С. Ю. Пилюгин, Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса–Смейла без периодических траекторий на сферах, *Дифференц. уравнения*, 1978, том 14, номер 2, 245–254

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ФЕВРАЛЬ 1978 г., ТОМ XIV, № 2

УДК 517.938

С. Ю. ПИЛЮГИН

ФАЗОВЫЕ ДИАГРАММЫ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ МОРСА—СМЕЙЛА БЕЗ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ НА СФЕРАХ

1°. Пусть M — гладкое компактное n-мерное многообразие, F — касательное векторное поле класса C^1. Рассмотрим соответствующую ему систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=F(x). \tag{1.1}$$

Пусть $\varphi(x, t)$ — траектория системы (1.1), проходящая через точку x при $t=0$. Предположим, что (1.1) — система Морса — Смейла [1, 2] без периодических траекторий, т. е. выполнены следующие требования:

I.I) Множество неблуждающих точек Ξ системы (1.1) есть объединение конечного числа точек покоя, каждая из которых гиперболическая.

По теореме Перрона гиперболическая точка покоя p обладает устойчивым и неустойчивым многообразиями $W^s(p)$ и $W^u(p)$.

I.II) Устойчивые и неустойчивые многообразия точек покоя пересекаются трансверсально.

Дальше такие системы мы будем называть системами класса I.I)—I.II).

Пусть p, q — точки покоя системы (1.1). Будем писать $p\to q$, если $W^u(p)\cap W^s(q)\neq\varnothing$. Следуя С. Смейлу [1], назовем фазовой диаграммой Φ системы (1.1) множество всех точек покоя вместе со связями $p\to q$ (с указанием размерностей $W^u(p)$ и $W^u(q)$).

Будем называть две фазовые диаграммы $\Phi=\{p\to q\}$ и $\Phi'=\{p'\to q'\}$ систем (A) и (A') класса I.I)—I.II) изоморфными [2, 3], если существует такое взаимно-однозначное отображение H множества точек покоя системы (A) на множество точек покоя системы (A'), что

1) для любой точки покоя q системы (A)

$$\dim W^u(q)=\dim W^u(H(q));$$

2) в Φ есть связь $p\to q$ тогда и только тогда, когда в Φ' есть связь $H(p)\to H(q)$.

Будем говорить, что фазовая диаграмма Φ определяет систему в классе I.I)—I.II) на M, если любые две системы (A) и (A') класса I.I)—I.II), у которых фазовые диаграммы изоморфны Φ, топологически эквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм многообразия M, переводящий траектории системы (A) в траектории системы (A') с сохранением направления движения на них. Существуют системы класса I.I)—I.II), фазовые диаграммы которых не обладают сформулированным свойством. Пример такой системы есть в работе А. Д. Мышкиса и

Л. Э. Рейзиня [4], изучавших вопрос о числе ячеек грубой трехмерной системы дифференциальных уравнений с фиксированным числом точек покоя. В [5] показано, что если $n=\dim M\geqslant 3$, а в фазовой диаграмме Ф есть связь

$$p\to q,\quad \dim W^u(p)<n,\quad \dim W^u(q)>0$$

(будем называть такую связь критической), то диаграмма Ф не определяет систему в классе I.I)—I.II). Там же показано, что если Ф не содержит циклов (в смысле [6]) и не содержит критических связей, то Ф определяет систему в классе I.I)—I.II) на S^3 (соответствующая теорема в [5] относится к грубым трехмерным диссипативным системам, но перенос результата на случай S^3 не вызывает затруднений).

Фазовая диаграмма Ф реализуема в классе I.I)—I.II) на M [7], если существует система класса I.I)—I.II) на M, фазовая диаграмма которой изоморфна Ф. В предлагаемой работе показано, что если фазовая диаграмма Ф реализуема в классе I.I)—I.II) на S^n, $n\geqslant 3$, и не содержит критических связей, то она определяет систему в классе I.I)—I.II) на S^n и при этом структура ее весьма проста (приведены необходимые и достаточные условия реализуемости фазовых диаграмм без критических связей на S^n). Полученный результат существенно опирается на доказанные в [8] теоремы о существовании циклов различных типов в фазовых диаграммах.

Для широкого класса двумерных автономных систем аналогичная задача изучалась M. M. Peixoto [9].

В п. 2° формулируются некоторые вспомогательные утверждения; в п. 3° доказывается теорема о том, что реализуемая фазовая диаграмма определяет систему в классе I.I)—I.II) на S^n, $n\geqslant 3$, тогда и только тогда, когда она не содержит критических связей. В п. 4° приводятся необходимые и достаточные условия реализуемости фазовых диаграмм без критических связей в классе I.I)—I.II) на S^n.

2°. Пусть p — точка покоя. Назовем ω-предельным множеством многообразия $W^u(p)$ (α-предельным множеством многообразия $W^s(p)$) множество $\overline{W^u(p)}\setminus W^u(p)$, $\overline{W^u(p)}$ — замыкание $W^u(p)$ (соответственно множество $\overline{W^s(p)}\setminus W^s(p)$). Будем обозначать ω-предельное множество многообразия $W^u(p)$ через $\omega(W^u(p))$, α-предельное множество $W^s(p)$ через $\alpha(W^s(p))$. Каждое из этих множеств непусто, замкнуто и инвариантно (кроме того, оно связно, если размерность соответствующего многообразия отлична от единицы).

