Е. В. Щепин, Об одной проблеме Исбелла,
Докл. АН СССР, 1975, том 222, номер 3, 541–543

Доклады Академии наук СССР
1975. Том 222, № 3

УДК 519.56

МАТЕМАТИКА

Е. В. ЩЕПИН

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ ИСБЕЛЛА

(Представлено академиком П. С. Александровым 23 XII 1974)

Пусть ω — покрытие метрического пространства X. Лебеговым числом этого покрытия $\lambda(\omega)$ называется верхняя грань таких чисел λ, что покрытие пространства X, состоящее из всевозможных замкнутых шаров радиуса λ, вписано в ω. Если $\lambda(\omega)>0$, то покрытие ω называется равномерным. Пространство X называется равномерно паракомпактным, если во всякое равномерное покрытие этого пространства можно вписать равномерное локально-конечное покрытие. Исбелл (см. ([1])) поставил следующую проблему*: всякое ли метрическое пространство равномерно паракомпактно? В настоящей заметке дается отрицательное решение этой проблемы.

Пусть M — некоторое множество, через $R(M)$ мы будем обозначать нормированное пространство ограниченных вещественных функций на M с нормой $\|f\|=\sup\limits_{x\in M}|f(x)|$. Всякое метрическое пространство X изометрически вкладывается в $R(X)$. (Фиксируем точку $x_0\in X$, тогда вложение задается так:

$$x\in X\mapsto f_x\in R(X):\ f_x(y)=\rho(x,\ y)-\rho(x_0,\ y),$$

где ρ — метрика в X.) Таким образом, из равномерной паракомпактности $R(X)$ вытекает и равномерная паракомпактность X, и для решения проблемы Исбелла достаточно выяснить, будет ли всякое пространство вида $R(M)$ равномерно паракомпактным.

Нетрудно доказать, что если M счетно, то $R(M)$ равномерно паракомпактно. Более того, можно доказать, что всякое метрическое пространство со счетной базой является равномерно паракомпактным. Ниже будет доказано, что $R(M)$ не является равномерно паракомпактным, если M имеет очень большую мощность, а именно, если мощность M больше либо равна

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\exp(\exp(\ldots\exp}_{n\text{ раз}}(\aleph_0)\ldots);$$

эту мощность мы будем обозначать через τ.

Ядро доказательства составляет следующая лемма, формулировке которой мы предпошлем введение следующих обозначений.

Для $f\in R(M)$ и вещественного числа r положим

$$O^r(f)=\{g\in R(M):\ \|g-f\|\leqslant r\}.$$

Для вещественного числа c через c_M обозначим постоянную функцию на M, тождественно равную c. Положим

$$O_n^r(f)=O^r(f)\cup O^r(f+r_M)\cup O^r(f+2r_M)\cup\ldots\cup O^r(f+(n-1)r_M).$$

---

* Точнее, проблема, которую ставит Исбелл (([1]), стр. 144), следующая: всякое ли равномерное пространство равномерно паракомпактно? Нетрудно доказать эквивалентность этих формулировок.

Покрытие пространства $R(M)$ всевозможными множествами вида $O_n{}^r(f)$, где r и n фиксированы, обозначим $\omega^M_{r,n}$. Наконец, для покрытия ω через $d(\omega)$ будем обозначать верхнюю грань диаметров элементов ω.

Лемма. *Пусть M и N — два бесконечных множества, причем $|M|\geqslant\geqslant\exp(\exp(\exp|N|))$.*

Тогда, если на $R(M)$ существует локально-конечное покрытие ω с $d(\omega)<\infty$, в которое вписано покрытие $\omega^M_{r,n}$, то на $R(N)$ существует локально-конечное покрытие ω' с $d(\omega')\leqslant d(\omega)$, в которое вписано покрытие $\omega^N_{r,2n}$.

Покажем, как из леммы вытекает отрицательное решение проблемы Исбелла. Пусть M — множество мощности τ. Тогда в покрытие $\omega^M_{1,1}$ пространства $R(M)$ (т. е. покрытие $R(M)$ всевозможными единичными шарами) нельзя вписать никакого равномерного локально-конечного покрытия. Действительно, предположим противное и пусть ω — искомое покрытие, тогда $\omega^M_{\lambda(\omega),1}$ вписано в ω. Для любого натурального n существует такая последовательность бесконечных множеств $N_0, N_1,\ldots,N_n$, что $N_0=M$ и $|N_i|\geqslant\exp(\exp(\exp|N_{i+1}|))$ для $i=0, 1, \ldots, n$. В частности, возьмем $n>\log_2(1/\lambda(\omega))+1$. Будем последовательно применять лемму. Получим, что существует такое покрытие ω' пространства $R(N_n)$, что

$$d(\omega')\leqslant d(\omega)\leqslant d(\omega^M_{1,1})=2$$

и, с другой стороны, в ω' вписано покрытие $\omega^{N_n}_{\lambda(\omega),2^n}$, но

$$d(\omega^{N_n}_{\lambda(\omega),2^n})=(1+2^n)\lambda(\omega)>\left(1+\frac{2}{\lambda(\omega)}\right)\lambda(\omega)>2.$$

Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Доказательство леммы. Будем считать, что $M=N\times L$ (декартово произведение), тогда $|L|=|M|$. Пусть π: $M=N\times L\to N$ — проекция. Тогда π^*: $R(N)\to R(M)$ — двойственное π вложение. $\pi^*R(N)$ состоит из функций на $N\times L$, зависящих только от первой координаты. Для всякого $y_0\in L$ определим функцию $f_{y_0}\in R(M)$ следующим образом:

$$f_{y_0}(x,y)=\begin{cases}0, & \text{если } y_0\neq y,\\ nr, & \text{если } y_0=y,\end{cases}$$

где $(x, y)\in N\times L=M$.

