



Общероссийский математический портал

А. Н. Бугай, О генерации спектрального суперконтинуума в нелинейных кристаллах с одноосной анизотропией,  
*Учён. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки*, 2009, том 151, книга 1, 43–50

<https://www.mathnet.ru/uzku717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.80

15 мая 2025 г., 21:53:47



УДК 535.012.21+530.182

## О ГЕНЕРАЦИИ СПЕКТРАЛЬНОГО СУПЕРКОНТИНУУМА В НЕЛИНЕЙНЫХ КРИСТАЛЛАХ С ОДНООСНОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ

*А.Н. Бугай*

### Аннотация

Исследованы особенности генерации спектрального суперконтинуума в нелинейной среде с одноосной анизотропией. Выявлены основные механизмы сверхширения спектра линейно поляризованного импульса с различной ориентацией поля относительно оптической оси. Предсказана возможность формирования квазидискретного спектра на волне необыкновенной поляризации.

**Ключевые слова:** спектральный суперконтинуум, предельно короткий импульс, одноосная анизотропия.

---

### Введение

Явление генерации спектрального суперконтинуума в нелинейной оптике фемтосекундных импульсов по праву можно отнести к разряду универсальных. Изучению этого феномена ввиду его уникальных свойств посвящено немало как теоретических, так и экспериментальных работ. Основная масса таких исследований относится к случаю изотропных сред, в то время как среды с анизотропией изучены менее детально. Это же можно сказать и об оптике предельно коротких импульсов в целом. Среды с квадратичной нелинейностью традиционно служат для реализации различных спектральных преобразований: генерации гармоник, суммарных и разностных частот, параметрических процессов [1]. Однако явлению сверхширения спектров в таких средах посвящено не так уж и много работ.

Важной отличительной особенностью анизотропных прозрачных нелинейных сред является наличие слагаемых в поляризационном отклике, квадратичных по электрическому полю. В то же время для высокоинтенсивных импульсов могут проявиться и нелинейные слагаемые более высокого порядка, пропорциональные кубу поля импульса. Последние, как известно [2], играют принципиальную роль в явлении сверхширения спектра импульса. Наличие двулучепреломления, а также возможности параметрического взаимодействия между компонентами с различной поляризацией может внести дополнительные особенности в рассматриваемый процесс.

Настоящая работа посвящена выявлению особенностей генерации спектрального суперконтинуума в квадратично-нелинейной среде с одноосной анизотропией.

### 1. Нелинейные волновые уравнения

Рассмотрим процесс распространения предельно короткого импульса в квадратично нелинейной среде с одноосной анизотропией. Для простоты будем считать, что мощный линейно поляризованный фемтосекундный лазерный импульс распространяется в кристалле в направлении (ось  $z$ ), перпендикулярном оптической оси.

В этом случае соответствующие компоненты тензора нелинейной восприимчивости второго порядка максимальны. Кроме того, в поляризационном отклике будут отсутствовать слагаемые, содержащие продольную составляющую поля [3].

Вектор электрического поля импульса может составлять произвольный угол  $\theta$  с направлением оптической оси. В случае  $\theta = 0^\circ$  на входе будем иметь только волну необыкновенной поляризации, в то время как при угле  $\theta = 90^\circ$  присутствует только обыкновенная волна.

Ввиду малой длительности предельно короткого импульса, который содержит всего несколько оптических колебаний, необходимо описывать эволюцию непосредственно его поля, а не огибающей. Воспользуемся системой нелинейных волновых уравнений, предложенной в работе [3]. Искомые уравнения в рассматриваемой геометрии примут вид

$$\frac{\partial E_o}{\partial z} - a_o \frac{\partial^3 E_o}{\partial \tau^3} + b_o \int_{-\infty}^{\tau} E_o d\tau' + g_{2eo} \frac{\partial E_e E_o}{\partial \tau} + g_{3eo} \frac{\partial E_e^2 E_o}{\partial \tau} + 3g_{3o} E_o^2 \frac{\partial E_o}{\partial \tau} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_e}{\partial z} - \frac{n_o - n_e}{c} \frac{\partial E_e}{\partial \tau} - a_e \frac{\partial^3 E_e}{\partial \tau^3} + b_e \int_{-\infty}^{\tau} E_e d\tau' + 2g_{2eo} E_o \frac{\partial E_o}{\partial \tau} + 2g_{2e} E_e \frac{\partial E_e}{\partial \tau} + \\ + g_{3eo} \frac{\partial E_o^2 E_e}{\partial \tau} + 3g_{3e} E_e^2 \frac{\partial E_e}{\partial \tau} = 0, \quad (2) \end{aligned}$$

