постоянная. Тогда общее решение (3.1) будет иметь вид

$$f(x,y) = \widetilde{f}(x - ky), \quad g(x,y) = \widetilde{g}(x - ky).$$

С учетом $f_x = g_y$ имеем $\widetilde{f}' = -k\widetilde{g}'$, где штрих означает производную по своему аргументу. Следовательно,

$$\widetilde{f}(x - ky) \equiv -k\widetilde{g}(x - ky) + b, \tag{3.2}$$

где b — некоторая постоянная.

Ради упрощения обозначений далее будем просто писать f, g, подразумевая, что они являются функциями одного аргумента: $f = f(x - ky)$, $g = g(x - ky)$. При подстановке соотношения (3.2) в $P(f,g) = 0$ надо получить тождество, что дает ограничения на k и на коэффициенты полинома P. Рассмотрим, например, случай интеграла степени $N = 3$. Полином P имеет вид (2.7). С учетом (3.2) равенство $P(f,g) = 0$ принимает вид

$$\left(\frac{1}{3} - k^2\right) g^3 + 2kbg^2 + (K_1 - kK_2 - b^2)g + (K_2 b - K_3) = 0.$$

Если $g(x - ky)$ — непостоянная функция, то все коэффициенты полученного уравнения должны тождественно обращаться в нуль и получаем

$$k = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad K_1 = \frac{K_2}{\sqrt{3}}, \quad g = g\left(x - \frac{y}{\sqrt{3}}\right), \quad f = -\frac{1}{\sqrt{3}} g\left(x - \frac{y}{\sqrt{3}}\right), \quad K_3 = b = 0$$

либо

$$k = -\frac{1}{\sqrt{3}},\ K_1 = -\frac{K_2}{\sqrt{3}},\ g = g\left(x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right),\ f = \frac{1}{\sqrt{3}} g\left(x + \frac{y}{\sqrt{3}}\right),\ K_3 = b = 0.$$

Таким образом, осталось доказать, что утверждение теоремы 1 остается верным, если обе функции $f(x,y)$, $g(x,y)$ непостоянны и удовлетворяют соотношению (3.2). Докажем это сразу в общем случае для произвольного N.

Рассмотрим соотношения (2.2), (2.3) при $j = N$. Поскольку $\beta_N = 0$, они принимают вид

$$N\alpha_{N\,x} = \beta_{N-1}(f_y + g_x), \quad N\alpha_{N\,y} = -\alpha_{N-1}(f_y + g_x),$$

откуда очевидным образом следует, что

$$(\alpha_{N\,y}\beta_{N-1} + \alpha_{N\,x}\alpha_{N-1})(f_y + g_x) = 0.$$

Так как в теореме 1 предполагается, что магнитное поле ненулевое, т. е. $\Omega(x,y) = \frac{1}{N}(f_y + g_x) \neq 0$, ввиду аналитичности всех функций из последнего соотношения следует равенство

$$\alpha_{N\,y}\beta_{N-1} + \alpha_{N\,x}\alpha_{N-1} = 0. \tag{3.3}$$

Как отмечено выше, α_j, β_j — полиномы по f, g с постоянными коэффициентами при всех $j = 1, \ldots, N$, т. е. $\alpha_j = \alpha_j(x - ky)$, $\beta_j = \beta_j(x - ky)$. Следовательно, $\alpha_{N\,x} = \alpha'_N$, $\alpha_{N\,y} = -k\alpha'_N$, где штрих означает производную по своему аргументу. Ввиду этих соотношений (3.3) принимает вид

$$(\alpha_{N-1} - k\beta_{N-1})\alpha'_N = 0. \tag{3.4}$$

Если $\alpha'_N = 0$, то в силу (2.2), (2.3) при $j = N$ имеем $\alpha_{N-1} = \beta_{N-1} = 0$. Повторяя это рассуждение для всех $j = N-1, \ldots, 1$ в (2.2), (2.3), приходим к выводу, что $\alpha_j = \beta_j = 0$ при всех $j = 1, \ldots, N-1$, что также влечет $\Omega(x,y) \equiv 0$, чего быть не может. Поэтому ввиду аналитичности из (3.4) следует

$$\alpha_{N-1} - k\beta_{N-1} = 0. \tag{3.5}$$

Наконец, согласно (2.4) имеет место соотношение $(\alpha_{N-1}\Lambda)_x + (\beta_{N-1}\Lambda)_y = 0$, которое с учетом (3.5) принимает следующий вид:

$$\beta_{N-1}(k\Lambda_x + \Lambda_y) = 0.$$

Если $\beta_{N-1} = 0$, то из (3.5) следует, что $\alpha_{N-1} = 0$. Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, легко показать, что в этом случае $\Omega(x,y) \equiv 0$. Следовательно, $\beta_{N-1} \neq 0$, $k\Lambda_x + \Lambda_y = 0$ и $\Lambda(x,y) = \widetilde{\Lambda}(x - ky)$. Итак, метрика и магнитное поле зависят от одного аргумента, следовательно, существует линейный интеграл на всех уровнях энергии. Теорема 1 полностью доказана.

Замечание. В [7] исследовалась аналогичная задача; основной результат, полученный в [7], совпадает с утверждением теоремы 1 в частном случае при $N = 3$, $M = 2$. Доказательство основано на несколько иных идеях.

Благодарности. Авторы благодарят профессора L. Butler и его ученицу S.A.B. Naqvi, а также Ю. Л. Трахинина за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Agapov S., Valyuzhenich A.* Polynomial integrals of magnetic geodesic flows on the 2-torus on several energy levels // Disc. Cont. Dynam. Systems. Ser. A. 2019. V. 39, N 11. P. 6565–6583.

2. *Тайманов И. А.* О первых интегралах геодезических потоков на двумерном торе // Тр. МИАН. 2016. Т. 295. С. 241–260.

3. *Колокольцов В. Н.* Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1982. Т. 46, № 5. С. 994–1010.

4. *Агапов С. В.* О первых интегралах двумерных геодезических потоков // Сиб. мат. журн. 2020. Т. 61, № 4. С. 721–734.
5. *Dorizzi B., Grammaticos B., Ramani A., Winternitz P.* Integrable Hamiltonian systems with velocity–dependent potentials // J. Math. Phys. 1985. V. 26, N 12. P. 3070–3079.
6. *Agapov S. V., Bialy M., Mironov A. E.* Integrable magnetic geodesic flows on 2-torus: new examples via quasi-linear system of PDEs // Comm. Math. Phys. 2017. V. 351, N 3. P. 993–1007.
7. *Naqvi S.A.B.* Integrability of magnetic geodesic flows. Master of Science Thesis, The University of Manitoba, Winnipeg, 2020.

Поступила в редакцию 16 апреля 2021 г.
После доработки 16 апреля 2021 г.
Принята к публикации 11 июня 2021 г.

Агапов Сергей Вадимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
agapov.sergey.v@gmail.com, agapov@math.nsc.ru

Валюженич Александр Андреевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
graphkiper@mail.ru

Шубин Владислав Валерьевич
Новосибирский государственный университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
vlad.v.shubin@gmail.com