Лемма 2.1 (С. Смейл, [1]). *Для системы Морса — Смейла следующие утверждения эквивалентны:*

1) *в Ф есть связь* $p\to q$;
2) $W^u(q)\cap\omega(W^u(p))\neq\varnothing$;
3) $\overline{W^u(q)}\subset\omega(W^u(p))$.

Любая система класса I.I)—I.II) удовлетворяет следующим естественным условиям (выполнение условий 1 и 2 очевидно, выполнение условий 3 и 4 следует из леммы 2.1):

1.1) для любой точки покоя q, $\dim W^u(q)<n$, в Ф есть связь $v\to q$; для любой точки покоя q, $\dim W^u(q)>0$, в Ф есть связь $q\to w$;

1.2) из связи $q\to v$ следует неравенство $\dim W^u(q)>\dim W^u(v)$;

1.3) из связей $q\to v$, $v\to w$ следует связь $q\to w$;

1.4) для любой точки покоя q поддиаграмма Ф, состоящая из таких связей $v\to w$, что в Ф есть связи $q\to v$, $q\to w$, связна, если $\dim W^u(q)\neq 1$, и имеет не более 2 компонент связности, если $\dim W^u(q)=1$.

В дальнейшем выполнение этих условий не оговаривается.

Введем понятие циклов в фазовых диаграммах [7, 8]. Фазовая диаграмма Ф содержит цикл типа (0, 1), проходящий через точку покоя p, $\dim W^u(p)=1$, если либо существует единственная точка покоя s, $\dim W^u(s)=0$, такая, что $p\to s$, либо в Ф есть связь

$$s_1\leftarrow r_1\to s_2\leftarrow\ldots\to s_m\leftarrow p\to s_{m+1}\leftarrow\ldots\to s_v\leftarrow r_v\to s_1, \tag{2.1}$$

в которой $\dim W^u(s_i)=0$, $\dim W^u(r_i)=1$, $r_i\neq r_j$ при $1\leqslant i<j\leqslant v$. Ф соответственно содержит цикл типа $(n-1, n)$, проходящий через точку покоя p, $\dim W^u(p)=n-1$, если либо существует единственная точка покоя o, $\dim W^u(o)=n$, такая, что $o\to p$, либо в Ф есть связь

$$o_1\to r_1\leftarrow o_2\to\ldots\leftarrow o_l\to p\leftarrow o_{l+1}\to\ldots\leftarrow o_q\to r_q\leftarrow o_1, \tag{2.2}$$

в которой $\dim W^u(o_i)=n$, $\dim W^u(r_i)=n-1$, $r_i\neq r_j$ при $1\leqslant i<j\leqslant q$.

Фазовая диаграмма Ф содержит цикл типа $(0, l)$, проходящий через точку покоя p, $\dim W^u(p)=l$, $3\leqslant l\leqslant n-1$, если из наличия связи $p\to q$ в Ф следует неравенство $\dim W^u(q)<l-1$. Ф содержит цикл типа (l, n), проходящий через точку покоя p, $\dim W^u(p)=l$, $1\leqslant l\leqslant n-3$, если из наличия связи $q\to p$ в Ф следует неравенство $\dim W^u(q)>l+1$.

Предположим до конца п. 2°, что фазовая диаграмма Ф реализуема в классе I.I), I.II) на S^n, $n\geqslant 3$ (считаем для определенности, что Ф — фазовая диаграмма системы (1.1)) и что в Ф нет критических связей.

Лемма 2.2. 1) *В Ф нет точек покоя p, для которых $2\leqslant\dim W^u(p)\leqslant\leqslant n-2$;* 2) *Ф не содержит циклов типа* (0, 1) *и* $(n-1, n)$; 3) *для любой точки покоя p, $\dim W^u(p)=n-1$, множество $\omega(W^u(p))$ состоит из единственной устойчивой точки покоя.*

Доказательство. Пусть первое утверждение леммы неверно и в Ф есть точка покоя p, $\dim W^u(p)=k$, $2\leqslant k\leqslant n-2$. В Ф нет связей $p\to q$, $\dim W^u(q)>0$; $r\to p$, $\dim W^u(r)<n$. Если $3\leqslant k\leqslant n-3$, через точку покоя p проходят одновременно циклы типа $(0, k)$ и (k, n), что невозможно [8]. Если $k=2$, то через p проходит цикл типа $(2, n)$, а в множестве $\omega(W^u(p))$ нет точек покоя r, $\dim W^u(r)=1$, а следовательно, и циклов типа (0, 1), а это снова противоречит [8]. Случай $k=n-2$ рассматривается аналогично. Точно так же, если в Ф есть, например, цикл типа (0, 1), проходящий через точку покоя p, $\dim W^u(p)=1$, то из отсутствия связей $q\to p$, $\dim W^u(q)<n$, вытекает, что через p проходит цикл типа $(1, n)$. Опять получаем противоречие с [8]. Второе утверждение доказано. Если p — точка покоя с $\dim W^u(p)=n-1$, то множество $\omega(W^u(p))$ может содержать лишь устойчивые точки покоя; из связности $\omega(W^u(p))$ вытекает, что такая точка там только одна.