где  $E_o$  и  $E_e$  – поля обыкновенной и необыкновенной составляющих импульса,  $\tau = t - n_o z/c$  – локальное время,  $n_o$  и  $n_e$  – линейные безынерционные показатели преломления обыкновенной и необыкновенной волн соответственно,  $c$  – скорость света. Слагаемые с коэффициентами  $a$  и  $b$  учитывают линейные эффекты дисперсии. Коэффициенты  $g_2$  и  $g_3$  при нелинейных слагаемых выражаются через соответствующие компоненты тензоров нелинейной восприимчивости второго и третьего порядка:

$$g_{2eo} = \frac{2\pi\chi_{eo}^{(2)}}{n_o c}, \quad g_{2e} = \frac{2\pi\chi_e^{(2)}}{n_o c}, \quad g_{3eo} = \frac{2\pi\chi_{eo}^{(3)}}{n_o c}, \quad g_{3o} = \frac{2\pi\chi_o^{(3)}}{n_o c}, \quad g_{3e} = \frac{2\pi\chi_e^{(3)}}{n_o c}.$$

При выводе уравнений (1), (2) предполагалось, что спектр импульса лежит в области оптической прозрачности кристалла. В этом случае дисперсия показателя преломления с хорошей точностью может быть записана в виде разложения

$$n_{o,e}(\omega) = n_{o,e} + a_{o,e} c \omega^2 - \frac{b_{o,e} c}{\omega^2}. \quad (3)$$

Второе и третье слагаемые в правой части (3) определяют вклад электронной и ионной дисперсии соответственно. Известно, что генерацию спектрального суперконтинуума можно осуществить только в области положительной групповой дисперсии, то есть  $\partial^2 k / \partial \omega^2 > 0$ . Тогда из выражения (3) для показателя преломления получим необходимое условие на центральную частоту спектра импульса:

$$\omega > \left( \frac{b_{o,e}}{3a_{o,e}} \right)^{1/4}.$$

Нелинейный отклик имеет нерезонансную природу. Следует отметить асимметрию между волнами различной поляризации. Вследствие нелинейного взаимодействия, как следует из (1), (2), обыкновенная волна может породить необыкновенную, в то время как обратный процесс запрещен.

Исходя из указанного факта, можно выделить два различающихся сценария взаимодействия импульса со средой. В первом случае, когда на входе имеется только составляющая поля с необыкновенной поляризацией, соответствующее уравнение, за исключением квадратично нелинейного слагаемого, не будет существенно отличаться от такового для изотропной среды. Во втором случае, когда имеется еще и обыкновенная волна, к генерации суперконтинуумов на соответствующих поляризациях добавится еще и их взаимодействие.

## 2. Результаты численного моделирования

Распространенным примером рассматриваемых сред может служить одноосный кристалл типа  $\text{LiNbO}_3$ , обладающий хорошо выраженным двулучепреломлением. Данный кристалл прозрачен в диапазоне длин волн примерно от 0.3 до 5 мкм. Параметры в аппроксимации (3) имеют следующие значения [4]:  $a_o = 3.3 \cdot 10^{-43} \text{ c}^3/\text{см}$ ,  $a_e = 2.78 \cdot 10^{-43} \text{ c}^3/\text{см}$ ,  $b_o = 3.49 \cdot 10^{17} \text{ c}^{-1} \text{ см}^{-1}$ ,  $b_e = 2.99 \cdot 10^{17} \text{ c}^{-1} \text{ см}^{-1}$ . Групповая дисперсия положительна при длинах волн короче 2.4 мкм.

