К. К. Лаврентьев, Е. В. Маркова, Одна обратная задача восстановления неизвестного коэффициента в граничном условии третьего рода в трехмерном случае,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1983, том 128, 102–104

К.К.Лаврентьев, Е.В.Маркова

ОДНА ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВОССТАНОВЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНОГО КОЭФФИЦИЕНТА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ ТРЕТЬЕГО РОДА В ТРЕХМЕРНОМ СЛУЧАЕ

В работе рассмотрена задача о нахождении неизвестного коэффициента в граничном условии третьего рода следующего вида:

$$\left[\frac{\partial U(x,y,z,t)}{\partial z} + h(x,y)\,U(x,y,z,t)\right]\Big|_{z=0} = f(x,y,z,t) \qquad (1)$$

по некоторым сведениям о решении прямой задачи

$$\begin{cases} U_{tt} = \Delta_3 U, \; z>0 \\ \left[\frac{\partial U}{\partial z} + h(x,y)U\right]\Big|_{z=0} = \delta(x,y,t) \\ U\big|_{t<0} \equiv 0 \end{cases} \qquad (2)$$

В (2) $h(x,y)$ - непрерывная функция. Предполагается, что

$$h(x,y) = h_1(x^2+y^2) = h_2(\rho)$$

Если искать решение задачи (2) в виде $U = U_0 + G$, где

$$G = \frac{1}{2\pi}\delta(t^2-x^2-y^2-z^2)$$

то для U_0 справедливо представление:

$$U_0(x,y,z,t) = c_1\int h(\xi,\eta)\delta(\tau^2-\xi^2-\eta^2)\delta[(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-$$
$$-(y-\eta)^2-z^2]\,d\xi\, d\eta\, d\tau + c_2\int h(\xi,\eta)U(\xi,\eta,0,\tau)\delta[(t-\tau)^2-$$
$$-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2-z^2]\,d\xi\, d\eta\, d\tau \qquad (3)$$

Здесь C_1 и C_2 некоторые постоянные. Положив в (3) $z=0$ и проинтегрировав по τ будем иметь:

$$\varphi = C_1^{(1)}\int h(\xi,\eta)\,\frac{\delta[(t-\sqrt{\xi^2+\eta^2})^2-(x-\xi)^2-(y-\eta^2)]}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}\,d\xi\, d\eta\, +$$

$$+C_2^{(1)}\int\limits_{(S)} h(\xi,\eta)\,\frac{\varphi(\xi,\eta,t-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2})}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}\,d\xi\,d\eta \tag{4}$$

В (4) $\varphi(x,y,t)=U(x,y,0,t)$, (S)– проекция области $\tau>\sqrt{\xi^2+\eta^2}$, $t-\tau>-\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$ на плоскость (ξ,η). Полагая в (4) $x=0$, $y=0$ и переходя к полярной системе координат, получим

$$\varphi(0,0,t)=C_1^{(2)}\int h_2(\rho)\delta[(t-2\rho)t]\,d\rho+$$
$$+C_2^{(2)}\int\limits_0^{\frac{t}{2}} h_2(\rho)\,d\rho\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,t-\rho)\,d\varphi \tag{5}$$

Вычислив в (5) первый интеграл и выразив h_2, имеем

$$h_2(t)=C_1^{(3)}t\varphi(0,0t)+C_2^{(3)}t\int\limits_0^t K_\varphi(\rho,2t)h_2(\rho)\,d\rho \tag{6}$$

где $C_1^{(3)}$ и $C_2^{(3)}$ некоторые известные постоянные, а

$$K_\varphi(\rho,2t)=\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,2t-\rho)\,d\varphi$$

Объединяя теперь уравнения (4) и (5) и предполагая функцию $\varphi(0,0,t)$ известной, получаем нелинейную систему интегральных уравнений для определения h_2 и φ

$$\begin{cases}\varphi=A_1[h_2]+A_2[h_2,\varphi]\\ h_2=B_1[\varphi]+B_2[h_2,\varphi]\end{cases}$$

вида

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ h\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\varphi\\ h\end{pmatrix}$$

Проводя оценки интегралов входящих в правую часть этой системы, можно показать аналогично [I], что в предположении ограниченности $\varphi(0,0,t)$ и малости t, она является системой с оператором сжатия в некотором шаре специальным образом выбранного банахова пространства. Это и дает нам теорему существования и единственности решения обратной задачи в малом. Теорема единственности в данном случае, как и в [I] , имеет место для любых t.

Литература

I. Благовещенский А.С., Лаврентьев К.К. Обратные задачи нахождения граничного условия в теории распространения нестационарных волн.I. - Зап.науч.сем.ЛОМИ, 1975, т.5I, с.78-83.

Lavrentijev K.K., Markova E.V. An inverse three-dimensional problem of determining of unknown coefficient in the third type boundary condition.

In this article the problem of determination of unknown coefficient in the third type boundary condition is considered. The existence and uniqueness of the solution in the three-dimensional case is proved