Согласно лемме 2.2, Ф не может содержать точек покоя, у которых размерность неустойчивого многообразия отличается от 0, 1, $n-1$, n. Всюду дальше буква o (с различными индексами) обозначает вполне неустойчивую точку покоя (т. е. $\dim W^u(o)=n$), p — точку покоя с $\dim W^u(p)=n-1$, r — точку покоя с $\dim W^u(r)=1$, s — устойчивую точку покоя. Пусть P обозначает множество, являющееся объединением замыканий неустойчивых многообразий всех точек покоя r, П — фазовую диаграмму на этом множестве.

Лемма 2.3. *Диаграмма* П *связна.*

Доказательство. Разбиение S^n на неустойчивые многообразия точек покоя системы (1.1) есть клеточное разбиение (см., например, [10]). P — одномерный остов этого разбиения. Из связности S^n следует связность P, эквивалентная связности П.

У системы (1.1) есть на S^n хотя бы одна вполне неустойчивая точка покоя o^*. Окружим ее достаточно малой $(n-1)$-мерной сферой Σ без контакта, делящей S^n на две области G_1 и G_2 так, чтобы $o^*\in G_1$, а все остальные точки покоя лежали в G_2. Рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=F_1(x), \tag{2.3}$$

заданную в области $G\subset R^n$, ограниченной гладкой сферой E без контакта, следующим образом. В качестве траекторий системы (2.3) возьмем образы траекторий системы (1.1) при диффеоморфизме области G_2 на область G, отображающем Σ на E. Систему (2.3) продолжим до определенной в R^n грубой диссипативной системы [11] без периодических траекторий, которую мы и будем рассматривать до конца п. 2°. Фазовая диаграмма системы (2.3) определяется аналогично фазовой диаграмме системы (1.1), на нее переносятся все ранее введенные определения. Условия реализуемости фазовых диаграмм систем вида (2.3) (при $n=3$) изучались в [7, 12]. Многие факты, имевшие место для трехмерных систем, переносятся на случай произвольной размерности $n\geqslant 3$. Рассмотрение доказательства в [6, стр. 1069—1071] показывает, что справедлива следующая

Лемма 2.4. *Существует сколь угодно малая окрестность U множества P, граница которой есть $(n-1)$-мерная сфера без контакта S, которую траектории пересекают, входя в U.*

Для каждой точки покоя p пересечение $W^u(p)$ со сферой S есть $(n-2)$-мерная сфера $\pi(p)$, которая делит S на $2(n-1)$-мерных открытых диска d_1 и d_2 (по обобщенной теореме Шенфлиса [13], которой нам придется неоднократно пользоваться). Пусть $L(p)$ — часть $W^u(p)$, лежащая вне U, тогда $L(p)\cup d_1$, $L(p)\cup d_2$ — $(n-1)$-мерные сферы, каждая из которых делит R^n на ограниченную и неограниченную области. Пусть $S(p)$ — та из них, которая не содержит множество P в соответствующей ограниченной области $D(p)$, $\delta(p)$ — тот из дисков d_1 и d_2, который лежит на сфере $S(p)$.

Назовем точку p_j подчиненной точке p_i (пишем $p_i>p_j$), если $\delta(p_j)\subset\subset\delta(p_i)$, и непосредственно подчиненной точке p_i, если $p_i>p_j$, и не существует такой точки p_k, что $p_i>p_k>p_j$.

Пусть p — точка покоя, $p_1, \ldots, p_m$ — все непосредственно подчиненные ей точки. Обозначим

$$\Delta(p)=\delta(p)\setminus(\overline{\delta(p_1)}\cup\ldots\cup\overline{\delta(p_m)}),$$
$$D^*(p)=D(p)\setminus(\overline{D(p_1)}\cup\ldots\cup\overline{D(p_m)}).$$

Имеют место следующие результаты (они доказываются по той же схеме, что и соответствующие результаты в [12]).

Лемма 2.5. *Точка p_j подчинена точке p_i тогда и только тогда, когда в Φ есть связь*

$$o^*\rightarrow p^{(1)}\leftarrow o^{(1)}\rightarrow\ldots\rightarrow p_i\leftarrow\ldots\rightarrow p_j,$$

в которой все точки $o^{(i)}$ различны.

Лемма 2.6. *В множестве $D^*(p)$ лежит ровно одна вполне неустойчивая точка покоя o, которая обладает в Φ связями $o\rightarrow p$, $o\rightarrow p_1, \ldots$ $\ldots, o\rightarrow p_m$, и не обладает связью $o\rightarrow\bar{p}$ ни для какой точки $\bar{p}$, отличной от $p, p_1, \ldots, p_m$.*

Лемма 2.7. *Каждая точка покоя o системы (2.1) лежит в одном из множеств $D^*(p)$.*

3°. Теорема 3.1. *Пусть Φ — реализуемая в классе I.I)—I.II) на S^n, $n\geqslant 3$, фазовая диаграмма. Для того чтобы Φ определяла систему в классе I.I)—I.II) на S^n, необходимо и достаточно, чтобы в Φ не было критических связей.*

Доказательство. 1. Необходимость условий теоремы следует из теоремы 1.1 работы [5].

