A. N. Sergeev, Vector and Covector Invariants of Lie Superalgebras, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1996, Volume 30, Issue 3, 90–93

DOI: 10.4213/faa543

довательные его вершины A, B, C, не лежащие на одной прямой, расположен внутри угла $\angle ABC$.

Следствие 4. *Неособый регулярный многоугольник на плоскости с числом сторон, большим трех, имеет не менее четырех экстремальных вершин.*

Это утверждение является прямым обобщением теоремы [1] на случай невыпуклых многоугольников.

Определение. Опорная вершина V плоского многоугольника называется *внутренней* (*внешней*), если некоторые его вершины лежат внутри (вне) опорной окружности, проходящей через вершину V и две ее соседние.

Следствие 5 [6]. *Выпуклый многоугольник на плоскости, не вписывающийся в окружность, имеет не менее двух внутренних и двух внешних вершин.*

Следствие 6. *Любой несамопересекающийся регулярный многоугольник на плоскости либо вписывается в окружность, либо имеет не менее двух внешних вершин.*

Имеются и другие варианты теоремы о четырех вершинах для многоугольника (обзор см., например, в [7]). Автор благодарен О. Р. Мусину, заметившему, что условие регулярности плоского несамопересекающегося многоугольника эквивалентно тому, что этот многоугольник является подграфом *триангуляции Делоне* множества своих вершин (см. [2, 5]).

Литература

1. *Мусин О. Р.* Квант (1996) (в печати). **2.** *Препарата Ф., Шеймос М.* Вычислительная геометрия: Введение. Мир, М., 1989. **3.** *Седых В. Д.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 1, 35–41 (1992). **4.** *Седых В. Д.* Функц. анализ и его прил., **29**, вып. 3, 41–50 (1995). **5.** *Guibas L., Stolfi J.* ACM Trans. Graphics., **4**, 74–123 (1985). **6.** *Schatteman A.* Geom. Dedicata, **34**, 229–242 (1990). **7.** *Wegner B.* Math. Pannon., **6**, No. 1, 121–132 (1995).

Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»

Поступило в редакцию 25 декабря 1995 г.

УДК 519.46

Векторные и ковекторные инварианты супералгебр Ли

 А. Н. Сергеев

Пусть V — конечномерное суперпространство над $\mathbb{C}$ и $\mathfrak{g}$ — подсуперaлгебра Ли в $\mathfrak{gl}(V)$. В работе приводится описание образующих алгебр $\mathfrak{g}$-инвариантных элементов, содержащихся в $\mathfrak{A}_{k,l}^{p,q} = S(V^k \oplus \pi(V)^l \oplus V^{*p} \oplus \pi(V^*)^q)$. Полученные результаты являются обобщением работы [3], где аналогичное описание дано с точностью до операторов поляризации.

1. Инварианты супералгебры Ли $\mathfrak{sl}(V)$. Для заданного суперпространства E через $B(E)$ обозначим множество $\{1, \dots, \alpha, \overline{1}, \dots, \overline{\beta}\}$, где $\alpha = \dim E_{\overline{0}}$, а $\beta = \dim E_{\bar{1}}$, и выберем базис $\{e_i\}$, $i \in B(E)$, так, что четность базисного вектора совпадает с четностью соответствующего индекса. В пространстве E^* выберем базис $\{e_i^*\}$ — левый дуальный к базису пространства E. Если t — стандартная таблица Юнга (см. [2]), то через $e_t = \sum \varepsilon(\tau)\sigma\tau$ и $\tilde{e}_t = \sum \varepsilon(\tau)\tau\sigma$ обозначим минимальные идемпотенты в групповой алгебре симметрической группы, причем суммирование ведется по τ из столбцового стабилизатора и по σ из строчного стабилизатора таблицы t. Для последовательности I с элементами из $B(E)$ обозначим через e_I элемент $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots$. Последовательность I называется t-полустандартной, если при вписывании ее элементов в клетки таблицы t (i_α вписывается в ту клетку, где стоит α) ее элементы не убывают слева направо вдоль строк и сверху вниз по столбцам и, кроме того, четные элементы строго возрастают вдоль столбцов, а нечетные — вдоль строк. Обозначим через φ_E канонический гомоморфизм тензорной алгебры $T(E)$ на симметрическую алгебру $S(E)$. Легко видеть, что $\mathfrak{A}^{p,q}_{k,l} = S(U \otimes V \oplus V^* \otimes W)$. Пусть $\{u_\alpha\}$, $\{w_\beta\}$, $\{v_i\}$, $\{v_i^*\}$ — базисы в пространствах U, W, V, V^* соответственно. Для последовательностей I и J с элементами из $B(U)$ и $B(V)$ соответственно положим

$$P_t^{U,V}(I,J) = \varphi_{U\otimes V}(e_t(u_I) \otimes v_J), \qquad \widetilde{P}_t^{U,V}(I,J) = \varphi_{U\otimes V}(\tilde{e}_t(u_I) \otimes v_J).$$