Величины нелинейных восприимчивостей второго порядка равны:  $\chi_{eo}^{(2)} = 1.17 \cdot 10^{-8} \text{ сгсэ}$ ,  $\chi_e^{(2)} = 6.78 \cdot 10^{-8} \text{ сгсэ}$  [4]. Величины нелинейных восприимчивостей третьего порядка в направлении, перпендикулярном оптической оси, измерить затруднительно. Однако эти величины нетрудно оценить, используя известные значения восприимчивости  $\chi^{(3)} = \chi_o^{(3)} = 0.17 \cdot 10^{-12} \text{ сгсэ}$  [4] в направлении распространения вдоль оптической оси (когда в поляризации отсутствуют квадратичные нелинейности и нет двулучепреломления). Как показано в работе [3], указанные величины могут быть выражены через микроскопические параметры  $N$ -уровневой среды, такие, как дипольные моменты, характерные частоты и инверсии населенностей квантовых уровней. Считая, что дипольные моменты  $\pi$ - и  $\sigma$ -переходов (соответственно  $d$  и  $D$ ) примерно одинаковы по порядку величины, можно привести оценку, согласно которой  $\chi_{eo}^{(2)} \sim d^2 D$ ,  $\chi_e^{(2)} \sim D^3$ ,  $\chi_o^{(3)} \sim d^4$ ,  $\chi_{eo}^{(3)} \sim d^2 D^2$ ,  $\chi_e^{(3)} \sim D^4$ .

Таким образом, имеем

$$\chi_{eo}^{(3)} \sim \frac{D^2}{d^2} \chi_o^{(3)} \sim \frac{\chi_e^{(2)}}{\chi_{eo}^{(2)}} \chi_o^{(3)}, \quad \chi_e^{(3)} \sim \frac{D^4}{d^4} \chi_o^{(3)} \sim \left( \frac{\chi_e^{(2)}}{\chi_{eo}^{(2)}} \right)^2 \chi_o^{(3)}.$$

Тогда,  $\chi_{eo}^{(3)} = 0.97 \cdot 10^{-12} \text{ сгсэ}$ ,  $\chi_e^{(3)} = 5.61 \cdot 10^{-12} \text{ сгсэ}$ .

В качестве начального условия на входе в среду ( $z = 0$ ) рассматривался импульс излучения вида

$$E = E_0 \exp\left(-2 \ln 2 \frac{\tau}{\tau_p}\right) \sin(\omega_0 \tau),$$

где  $E_0$  – входная амплитуда поля импульса,  $\tau_p$  и  $\omega_0$  – его длительность и частота. Обыкновенная и необыкновенная составляющие импульса определяются как  $E_o = E \sin \theta$ ,  $E_e = E \cos \theta$ .

В дальнейшем исследовалась эволюция импульса с длиной волны 800 нм и длительностью 15 фс. Такой импульс содержит порядка десяти колебаний, то есть является предельно коротким. Соответствующая частота лежит в области нормальной дисперсии, а значит, удовлетворяет условию формирования суперконтинуума. При обезразмеривании амплитуды полей и спектров составляющих импульса нормировались на начальные значения ( $E_0$ ), а шкалы времен и частота задавались в единицах  $\omega_0^{-1}$  и  $\omega_0$  соответственно, где  $\omega_0$  – центральная частота спектра импульса на входе в среду. Дистанция распространения задавалась в единицах длины