2. Докажем их достаточность. Будем считать, что Φ — фазовая диаграмма системы

$$\frac{dx}{dt}=F(x) \tag{3.1}$$

класса I.I)—I.II) на S^n. Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt}=\tilde{F}(x) \tag{3.2}$$

класса I.I)—I.II) на S^n, фазовая диаграмма $\tilde{\Phi}$ которой изоморфна Φ. Если H — изоморфизм, q — точка покоя системы (3.1), будем обозначать через $\tilde{q}$ точку покоя $H(q)$ системы (3.2). Для любого объекта, связанного с системой (3.1), соответствующий ему объект системы (3.2) будет снабжаться знаком $\tilde{}$. По лемме 2.2 система (3.1) может иметь лишь точки покоя q с $\dim W^u(q)=0,\ 1,\ n-1,\ n$ (по-прежнему обозначаем их буквами $s,\ r,\ p,\ o$ соответственно). Фиксируем точки покоя o^* системы (3.1) и $\tilde{o}^*$ системы (3.2) и достаточно малые $(n-1)$-мерные сферы Σ и $\tilde{\Sigma}$, делящие S^n на области G_1, G_2 и $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ соответственно ($o^*\in G_1$, $\tilde{o}^*\in\tilde{G}_1$, все остальные точки покоя системы (3.1) лежат в G_2, системы (3.2) в—$\tilde{G}_2$). Аналогично тому, как это сделано в п. 2°, построим соответствующие (3.1) и (3.2) грубые диссипативные системы в R^n (сохраняя для точек покоя систем в R^n те же обозначения, что были для точек покоя систем на S^n). Пусть P — множество, введенное в п. 2° (для системы (3.1)), S — $(n-1)$-мерная сфера без контакта, являющаяся границей его окрестности. Для точек покоя p и r пересечения

$$\pi(p)=W^u(p)\cap S,\quad \lambda(r)=W^s(r)\cap S$$

суть гладкие $(n-2)$-мерные сферы. Докажем существование гомеоморфизма $\eta:S\to\tilde{S}$ такого, что $\eta(\pi(p))=\pi(\tilde{p})$, $\eta(\lambda(r))=\lambda(\tilde{r})$ (здесь $\pi(\tilde{p})=W^u(\tilde{p})\cap\tilde{S}$, $\lambda(\tilde{r})=W^s(\tilde{r})\cap\tilde{S}$). Назовем ячейками сферы S компоненты связности множества точек S, не лежащих на сферах $\pi(p)$ и $\lambda(r)$. Фиксируем точку покоя p и непосредственно подчиненные ей точки покоя $p_1,\ \ldots,\ p_m$. Пусть

$$s=\omega(W^u(p)),\quad s_i=\omega(W^u(p_i)),\quad i=1,\ldots,m,$$

o — единственная точка покоя в $D^*(p)$ (см. лемму 2.6). Из построения сферы S в [6] вытекают следующие утверждения относительно расположения сфер $\lambda(r_k)$ и $\pi(p_i)$ в диске $\delta(p)$.

Сфера $\lambda(r_k)$ лежит внутри сферы $\lambda(r_j)$ в диске $\delta(p)$ тогда и только тогда, когда в Φ есть связь

$$s\leftarrow r^{(1)}\rightarrow s^{(1)}\leftarrow\ldots\leftarrow r_j\rightarrow\ldots\leftarrow r_k \tag{3.3}$$

и связи $o\to r^{(1)}$, $o\to s^{(1)}$, $\ldots$, $o\to r_j$, $\ldots$, $o\to r_k$. Говоря «$\lambda(r_k)$ лежит внутри $\lambda(r_j)$», мы имеем в виду следующее: сфера $\lambda(r_j)$ делит замкнутый диск $\overline{\delta(p)}$ на 2 части: «внутреннюю», гомеоморфную R^{n-1} и содержащую $\lambda(r_k)$, и «внешнюю», содержащую $\pi(p)$. Из отсутствия циклов типа (0, 1) в Φ (лемма 2.2) вытекает, что связь (3.3) единственна.

Сфера $\pi(p_i)$ лежит внутри сферы $\lambda(r_j)$ тогда и только тогда, когда в Φ есть связи

$$\begin{gathered} s\leftarrow r^{(1)}\rightarrow s^{(1)}\leftarrow\ldots\leftarrow r_j\rightarrow\ldots\rightarrow s_i,\\ o\to r^{(1)},\quad o\to s^{(1)},\ \ldots,\ o\to r_j,\ \ldots,\ o\to s_i. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Разбиение множества $\Delta(p)$ (определение см. перед леммой 2.5) на ячейки сферы S описывается следующим образом. В $\Delta(p)$ лежит одна ячейка с внешней границей $\pi(p)$ и внутренней границей, состоящей из тех сфер $\pi(p_i)$, для которых $s_i=s$, и из тех сфер $\lambda(r_k)$, для которых в Φ есть связи $s\leftarrow r_k$, $o\rightarrow r_k$. При этом для любой точки x этой ячейки

$$\varphi(x, t)\rightarrow s,\ t\rightarrow+\infty;\ \varphi(x, t)\rightarrow o,\ t\rightarrow+\infty.$$

Остальные ячейки устроены так. Внешняя граница ячейки есть сфера $\lambda(r_j)$, а внутренняя состоит из тех сфер $\pi(p_i)$, $\lambda(r_k)$, для которых в Φ есть связи

$$s\leftarrow\ldots\leftarrow r_j\rightarrow s_i\leftarrow r_k \quad \text{или} \quad s\leftarrow\ldots\leftarrow r_j\rightarrow s^{(j)}\leftarrow r_k,$$

при этом $\varphi(x, t)\rightarrow s_i$, $t\rightarrow+\infty$ (или $\varphi(x, t)\rightarrow s^{(j)}$, $t\rightarrow+\infty$).