Пусть t — прямоугольная таблица размера $(n+k)\times m$, заполненная числами от 1 до $(n+k)m$ так, что вначале заполнена таблица, состоящая из первых n строк, по столбцам, а затем оставшаяся часть также заполняется по столбцам. Пусть s — прямоугольная таблица размера $n \times (m+k)$, заполненная последовательно по столбцам. Для последовательностей I и J через $I * J$ обозначим последовательность, полученную дописыванием к элементам последовательности I элементов последовательности J. Через I_k обозначим k-кратное повторение последовательности $12\ldots n$, а через J_k — последовательность, состоящую из k символов $\bar{1}$, затем k символов $\bar{2}$ и т.д. до k символов $\bar{m}$, где $(n,m) = \dim V$. Обозначим через $d(I)$ число $(-1)^{p(I,I)}$, где $p(I,I) = \sum_{\beta>\alpha} p(i_\alpha)p(i_\beta)$, а p — функция четности, $p(I) = \sum p(i_\alpha)$.

Теорема 1. *Алгебра* $\mathrm{sl}(V)$*-инвариантных элементов порождена многочленами*

(а) (v_α^*, v_β), $\alpha \in B(U)$, $\beta \in B(W)$ (*см.* [3]);

(б) $F_k(S,T) = \sum d(L) P_s^{U,V}(S, I_k * L)\, \widetilde{P}_t^{V^*,W}(L * J_k, T)$;

(в) $F_{-k}(S,T) = \sum d(L)(-1)^{p(L)mk} \widetilde{P}_t^{U,V}(S, L * I_k)\, P_s^{V^*,W}(J_k * L, T)$,

где $k \in \mathbb{N}$, S *и* T *суть* t- *и* s-*полустандартные последовательности с элементами из* $B(U)$ *и* $B(W)$ *соответственно, а суммирование ведется по всем последовательностям* L *длины* nm *с элементами из* $B(V)$.

2. Инварианты супералгебр Ли $\mathrm{osp}(V)$. Наличие четной инвариантной формы на модуле V определяет изоморфизм $\mathfrak{A}^{p,q}_{k,l} = \mathfrak{A}^{p+k,q+l}$ как $\mathrm{osp}(V)$-модулей и как алгебр; поэтому можно ограничиться случаем $k = l = 0$. Если $\dim V = (n,m)$, то для $i \in B(V)$ определим сопряженный $\tilde{i} \in B(V)$ по правилам: $\tilde{i} = n - i + 1$, если $p(i) = \bar{0}$, и $\tilde{i} = \overline{m - i + 1}$, если $p(i) = \bar{1}$. Пусть t — прямоугольная таблица размера $n \times m$, заполненная по столбцам, и L — последовательность с элементами из t. Заполним таблицу t элементами последовательности L (l_α стоит в той клетке, где было α). Пару символов в L

назовем отмеченной, если они находятся в одной строке и в соседних столбцах, причем номер первого столбца нечетный. Обозначим через $\mathfrak{T}_1$ множество последовательностей L, таких, что все отмеченные пары, кроме, возможно, пар последней строки, состоят из попарно сопряженных элементов; если из последней строки удалить все отмеченные пары с попарно сопряженными элементами, то оставшееся множество $N(L) = \{K_1, \dots, K_{2s}\}$ состоит из попарно различных нечетных элементов и инвариантно относительно сопряжения. Пусть $L \in \mathfrak{T}_1$; тогда определены числа $d(L) = d(L_1 * L_2)\, d(L_3 * L_4) \dots$, где $L_1, L_2, \dots$, — последовательные столбцы последовательности L и

$$K(L) = \sum_{q=s}^{s+\nu} (k+1)^r 2^{r-q} (r-q)!\, k^q \sigma_{q-s}(k_1, \dots, k_\nu),$$

где $r = m/2$, ν — количество различных отмеченных пар последней строки, состоящих из попарно сопряженных нечетных элементов, не принадлежащих множеству $N(L)$, $k_1, \dots, k_\nu$ — кратности, с которыми эти пары входят в последнюю строку, $k = k_1 + \dots + k_\nu$ и σ_l — элементарная симметрическая функция.

Теорема 2. *Алгебра* $\operatorname{osp}(V)$-*инвариантных многочленов порождена элементами*

(а) (v_α, v_β), $\alpha, \beta \in B(W)$ (*см.* [3]);

(б) $R(J) = \sum d(L) K(L) P_s^{V^*, W}(I_1 * L, J)$,

причем суммирование ведется по $L \in \mathfrak{T}_1$, s — *прямоугольная таблица размера* $n \times (m+1)$, *заполненная по столбцам, и* J *есть* s-*полустандартная последовательность с элементами из* $B(W)$.