Для любой функции $f\in\pi^*R(N)$ и любого $y\in L$ множество $O_n{}^r(f-f_y)$ содержится в некотором элементе покрытия ω (по условию). Зафиксируем один такой элемент покрытия ω, обозначим его $\omega(f, y)$. Таким образом, каждому элементу $y\in L$ сопоставлена функция φ_y: $\pi^*R(N)\to\omega$, а именно $\varphi_y(f)=\omega(f, y)$. Заметим, что $\omega(f, y)=\varphi_y(f)\ni f$ для любых f и y. Оценим мощность множества функций $F=\{\varphi$: $\pi^*R(N)\to\omega\}$, удовлетворяющих условию $\varphi(f)\ni f$. Из этого условия, в силу локальной конечности покрытия ω, вытекает, что $\varphi(f)$ принимает конечное число значений, когда φ пробегает F. А отсюда легко вытекает, что $|F|\leqslant\exp|R(N)|$, а $|R(N)|=\exp|N|$, таким образом, $|F|\leqslant\exp(\exp|N|)$, т. е.

$$|F|<|L|=|M|\geqslant\exp(\exp(\exp|N|)).$$

Следовательно, существуют такие $y_0\in L$ и $y_1\in L$, что $\varphi_{y_0}=\varphi_{y_1}$. Т. е. для любой функции $f\in\pi^*R(N)$ множества $O_n{}^r(f-f_{y_0})$ и $O_n{}^r(f-f_{y_1})$ содержатся в одном и том же элементе покрытия ω, а именно в $\omega(f, y_0)=\omega(f, y_1)$.

Через A обозначим следующее подпространство $R(M)$:

$$A=\{g\in R(M)\colon\ g=f-f_{y_0} \text{ или } g=f-f_{y_1} \text{ для некоторого } f\in\pi^*R(N)\}.$$

Покрытие, высеченное на A покрытием ω, обозначим через ω^A. Очевидно, что ω^A локально-конечно и что $d(\omega^A)\leqslant d(\omega)$. Через i обозначим такое вложение i: $N \to M$, что $i(x)=(x, y_0) \in N \times L = M$. Тогда двойственное отображение i^*: $R(M) \to R(N)$ является отображением ограничения. Заметим, что i^* не может увеличивать расстояний. Искомое покрытие $\omega' = i^*(\omega^A)$.

Действительно, сужение отображения i^* на A, $i^*|_A$: $A \to R(N)$,— двукратное открытое отображение, следовательно, покрытие ω' локально-конечно. Далее, i^* не увеличивает расстояний, следовательно, $d(\omega') \leqslant d(\omega^A) \leqslant \leqslant d(\omega)$. Осталось проверить только, что $\omega^N_{r,2n}$ вписано в ω'. Возьмем любой элемент $O_{2n}{}^r(f)$ покрытия $\omega^N_{r,2n}$. Существует такой элемент покрытия ω, который содержит

$$O_n{}^r(\pi^*(f+nr_N)-f_{y_0}) \cup O_n{}^r(\pi^*(f+nr_N)-f_{y_1});$$

это

$$\omega(\pi^*(f+nr_N), y_0) = \omega(\pi^*(f+nr_N), y_1),$$

обозначим его $\omega(f)$. Тогда $i^*(\omega(f) \cap A) \in \omega'$ содержит $O_{2n}{}^r(f)$. Действительно,

$$i^*(O_n{}^r(\pi^*(f+nr_N)-f_{y_0})) = O_n{}^r(f)$$

и

$$i^*(O_n{}^r(\pi^*(f+nr_N)-f_{y_1})) = O_n{}^r(f+nr_N),$$

следовательно,

$$O_n{}^r(f) \cup O_n{}^r(f+nr_N) = O_{2n}{}^r(f) \subset i^*(\omega(f) \cap A).$$

Лемма полностью доказана.

Несколько более тщательно проведенное рассуждение позволяет доказать следующий более точный результат.

Теорема. *Всякое равномерное покрытие пространства ограниченных вещественных функций на множестве мощности*

$$\tau = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\exp(\exp\ldots\exp}_{n \text{ раз}}(\aleph_0)\ldots),$$

элементы которого имеют диаметры, ограниченные в совокупности, имеет кратность $\geqslant \tau$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *J. R. Isbell,* Uniform Spaces, Providence, 1964.