Условия подчиненности точек покоя $p_1, \ldots, p_m$ точке p проверяются по фазовой диаграмме (лемма 2.5), поэтому из изоморфизма Φ и $\tilde{\Phi}$ следует, что точке $\tilde{p}$ непосредственно подчинены точки $\tilde{p}_1, \ldots, \tilde{p}_m$ и только они. Из описанной структуры разбиения множества $\Delta(p)$ на ячейки следует, что существует гомеоморфизм $\eta: \Delta(p)\rightarrow\Delta(\tilde{p})$ такой, что $\eta(\pi(p_i))=\pi(\tilde{p}_i)$, $\eta(\lambda(r_k))=\lambda(\tilde{r}_k)$. Аналогично тому, как это сделано в [3], гомеоморфизм η может быть продолжен до гомеоморфизма S на $\tilde{S}$.

Опишем построение гомеоморфизма $h: G\rightarrow\tilde{G}$ (G и $\tilde{G}$ — области в R^n, ограниченные сферами E в $\tilde{E}$) на примере замыкания множества траекторий, пересекающих ячейку J сферы S. Пусть J — ячейка с внешней границей σ_0 и внутренней границей, состоящей из сфер $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$, причем для $x\in J$

$$\varphi(x, t)\rightarrow s,\ t\rightarrow+\infty;\ \varphi(x, t)\rightarrow o,\ t\rightarrow-\infty$$

(допускается формальное равенство $o=\infty$, причем запись $\varphi(x, t)\rightarrow\infty$ при $t\rightarrow-\infty$ означает, что траектория пересекает при убывании t сферу E). Тогда $\tilde{J}=\eta(J)$ — ячейка сферы $\tilde{S}$, при этом для $x\in\tilde{J}$

$$\tilde{\varphi}(x, t)\rightarrow\tilde{s},\ t\rightarrow+\infty;\ \tilde{\varphi}(x, t)\rightarrow\tilde{o},\ t\rightarrow-\infty.$$

Рассмотрим замкнутую окрестность U_0 сферы σ_0 в J, гомеоморфную «шаровому слою» $S^{n-2}\times[0, 1]$, и введем в U_0 координаты (σ, ρ), $\sigma\in S^{n-2}$, $\rho\in[0, 1]$ так, чтобы

$$\sigma_0=\{(\sigma, 0),\ \sigma\in S^{n-2}\},\quad (\sigma, \rho)\in J \text{ при } \rho\in(0, 1].$$

Аналогично рассмотрим окрестности $U_1, \ldots, U_m$ сфер $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ в J, взяв $U_0, \ldots, U_m$ настолько узкими, чтобы они не пересекались. В ячейке $\tilde{J}$ возьмем в качестве $\tilde{U}_0, \ldots, \tilde{U}_m$ образы $U_0, \ldots, U_m$ при гомеоморфизме η. Окружим точки покоя o и $\tilde{o}$ достаточно малыми сферами без контакта V, $\tilde{V}$ (при $o=\infty$ роль V и $\tilde{V}$ играют E и $\tilde{E}$), точки s и $\tilde{s}$ — сферами без контакта W и $\tilde{W}$. Для точки $\alpha(\sigma, \rho)\in U_0$ с координатами (σ, ρ), $\rho\in(0, 1]$ зададим числа $\tau^+(\sigma, \rho)$ и $\tau^-(\sigma, \rho)$ включениями

$$\varphi(\alpha(\sigma, \rho),\ \tau^+(\sigma, \rho))\in W,\quad \varphi(\alpha(\sigma, \rho),\ \tau^-(\sigma, \rho))\in V.$$

Аналогично задаются $\tilde{\tau}^+$, $\tilde{\tau}^-$. Эти функции непрерывны на $S^{n-2}\times(0, 1]$. Пусть

$$T_1^+=\frac{1}{3}\min(\tau^+, \tau^+),\quad T_1^-=\frac{1}{3}\max(\tau^-, \tilde{\tau}^-).$$

Рассмотрим непрерывную на $[0, 1]$ функцию

$$\varkappa(\rho)=\begin{cases}0, & 0\leqslant\rho\leqslant\frac{1}{2}\\ 2\rho-1, & \frac{1}{2}<\rho\leqslant 1\end{cases}$$

и функции

$$T^{+}=\tau^{+}-T_{1}^{+},\quad \tilde{T}^{+}=\tilde{\tau}^{+}-T_{1}^{+},\quad T^{-}=\tau^{-}-T_{1}^{-},\quad \tilde{T}^{-}=\tilde{\tau}^{-}-T_{1}^{-}.$$

Пусть для определенности $\sigma_0=S\cap W^u(p)$. Тогда τ^-, $\tilde{\tau}^-\to-\infty$ при $\rho\to0$. Определим функцию $t^*(\sigma, \rho, t)$ на $S^{n-2}\times(0, 1]\times(-\infty, +\infty)$,

$$t^*=\begin{cases}\tilde{\tau}^-+t-\tau^-, & t\in(-\infty, T^-],\\ ((T_1^- - \tilde{T}^-)t+(\tilde{T}^- - T^-)T_1^-)/(T_1^- - T^-), & t\in(T^-, T_1^-),\\ t, & t\in[T_1^-, +\infty),\end{cases}$$

и функцию $\bar{t}(\sigma, \rho, t)=\varkappa(\rho)t+(1-\varkappa(\rho))t^*(\sigma, \rho, t)$. Отображение h на множестве траекторий, пересекающих U_0, задается так: точке $\varphi(\alpha(\sigma, \rho), t)$ сопоставляется точка

$$\tilde{\varphi}(\eta(\alpha(\sigma, \rho)), \bar{t}(\sigma, \rho, t)),\quad (\sigma, \rho, t)\in S^{n-2}\times(0, 1]\times(-\infty, +\infty),$$

точке $\varphi(x, t)$, $x\in\sigma_0$,— точка $\tilde{\varphi}(\eta(x), t)$. Аналогично строится отображение h на $U_1, \ldots, U_m$. Точке $\varphi(x, t)$, $x\in J\setminus(U_0\cup\ldots\cup U_m)$ сопоставляется точка $\tilde{\varphi}(\eta(x), t)$.