3. Инварианты супералгебры Ли $\mathbf{sp}(V)$. Наличие нечетной инвариантной билинейной формы на пространстве V определяет изоморфизм $\mathfrak{A}_{k,l}^{p,q} = \mathfrak{A}^{p+l, q+k}$ как $\operatorname{sp}(V)$-модулей и как алгебр; поэтому можно ограничиться случаем $k = l = 0$. Так как $\dim V_{\overline{0}} = \dim V_{\overline{1}}$, то для $i \in B(V)$ определен сопряженный элемент $\bar{i}$. Обозначим через $\mathfrak{T}_2$ множество последовательностей длины n^2, рассматриваемых как $n \times n$-таблицы, заполненные по столбцам, которые обладают следующими свойствами: по главной диагонали стоят числа $\overline{1}, \dots, \overline{n}$; выше главной диагонали стоят четные числа и числа, симметричные относительно главной диагонали, сопряжены; на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит одно из чисел $\{i, j, \bar{i}, \bar{j}\}$.

Для $I \in \mathfrak{T}_2$ пусть $\varepsilon(I) = (-1)^\nu$, где ν — количество четных чисел в I, не совпадающих с номером своего столбца, $m_k(I) = \prod_1^n \frac{(n+k)!}{(n+k-k_i)!}$, где $k \geqslant 0$ и k_i — количество чисел в i-м столбце, не равных i и $\bar{i}$. Пусть t и s — такие же таблицы, как в теореме 1.

Теорема 3. *Алгебра* $\operatorname{sp}(V)$-*инвариантных элементов порождена многочленами*

(i) (v_α, v_β), $\alpha, \beta \in B(W)$ (*см.* [3]);

(ii) $Q_k(J) = \sum \varepsilon(I) m_{k-1}(I) P_t^{V^*, W}(I * J_{k-1}, J)$;

(iii) $Q_{-k}(J) = \sum \varepsilon(I) m_0(I) P_s^{V^*, W}(I * I_{k+1}, J)$,

где $k \geqslant 1$ *и* J *есть* t- (s-)*стандартная последовательность с элементами из* $B(W)$ *и суммирование ведется по* $I \in \mathfrak{T}_2$.

Литература

1. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления. ИЛ, М. (1947). **2.** *Макдональд И.* Симметрические функции и многочлены Холла. Мир, М. (1985). **3.** *Сергеев А. Н.* Функц. анализ и его прил., **26**, вып. 3, 88–90 (1992).

Балаковский институт техники,
технологии и управления

Поступило в редакцию
15 декабря 1994 г.

УДК 517.98

Об одной теореме о неподвижной точке

 Чан Куок Бинь, Нгуен Минь Чыонг

1. Теорема 1. *Пусть H — замкнутое ограниченное множество в нормированном пространстве X и T — отображение множества $H \times H$ в H, удовлетворяющее следующему условию*:

$$\|T(x,y)-T(z,t)\| \begin{cases} < \max\{\|x-z\|, \|y-t\|\}, & \text{если } (x,y) \neq (z,t) \\ & \text{и } x \neq y \text{ или } z \neq t, \\ \leqslant \|x-z\| = \|y-t\|, & \text{если } x = z \text{ и } z = t, \end{cases} \tag{1}$$

при всех $x, y, z, t \in H$ (см. [5, 6]).

Предполагается, кроме того, что либо H компактно, либо T — отображение множества $H \times H$ в компактное подмножество множества H.

Тогда уравнение

$$T(x,x) = x \tag{2}$$

имеет единственное решение в H. Кроме того, каждое уравнение

$$x_n = T(x_n, x_{n-1}), \qquad n \geqslant 1, \tag{3}$$

имеет единственное решение x_n и последовательность $\{x_n\}$, определенная уравнением (3), *сходится к решению уравнения* (2) *при любом выборе точки $x_0 \in H$.*

Эта теорема доказывается без труда при помощи теоремы Эдельстейна из [3] для отображения $T_v(x) = T(x, v)$.

Заметим, что настоящая теорема распространяет теорему Эдельстейна из [3] на отображение $T(\cdot\,,\cdot)$. Если вместо (3) в тех же предположениях, что и в теореме 1, использовать итерацию Пикарда для $T_*(x) = T(x,x)$, как это сделано в работах [1–3, 10] и др., то нельзя будет говорить о существовании и сходимости приближенных решений для уравнения (2).

2. Аналогично доказательству теоремы 1 доказывается

Теорема 2. *Пусть H — замкнутое ограниченное подмножество в метрическом пространстве (X, d) и $g(\cdot\,,\cdot)\colon H \times H \to [0, \infty)$ — функция, обладающая следующими свойствами*:

а) $g(x,y) = 0$, *если и только если $x = y$ для всех $x, y \in H$*;

б) *g непрерывна по (x, y)*;

в) *если $g(x,y) \to 0$, то $d(x,y) \to 0$.*