А.Ф.Вакуленко

ОТСУТСТВИЕ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Настоящая работа служит продолжением статьи автора [I] . Мы докажем отсутствие собственных значений у оператора Штарка и одну оценку, пропущенную в [I] .

I. Рассмотрим в $L_2(R^n)$ самосопряженный оператор $H_0=\Delta+x_1$, заданный на естественной области определения $\mathcal{D}(H_0)$. Пусть ρ – гладкая, положительная функция, зависящая только от x_1 . Пусть, кроме того, $\rho(x)=\frac{1}{x_1}$ при $x_1>N$, и $\rho(x)=|x_1|$ при $x_1<-N$, для некоторого $N>0$.

ЛЕММА I. Пусть $f\in\mathcal{D}(H_0)$. Тогда величина $\int_{R^n}\rho|\nabla f|^2dx$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f\in C^\infty(R^n)$ вещественна. Имеем

$$\int_{R^n}((\Delta+x_1+\rho)f)^2dx=\int_{R^n}\{((\Delta+x_1)f)^2+(\rho^2+2x_1\rho+\rho'')f^2-2\rho(\nabla f)^2\}dx,$$

где штрих означает производную по x_1 . Из определения ρ видно, что $\rho^2+2x_1\rho+\rho''<C$ при некотором $C>0$. Из предыдущего тождества следует $2\int_{R^n}\rho|\nabla f|^2dx\leqslant\int_{R^n}|(\Delta+x_1)f|^2dx+c\int_{R^n}|f|^2dx$.

Утверждение леммы получается замыканием этого неравенства.

Пусть v – вещественная функция на R^n такая, что

$$|v(x)|^2\leqslant\alpha\equiv c(1+\varepsilon x_1^2)^a,\qquad a>\frac{1}{2}. \tag{I.I}$$

Пусть V – оператор умножения на v . Положим $H=H_0+V$, $\mathcal{D}(H)=\mathcal{D}(H_0)$. Тогда H самосопряжен.

ТЕОРЕМА I. У оператора H нет собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $f\in\mathcal{D}(H)$ и $Hf=\lambda f$, для некоторого вещественного λ . Пусть $\beta'=\alpha$. Положим $g=e^\beta f$. Тогда $g\in\mathcal{D}(H)$ и $\Delta g-2\alpha g'+(\alpha^2-\alpha')g+x_1g+vg-\lambda g=0$.

Умножая левую часть уравнения на $2g'$ и интегрируя, получим

$$\int_{R^n}(g^2+4\alpha g'^2+(\alpha^2-\alpha')'g^2-2vgg')\,dx=0\ . \tag{I.2}$$

По лемме I интеграл от каждого слагаемого конечен, что позволяет легко оправдать проведенное интегрирование по частям. Выбрав ε в (I.I) достаточно малым, можно считать, что $(\alpha^2-\alpha')'<\frac{1}{2}$.

Тогда $\int_{R^n}(\frac{1}{2}g^2+4\alpha g'^2-2vgg')dx\leq 0$. Поскольку

$|2vgg'|\leq 4v^2g'^2+\frac{1}{4}g^2\leq 4\alpha g'^2+\frac{1}{4}g^2$, g тождественно равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат вычислений, проведенных при доказательстве теоремы I, можно представить как положительность коммутатора

$$[A, H]\geq cI \quad , \quad c>0 ,$$

где $A=e^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_1}e^{\beta}$. Действуя в духе Мурра, можно было бы получить, например, абсолютную непрерывность спектра H . Однако подобные результаты легко получаются другими средствами, см. [2,3] . В работе [2] имеется также утверждение типа теоремы I , в котором главное условие на v выглядит следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x_1}v\leq c<1 , \quad x_1\to\infty .$$

Нам также нетрудно дополнить теорему I, считая, что $v=v_1+v_2$, где v_1 удовлетворяет (I.I), а v_2 такое, что $\frac{\partial}{\partial x_1}v_2\leq c<1$. При этом в (I.2) нужно сделать следующее преобразование

$$-2\int_{R^n}vgg'dx=-2\int_{R^n}v_1gg'+\int_{R^n}v_2'g^2 .$$

Другое отличие доказательства в [2] состоит в том, что там, по-существу, рассматривается только область больших x_1 . Всякое решение принадлежащее L_2 в окрестности бесконечности по x_1 , оказывается тождественным нулем в (возможно меньшей) окрестности бесконечности. Далее следует ссылка на теорему единственности продолжения. Эти более сильные результаты стоят, однако, и больших трудов. В то же время в теории рассеяния достаточно иногда и элементарных результатов типа теоремы I .

2. В работе [I] было доказано и использовано неравенство

$$\int_{R^n}|x|^2(\Delta f+f)^2dx\geq c\int_{R^n}f^2dx , \quad n\geq 3 . \tag{2.I}$$

Формулировка основного результата подразумевала, что оно справедливо и при $n=2$, что неверно. Вместо этого верно

$$\int_{R^2}(1+|x|^2)(\Delta f+f)^2dx\geq c\int_{R^n}f^2dx . \tag{2.2}$$

В соответствии с этим, упомянутый результат работы [I] формулируется следующим образом.

Уравнение $-\Delta f+vf=f$ не имеет решений из $L_2(R^n)$ при следующих условиях на v .

$n \geq 3$. $|x|\,V(x)$ ограничено и стремится к нулю при $|x| \to \infty$.

$n = 2$. $(1+|x|)\,V(x)$ ограничено и стремится к нулю при $|x| \to \infty$.

Пусть $h_b = \left(\frac{d}{dr}\right)^2 + I - \frac{b}{r^2}$ – оператор в $L_2(0,\infty)$. (2.I) и (2.2) вытекают из следующих неравенств.

$$\|r h_b f\|^2 \geq c\,\|f\|^2, \qquad b \geq b_0 > -\frac{1}{4} . \tag{2.3}$$

$$\|(1+r) h_b f\| \geq c\,\|f\|^2, \qquad b \geq -\frac{1}{4} . \tag{2.4}$$

Докажем их. Пусть $f \in C_0^\infty(0,\infty)$, тогда

$$\int_0^\infty \left(f^2 + f'^2 + \frac{b}{r^2} f^2\right) dr = -2\int_0^\infty r f'(h_b f)\, dr \leq \int_0^\infty \left(f'^2 + r^2 (h_b f)^2\right) dr .$$

Следовательно, при $b \geq 0$ (2.3) верно с $c = 1$. При $b \in (b_0, 0)$ воспользуемся неравенством Харди $\int_0^\infty \frac{1}{r^2} f^2\, dr \leq 4\int_0^\infty f'^2\, dr$ и получим (2.3) с $c = (1+4b_0)^{-1}$. Подобным же образом получается (2.4). Пусть $f = \sqrt{r}\, g$, тогда

$$\int_0^\infty \left(r(g'^2 + g^2) + \left(b + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{r} g^2\right) dr = \int_0^\infty (h_b f)(2r\sqrt{r}\, g' + \sqrt{r}\, g)\, dr \leq$$

$$\leq \int_0^\infty \left(r^2 (h_b f)^2 + r g'^2\right) dr + \int_0^\infty \left(2(h_b f)^2 + \frac{1}{2} r g^2\right) dr .$$

Окончательно получаем $\frac{1}{2}\int_0^\infty f^2\, dr \leq \int_0^\infty r^2 (h_b f)^2\, dr + 2\int_0^\infty (h_b f)^2\, dr$.

Литература

I. В а к у л е н к о А.Ф. Неравенство Трева и отсутствие положительных собственных значений у оператора Шредингера с комплексным потенциалом. В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.I7. - Зап.научн.семин. ЛОМИ, I985, т.I47, с.I3-I7.

2. A v r o n J.E., H e r b s t I.W. Spectral and Scattering Theory of Schrodinger operators Related to the Stark Effect.- Comm.Math.Phys., v.52, N 3, p.239-254.

3. S i m o n B. Phase space analysis of symple scattering systems: extention of some work of Enss. Duke Math.J., v.46, N 1, p.119-168.

Vakulenko A.F. The absence of bound states for the two-body system in the external electric field.

We prove the absence of bound states for the two-body system in the external electric constant field. A class of potentials is essentially the same for wich wave operators exist.