Проделаем аналогичное построение на остальных ячейках сферы S и отобразим точки покоя q на $\tilde{q}$. Построенное отображение h взаимно однозначно и переводит траектории на траектории. Его непрерывность доказывается так же, как в теореме 2.1 [5]. Если ν — диффеоморфизм системы (3.1) из G_2 в G, $\tilde{\nu}$ — из $\tilde{G}_2$ в $\tilde{G}$, то $h_0=\tilde{\nu}^{-1}\circ h\circ\nu$ — гомеоморфизм $G_2\to\tilde{G}_2$. Он очевидным образом продолжается до искомого гомеоморфизма S^n. Теорема доказана.

4°. Рассмотрим теперь вопрос об условиях реализуемости фазовых диаграмм без критических связей в классе I.I)—I.II) на S^n, $n\geqslant3$. Пусть нам дана фазовая диаграмма Φ как множество связей $v\to q$ (ее можно рассматривать как конечный граф с вершинами $n+1$ вида, соответствующими всем возможным размерностям неустойчивых многообразий точек покоя от 0 до n). На нее переносятся все определения п. 2°, при этом под множеством точек покоя v, лежащих в $\omega(W^u(q))$, будем понимать множество точек покоя v таких, что $q\to v$.

Предположим, что диаграмма Φ реализуема в классе I.I)—I.II) на S^n, $n\geqslant3$, тогда по лемме 2.2 в нее входят лишь связи $v\to q$, где v, q — точки покоя, у которых размерность неустойчивого многообразия есть одно из чисел 0, 1, $n-1$, n (напомним, что мы обозначаем такие точки покоя соответственно буквами s, r, p, o). Обозначим через Ω объединение всех точек покоя $q\in P$ таких, что в Φ есть связи $p\to q$ (другими словами, Ω — объединение множеств $\omega(W^u(p))$, при этом в Ω могут входить только точки s).

Будем говорить, что точка покоя $s\in P\setminus\Omega$ (или $r\in P\setminus\Omega$) связана с точкой $s_0\in\Omega$, если в Φ есть связь

$$s\leftarrow r^{(1)}\to s^{(1)}\leftarrow\ldots\to s_0$$

(или $r \to s^{(1)} \leftarrow \ldots \to s_0$), в которой все точки, кроме s_0, лежат в $P \backslash \Omega$. Из леммы 2.2 следует отсутствие циклов типа (0, 1), поэтому если H — компонента множества $P \backslash \Omega$, каждая точка покоя в H связана с одними и теми же точками $s \in \Omega$. Обозначим через $\Phi(H)$ фазовую диаграмму на компоненте H множества $P \backslash \Omega$, т. е. множество связей $r \to s$; $r, s \in H$. Будем говорить, что $\Phi(H)$ относится к набору $(s_1, \ldots, s_m, o)$, если каждая точка покоя $q \in H$ связана с каждой из точек $s_1, \ldots, s_m \in \Omega$, а в Φ есть связи $o \to q$, $o \to p_i \to s_i$, $i=1, \ldots, m$.

Лемма 4.1. *Если в Φ есть связь $p \to s$, то любая поддиаграмма $\Phi(H)$ относится к одному и только одному набору $(s_1, \ldots, s_m, o)$.*

Доказательство. Диаграмма Φ реализуема, мы будем считать, что Φ — фазовая диаграмма системы (1.1). Фиксируем одну из точек покоя o^* такую, что $o^* \to p$, и построим по ней вспомогательную систему (2.3). Если H — компонента множества $P \backslash \Omega$ (для системы (2.3)), обозначим через Γ «разветвленный цилиндр», являющийся частью сферы S (подробнее см. лемму 4.8 в [12, б]) и возникающий при построении части сферы S, соответствующей точкам покоя, входящим в H. Γ не пересекается ни с одной из сфер $\pi(p)$, поэтому либо Γ есть подмножество одного из множеств $\Delta(p)$, либо Γ лежит вне объединения множеств $\delta(p)$. В первом случае пусть o — единственная вполне неустойчивая точка покоя, лежащая в $D^*(p)$.

Рассмотрим точку $s_i \in \Omega$, с которой связана любая точка покоя $q \in H$, и соответствующую ей сферу $S(s_i)$, участвующую в построении сферы S. Γ пересекается со сферой $S(s_i)$, но не содержит ее целиком, граница $\Gamma \cap S \cap S(s_i)$ состоит из частей сфер $\pi(p^{(1)}), \ldots, \pi(p^{(l)})$, пересекающихся с $S(s_i)$. Это означает, что в Φ есть связи $o \to p^{(j)} \to s_i$, $j=1, \ldots, l$. Любая траектория, пересекающая Γ, при убывании t остается в $D^*(p)$ и стремится к o при $t \to -\infty$, отсюда следует единственность точки o, обладающей связями $o \to q$, $q \in H$. Во втором случае точно так же показывается, что $\Phi(H)$ относится к набору $(s_1, \ldots, s_m, o^*)$. Лемма доказана.