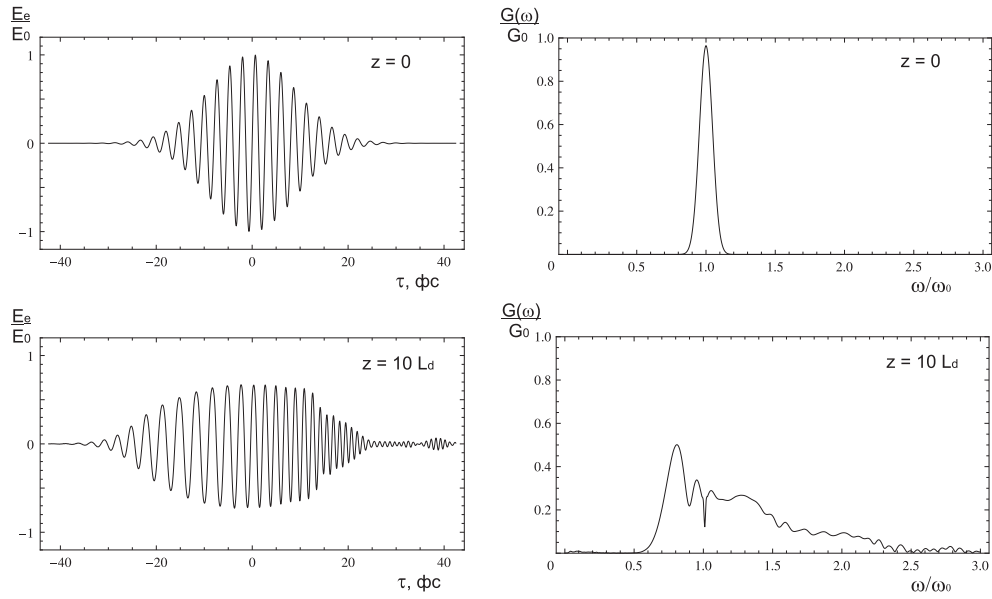


Рис. 1. Эволюция профиля (справа) и спектра (слева) импульса, когда на входе имеется только волна с необыкновенной поляризацией. Начальная интенсивность равна  $2 \cdot 10^{12}$  Вт/см<sup>2</sup>

дисперсионного расплывания  $l_d = 1/a_o\omega_0^3$ , обусловленной электронным откликом. Нетрудно оценить, что  $l_d$  составляет 2.3 мкм, то есть всего в три раза превышает длину волны. Начальные интенсивности брались в диапазоне  $10^{12} - 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>.

Результаты моделирования демонстрируют деформацию как профиля импульса, так и его спектра. В простейшем случае распространения только необыкновенной волны (рис. 1) динамика изменения формы и спектра импульса качественно мало отличаются от случая изотропной среды (см., например, [5]). Это связано с тем, что при достаточно высоких интенсивностях, когда начинает эффективно протекать процесс генерации суперконтинуума, сказывается в основном действие кубической нелинейности, характерной для изотропной среды.

В случае же, когда присутствуют и обыкновенная, и необыкновенная волны, процесс протекает иначе благодаря взаимодействию между данными компонентами (рис. 2, 3). Необходимо отметить, что поскольку нелинейные восприимчивости на поляризации обыкновенной волны почти в несколько раз меньше соответствующих значений для необыкновенной, то амплитуда входного импульса была увеличена. Сначала рассмотрим простейший случай, когда необыкновенная волна отсутствовала на входе (то есть  $\theta = 90^\circ$ ).

Как видно из рис. 3, спектр генерируемой необыкновенной волны уширяется гораздо сильнее, хотя ее интенсивность гораздо меньше, чем в ситуации, изображенной на рис. 1. Это обусловлено спецификой передачи энергии от обыкновенной волны к необыкновенной (как указано в п. 2, обратный процесс запрещен), что становится возможным при достаточно больших интенсивностях. Обычное условие синхронизма для генерации второй гармоники [4] в данных условиях не достигается, поэтому переход энергии в необыкновенную волну сравнительно малоэффективен. Указанный процесс уширения спектра имеет довольно простое качественное объяснение. Рассмотрим эволюцию импульса на малой дистанции распространения, считая, что на входе отсутствует необыкновенная волна. Взяв профиль

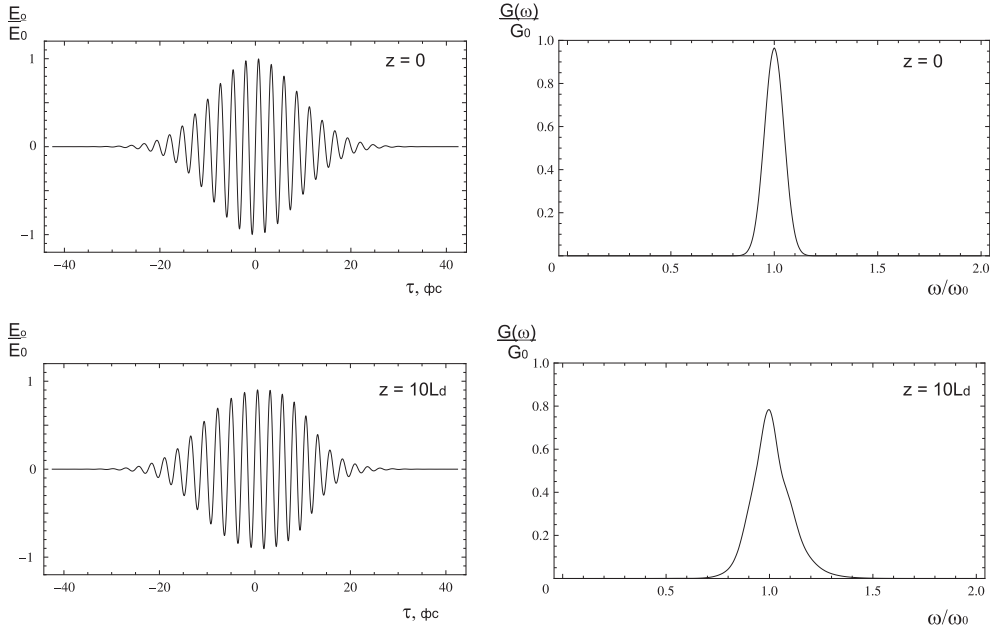


Рис. 2. Эволюция профиля (справа) и спектра (слева) обыкновенной составляющей импульса, когда на входе имеется только волна с обыкновенной поляризацией. Начальная интенсивность равна  $1 \cdot 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>

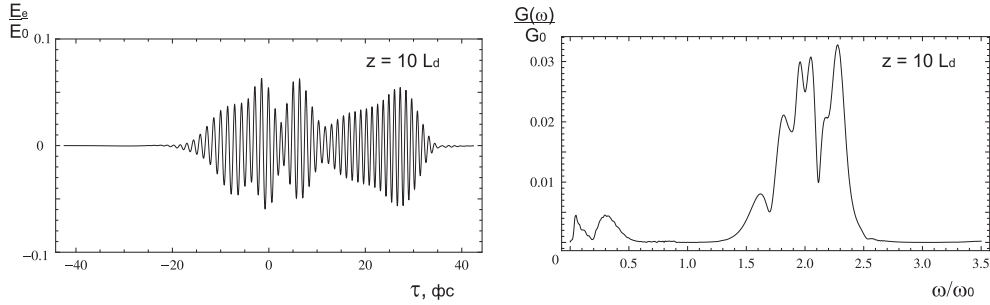


Рис. 3. Эволюция профиля (справа) и спектра (слева) необыкновенной составляющей импульса, когда на входе имеется только волна с обыкновенной поляризацией. Начальная интенсивность равна  $1 \cdot 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>

импульса в форме бегущей волны, можно привести простую оценку

$$E_e \sim \frac{E_o^2}{1 - g_{3eo}E_o^2/g_{2eo}}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что если пренебречь кубической нелинейностью, то характерная ширина спектра необыкновенной составляющей будет в два раза шире, чем у обыкновенной. Таким образом, имеет место некоторая аналогия с генерацией второй гармоники для предельно коротких импульсов [3], когда помимо удвоения центральной частоты, как в случае квазимонохроматических импульсов, происходит удвоение ширины спектра.

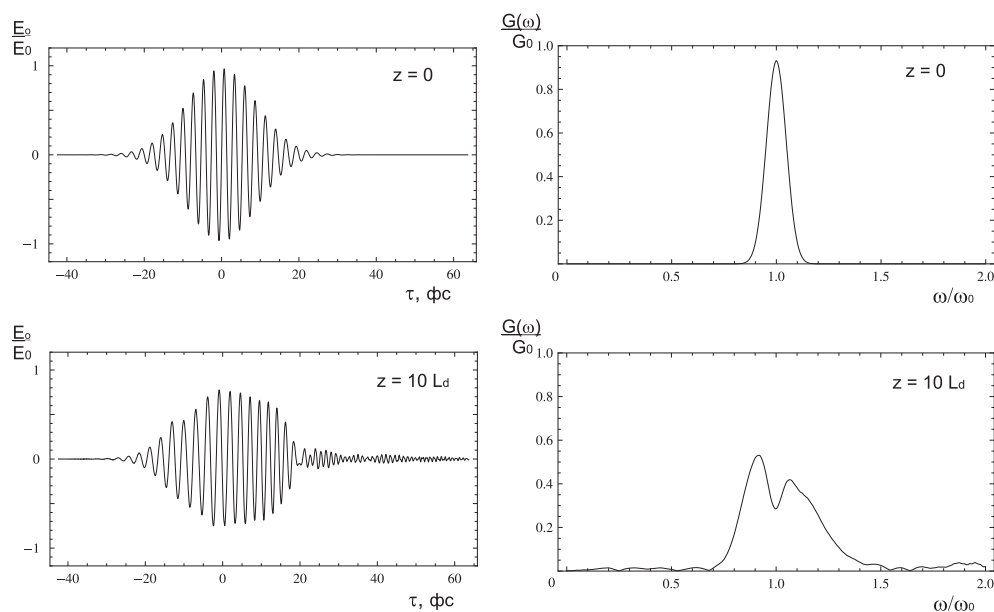


Рис. 4. Эволюция профиля (справа) и спектра (слева) обыкновенной составляющей импульса, когда на входе имеются волны с обыкновенной и необыкновенной поляризацей. Начальная интенсивность равна  $3 \cdot 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>

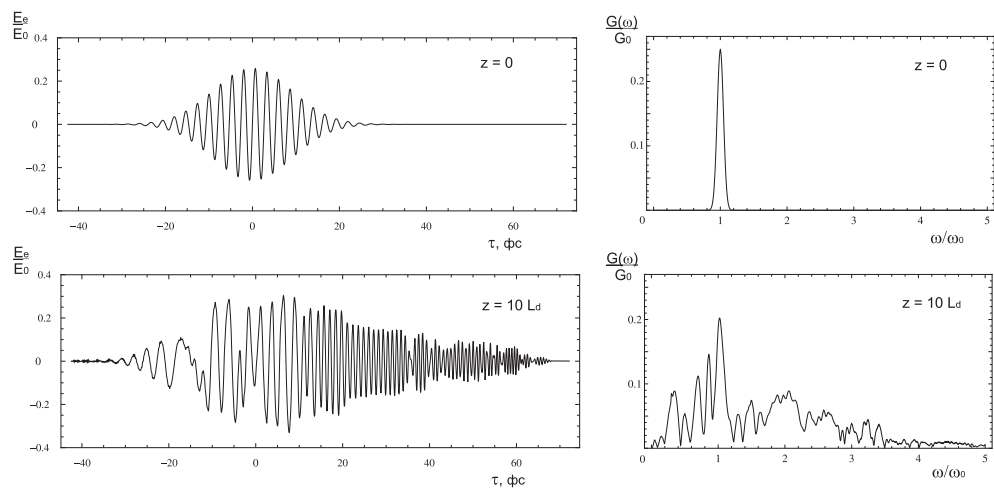


Рис. 5. Эволюция профиля (справа) и спектра (слева) необыкновенной составляющей импульса, когда на входе имеются волны с обыкновенной и необыкновенной поляризацей. Начальная интенсивность равна  $3 \cdot 10^{13}$  Вт/см<sup>2</sup>

Учитывая влияние кубической нелинейности в соотношении (4), видим, что уширение спектра будет непрерывно расти с увеличением интенсивности обыкновенной волны. Таким образом, здесь можно ввести понятие индуцированной генерации суперконтинуума, когда обыкновенная волна, спектр которой уширен незначительно (рис. 2), генерирует необыкновенную волну со сверхуширенным спектром (рис. 3).

Известно, что взаимодействие двух суперконтинуумов в изотропной среде приводит к их интерференции и формированию квазидискретного спектра, или так называемой частотной гребенки [5]. Подобный эффект можно реализовать путем взаимодействия двух различных предельно коротких импульсов с разными центральными частотами спектров, происходящих от одного источника [5].

Как следует из приведенных результатов моделирования (рис. 4, 5), подобный эффект возможен и в анизотропной среде, причем на вход достаточно подать один импульс. Здесь происходит взаимодействие суперконтинуумов на необыкновенной поляризации. Первый из них образуется в результате самодействия необыкновенной составляющей импульса, отличной от нуля на входе в среду. Подобный случай соответствует ситуации, изображенной на рис. 1. Второй суперконтинуум образуется по индуцированному механизму в результате передачи энергии от обыкновенной волны. В результате взаимодействия перечисленных суперконтинуумов, образуется квазидискретный спектр (рис. 5) с частичным перекрытием составляющих. На временном профиле это соответствует набору нескольких перекрывающихся субимпульсов с различными несущими частотами, причем ширины их спектров – порядка ширины спектра исходного импульса. Таким образом, реализуется параметрическая генерация квазидискретного суперконтинуума путем нелинейного взаимодействия обыкновенной и необыкновенной волн.

### Заключение

В настоящей работе исследованы особенности генерации спектрального суперконтинуума в квадратично-нелинейной среде с одноосной анизотропией на примере кристалла ниобата лития. Наиболее эффективно происходит генерация спектрального суперконтинуума для волны с необыкновенной поляризацией.

Возможны несколько различных механизмов генерации спектрального суперконтинуума в одноосном кристалле. При наличии на входе только волны с необыкновенной поляризацией, процесс качественно не отличается от такового в случае изотропной среды. Если на входе есть только волна с обыкновенной поляризацией, то происходит генерация суперконтинуума для необыкновенной волны на удвоенной частоте, в то время как спектр обыкновенной составляющей уширяется незначительно. В общем случае, когда на входе имеются составляющие на обеих поляризациях, в процессе генерации суперконтинуума образуется квазидискретный спектр. Это может служить еще одним способом формирования так называемых частотных «гребенок», аналогичным соответствующему механизму для изотропных сред.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-02-00503а).

### Summary

*A. N. Bugay. On Generation of Spectral Supercontinuum in Uniaxial Nonlinear Crystals.*

The specifics of spectral supercontinuum generation in nonlinear medium with uniaxial anisotropy is examined. The principal mechanisms of spectral broadening of linearly polarized pulse are demonstrated under condition of different field orientation in relation to the optical axis. The possibility of semidiscrete spectrum generation is predicted on the extraordinary wave polarization.

**Key words:** spectral supercontinuum, few cycle pulse, uniaxial anisotropy.



**Литература**

1. *Суворуков А.П.* Нелинейные волновые взаимодействия в оптике и радиофизике. – М.: Наука, 1988. – 232 с.
2. *Крюков П.Г.* Фемтосекундные импульсы. – М.: Физматлит, 2008. – 208 с.
3. *Сазонов С.В., Соболевский А.Ф.* О нелинейном распространении предельно коротких импульсов в оптически одноосных средах // ЖЭТФ. – 2003. – Т. 123, № 6. – С. 1160–1178.
4. *Nikogosyan D.N.* Nonlinear Optical Crystals: A Complete Survey. – N. Y.: Springer, 2005. – 430 p.
5. *Tortora F., Corsi C., Bellini M.* Comb-like supercontinuum generation in bulk media // Appl. Phys. Lett. – 2004. – V. 85, No 7. – P. 1113–1115.

Поступила в редакцию  
20.01.09

---

**Бугай Александр Николаевич** – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник лаборатории радиационной биологии, Объединенный институт ядерных исследований (ОИЯИ), г. Дубна.

E-mail: [bugay@jinr.ru](mailto:bugay@jinr.ru), [bugay\\_aleksandr@mail.ru](mailto:bugay_aleksandr@mail.ru)