Фиксируем точку покоя o системы (1.1), обозначим через $T(o)$ поддиаграмму диаграммы Π, состоящую из тех связей $r \to s$, для которых в Φ есть связи $o \to r$, $o \to s$.

Лемма 4.2. *Если в Φ есть более чем одна точка покоя o, то в любую поддиаграмму $T(o)$ входят те и только те точки покоя r, s, которые либо входят в одну из поддиаграмм $\Phi(H)$, относящихся к наборам $(s_1, \ldots, s_m, o)$, либо участвуют в связи $o \to p \to s$.*

Доказательство. Фиксируем точку покоя o и перейдем от системы (1.1) к системе (2.3), построенной путем исключения некоторой точки $o^* \neq o$. По лемме 2.7 точка o лежит в одном из множеств $D^*(p)$ и является единственной вполне неустойчивой точкой покоя там. Утверждение леммы следует из рассмотрения поведения траекторий, пересекающих множество $\Delta(p)$.

Назовем две диаграммы $\Phi = \{p \to q\}$ и $\widetilde{\Phi} = \{\tilde{p} \to \tilde{q}\}$ обратными друг к другу, если существует взаимно однозначное отображение K множества точек покоя первой на множество точек покоя второй такое, что:

1) для любой точки покоя q

$$\dim W^u(K(q)) = n - \dim W^u(q);$$

2) в Φ есть связь $q \to v$ тогда и только тогда, когда в $\widetilde{\Phi}$ есть связь $K(v) \to K(q)$.

Теорема 4.1. *Для того чтобы фазовая диаграмма Φ была реализуема и определяла систему в классе I.I—I.II на S^n, $n \geqslant 3$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) в Ф нет критических связей и точек покоя q таких, что $2 \leqslant \dim W^u(q) \leqslant n-2$;

2) *диаграмма П связна;*

3) *в Ф нет циклов типа* (0, 1);

4) *для любой точки покоя p в Ф есть единственная связь $p \to q$, при этом $q = s$;*

5) *если в Ф есть связь $p \to s$, то любая поддиаграмма $\Phi(H)$ относится к одному и только одному набору $(s_1, \ldots, s_m, o)$;*

6) *если в Ф есть более чем одна точка покоя o, то в любую поддиаграмму $T(o)$ входят те и только те точки покоя r, s, которые либо входят в одну из поддиаграмм $\Phi(H)$, относящихся к наборам $(s_1, \ldots, s_m, o)$, либо участвуют в связи $o \to p \to s$;*

7) *для диаграммы $\tilde{\Phi}$, обратной к Ф, выполнены условия 2)—6).*

Доказательство. 1. Необходимость. Необходимость выполнения условий 1)—6) следует из лемм 2.2, 2.3, 4.1, 4.2. Необходимость выполнения условия 7) доказывается рассмотрением системы, которая получается из системы (1.1) заменой t на $-t$.

2. Достаточность. Доказательство реализуемости фазовой диаграммы Ф, удовлетворяющей условиям теоремы, будем вести описанием построения системы (подробное описание такого построения в трехмерном случае для диаграмм более сложного вида см. в [12, а, стр. 56—59]). Рассмотрим 4 стандартные n-мерные линейные системы с постоянными коэффициентами, заданные в $\|x\| < 1$, $x \in R^n$, и имеющие в начале координат соответственно гиперболическую устойчивую точку покоя (№ 1), точку покоя с одномерным неустойчивым многообразием (№ 2), точку покоя с $(n-1)$-мерным неустойчивым многообразием (№ 3) и вполне неустойчивую точку покоя (№ 4).

Фиксируем точку покоя o^* в Ф (она существует в силу условия 1.1). Поддиаграмма $T(o^*)$ непуста, связна (в силу условия 1.4) и не содержит циклов типа (0, 1). Пусть $s_1^*, \ldots, s_k^*$, $r_1^*, \ldots, r_{k-1}^*$ — все точки покоя в $T(o^*)$ (заметим, что число точек покоя r на 1 меньше, чем точек покоя s). Фиксируем в S^n $2k-1$ геометрически различные точки $s_1^*, \ldots, r_{k-1}^*$ (мы сохраняем за объектами строящейся системы те же обозначения, что и в фазовой диаграмме). Для каждой точки r_i^* фиксируем C^∞-диффеоморфизм $\zeta_i^* : [-1, 1] \to S^n$ такой, что $\zeta_i^*(0) = r_i^*$, а точки $\zeta_i^*(-1)$ и $\zeta_i^*(1)$ совпадают с теми точками s_{i1}^* и s_{i2}^*, для которых в Ф есть связи $s_{i1}^* \leftarrow r_i^* \to s_{i2}^*$. Зададим систему в окрестности каждой из точек s_i^* путем диффеоморфизма стандартной линейной № 1, при котором начало переходит в s_i^*, и в окрестности каждой из кривых $\zeta_i^*([-1, 1])$ путем диффеоморфизма стандартной линейной системы № 2, при котором начало переходит в r_i^*, а неустойчивое многообразие начала отображается на $\zeta_i^*((-1, 1))$. Легко видеть, что можно путем сглаживания получить систему класса C^1 в окрестности $U(o^*)$ объединения всех кривых $\zeta_i^*([-1, 1])$, при этом полученная окрестность будет гомеоморфна n-мерному шару и будет иметь границу, являющуюся $(n-1)$-мерной сферой без контакта (доказательство этого повторяет доказательство теоремы 1.1 в [6]). Если o^* — единственная вполне неустойчивая точка покоя в Ф, то в Ф нет точек покоя p (иначе в $\tilde{\Phi}$ был бы цикл типа (0, 1)), поэтому $T(o^*)$ совпадает с П. Отобразив в $S^n \setminus U(o^*)$ стандартную систему № 4, получим систему класса I.I)—I.II) на S^n, фазовая диаграмма которой есть Ф. Если же o^* не единственная вполне неустойчивая точка покоя в Φ, то из связности поддиаграммы $\Phi \backslash \Pi$ (поддиаграммы $\tilde{\Pi}$ для $\tilde{\Phi}$) следует, что существует точка покоя p в Φ.

Пусть $p_1, \ldots, p_m$ — все точки покоя p такие, что $o^* \to p_1, \ldots, o^* \to p_m$. Из условия 1.3) следует, что если $s_i = \omega(W^u(p_i))$, $i=1, \ldots, m$, то в Φ есть связи $o \to s_i$, т. е. s_i вошли в $T(o^*)$. Фиксируем точку $o^* \in S^n \backslash U(o^*)$ и построим непересекающиеся $(n-1)$-мерные сферы $Z_1, \ldots, Z_m$ такие, что $s_i \in Z_i$, а каждая из сфер Z_i делит S^n на области $D_i^{(1)}$ и $D_i^{(2)}$, причем $o^* \in D_i^{(2)}$, $i=1, \ldots, m$. (Естественно, что необходимо строить сферы Z_i так, чтобы они не пересекались с ранее построенными точками покоя и их неустойчивыми многообразиями.) Фиксируем на каждой из сфер Z_i точку p_i, отличную от s_i, и отобразим на некоторую окрестность $U(Z_i)$ сферы Z_i, гомеоморфную $S^{n-1} \times (-1, 1)$, стандартную систему № 3 так, чтобы начало перешло в точку p_i, а неустойчивое многообразие начала отобразилось на $Z_i \backslash s_i$. Из связности поддиаграммы $T(o^*)$ (условие 1.4) следует, что

$$A(o^*) = S^n \backslash (U(Z_1) \cup D_1^{(1)} \cup \ldots \cup U(Z_m) \cup D_m^{(1)} \cup U(o^*))$$

гомеоморфно n-мерному шару. Отобразим в $A(o^*)$ стандартную систему № 4 так, чтобы образом начала была точка o^*. Далее реализация аналогично производится в областях $D_i^{(1)}$. Пусть, например, o_1 — такая вполне неустойчивая точка покоя, что в Φ есть связи

$$o^* \to p_1 \leftarrow o_1 \to p_{i1}, \quad i=1, \ldots, m_1 \tag{4.1}$$

(существование такой точки o_1 следует из отсутствия циклов типа (0, 1) в $\tilde{\Phi}$). Из отсутствия циклов следует, что в Φ нет связи

$$o_1 \to p_1 \leftarrow o^* \to p^{(1)} \leftarrow \ldots \to p^{(k)} \leftarrow o_1,$$

где $p^{(1)}, \ldots, p^{(k)} \neq p_1$, поэтому точка o_1 должна реализоваться в области $D_1^{(1)}$ и только в ней. Реализуем в $D_1^{(1)}$ все точки покоя, входящие в $T(o_1)$, и все точки p_{i1}, для которых в Φ есть связи (4.1). Доказательство, аналогичное проведенному выше, показывает, что для любой точки покоя q в Φ найдется единственная область вида $D_i^{(1)}$, в которой точка покоя q должна быть реализована. Принадлежность построенной системы классу I.I)—I.II) очевидна. Теорема доказана.

Литература

1. Смейл С. Успехи матем. наук, **25** (151) : 1, 1970.
2. Palis J. Topology, **8** : 4, 1969.
3. Пилюгин С. Ю. Дифференц. уравнения, **11**, № 8, 1975.
4. Мышкис А. Д., Рейзинь Л. Э. Матем. заметки, **3**, № 6, 1968.
5. Пилюгин С. Ю. Дифференц. уравнения, **10**, № 5, 1974.
6. Пилюгин С. Ю. Дифференц. уравнения, **9**, № 6, 1973.
7. Пилюгин С. Ю. Дифференц. уравнения, **10**, № 3, 1972.
8. Пилюгин С. Ю. Дифференц. уравнения, **13**, № 5, 1974.
9. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds. Dynamical systems, N. Y., 1973.
10. Болтянский В. Г. Об основных понятиях алгебраической топологии. II Летняя матем. школа, т. II, Киев, 1965.
11. Плисс В. А. Дифференц. уравнения, **5**, № 6, 1969.
12. Пилюгин С. Ю. а) Вестник Ленингр. ун-та, № 1, 1976; б) Вестник Ленингр. ун-та, № 7, 1976.
13. Браун М. Сб. переводов, «Математика», **5**, № 5, 1961.

Поступила в редакцию 14 мая 1976 г.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова