V. I. Gorbachuk, M. L. Gorbachuk, Operator approach to approximation problems,
Algebra i Analiz, 1997, Volume 9, Issue 6, 90–108

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 6

Посвящается светлой памяти М. Г. Крейна
по случаю 90-летия со дня рождения

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ЗАДАЧАМ АППРОКСИМАЦИИ

© В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук

В работе устанавливаются прямые и обратные теоремы теории приближений гладких векторов нормального оператора в гильбертовом пространстве его целыми векторами экспоненциального типа. Приближения рассматриваются в метрике банахова пространства, в некотором смысле близкого к исходному гильбертовому. Показывается, как, выбирая в качестве этого банахова пространства различные функциональные пространства и в качестве исходного различные конкретные операторы, можно получить целый ряд как известных, так и новых результатов теории приближений бесконечно дифференцируемых функций алгебраическими и тригонометрическими многочленами, целыми функциями экспоненциального типа и другими элементарными объектами. Полученные теоремы применяются к нахождению оценок погрешности приближения методом Ритца решений операторных уравнений. Эти оценки полностью характеризуют степень гладкости решения относительно оператора, собственные функции которого образуют координатную систему метода Ритца.

Введение

Одним из центральных вопросов теории приближений функций является нахождение связи между степенью гладкости функции и скоростью стремления к нулю ее наилучшего приближения некоторыми более простыми функциями, например, между порядком гладкости непрерывной периодической функции и быстротой убывания наилучшего ее приближения тригонометрическими полиномами, гладкостью непрерывной на конечном отрезке функции и скоростью

Ключевые слова: самосопряженный оператор, бесконечно дифференцируемые векторы, целые векторы экспоненциального типа, наилучшее приближение, сходный оператор.

При частичной поддержке UM 1-298, Prop. 1594 (совместный украино-американский проект), и INTAS, проект 93-0249-ext.

ее приближения алгебраическими полиномами, гладкостью непрерывной, ограниченной на $\mathbb{R}^1$ функции и быстротой ее приближения целыми функциями экспоненциального типа и т.п. Полученные в этом направлении результаты, так называемые прямые и обратные теоремы теории аппроксимации функций, такие похожие по формулировкам, устанавливались, как известно (см., напр. [1, 2]), каждый своим собственным путем. В этой статье дается общий операторный подход к получению таких теорем, который позволил получить целый ряд как известных, так и новых результатов, касающихся характеризации различных классов бесконечно дифференцируемых функций в терминах их наилучших приближений более элементарными. Этот подход оказался также плодотворным при оценке погрешности приближения методом Ритца решений операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Он состоит в том, что с каждой конкретной задачей теории приближений связывается некоторый самосопряженный оператор, чьи целые векторы экспоненциального типа являются теми более простыми объектами, которыми приближаются различные классы бесконечно дифференцируемых векторов этого оператора в метрике банахова пространства, непрерывно вложенного в исходное гильбертово пространство или в его расширение. При этом существенно используются операторный аналог теоремы Пэли-Винера [3] и теория пространств с позитивной и негативной нормой [4]. Начало этой теории было заложено М. Г. Крейном [5], который, как известно, всегда умел за каждой конкретной задачей рассмотреть некоторый самосопряженный оператор, спектральное разложение которого лежит в основе ее решения. Этому замечательному математику мы и посвящаем свою статью по случаю 90-летия со дня его рождения.

§1. Подпространства бесконечно дифференцируемых векторов замкнутого оператора

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство над полем комплексных чисел, $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в нем, A — замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения $\mathcal{D}(A)$: $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathfrak{H}$. Обозначим через $C^\infty(A)$ множество всех бесконечно дифференцируемых векторов оператора A, т.е.

$$C^\infty(A) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} \mathcal{D}(A^n) \quad (\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,\dots\}).$$

Если оператор A ограничен, то $C^\infty(A) = \mathfrak{H}$. В случае неограниченного A это не так, и можно привести примеры, когда $C^\infty(A) = \{0\}$. Однако для нормального оператора A или для оператора, имеющего хотя бы одну регулярную точку, $\overline{C^\infty(A)} = \mathfrak{H}$ (см. [6]).

В $C^\infty(A)$ введем топологию проективного предела гильбертовых пространств $C^n(A) = \mathcal{D}(A^n)$ с нормой

$$\|f\|_{C^n(A)} = \left(\|f\|^2 + \|Af\|^2 + \dots + \|A^n f\|^2\right)^{1/2}.$$

При этом вложение

$$\operatorname{proj}\lim_{n\to\infty} C^n(A) = C^\infty(A) \subseteq \mathfrak{H}$$

непрерывно.

Пусть теперь $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ — неубывающая последовательность положительных чисел (без ограничения общности можно считать $m_0 = 1$). Положим

$$C_{\{m_n\}}(A) = \bigcup_{\alpha>0} C_\alpha\langle m_n\rangle(A); \qquad C_{(m_n)}(A) = \bigcap_{\alpha>0} C_\alpha\langle m_n\rangle(A),$$

где

$$C_\alpha\langle m_n\rangle(A) = \left\{f \in C^\infty(A) \mid \exists c = c(f) > 0 : \|A^k f\| \le c\alpha^k m_k,\ \forall k \in \mathbb{N}_0\right\} \qquad (1.1)$$

— банахово пространство относительно нормы

$$\|f\|_{C_\alpha\langle m_n\rangle(A)} = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{\|A^n f\|}{\alpha^n m_n}.$$

При $\alpha_1 < \alpha_2$ имеет место непрерывное вложение $C_{\alpha_1}\langle m_n\rangle(A) \subseteq C_{\alpha_2}\langle m_n\rangle(A)$, поскольку

$$\|f\|_{C_{\alpha_1}\langle m_n\rangle(A)} \geqslant \|f\|_{C_{\alpha_2}\langle m_n\rangle(A)}, \quad f \in C_{\alpha_1}\langle m_n\rangle(A).$$

Снабдим пространства $C_{\{m_n\}}(A)$ и $C_{(m_n)}(A)$ топологиями индуктивного и, соответственно, проективного пределов пространств $C_\alpha\langle m_n\rangle(A)$:

$$C_{\{m_n\}}(A) = \operatorname{ind}\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha\langle m_n\rangle(A), \qquad C_{(m_n)}(A) = \operatorname{proj}\lim_{\alpha\to 0} C_\alpha\langle m_n\rangle(A).$$

Ясно, что

$$C_{(m_n)}(A) \subseteq C_{\{m_n\}}(A) \subseteq C^\infty(A) \subseteq \mathfrak{H}$$

и все вложения в этой цепочке непрерывны. Очевидно также, что

$$C_{\{m_n\}}(A) = \operatorname{ind}\lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}} C_k\langle m_n\rangle(A), \qquad C_{(m_n)}(A) = \operatorname{proj}\lim_{k\to\infty, k\in\mathbb{N}} C_{\frac{1}{k}}\langle m_n\rangle(A),$$

т.е. при построении пространств $C_{\{m_n\}}(A)$ и $C_{(m_n)}(A)$ можно ограничиться счетным множеством составляющих. Заметим также, что пространство $C^\infty(A)$, опираясь на оценку (1.1), можно символически рассматривать как $C_{\{\infty\}}(A)$ или $C_{(\infty)}(A)$ $(m_n \equiv \infty)$.

В конкретных ситуациях, когда $m_n = n!$ и $m_n \equiv 1$, приходим к известным пространствам $C_{\{n!\}}(A), C_{(n!)}(A)$ и $C_{\{1\}}(A)$ аналитических [7], целых [8] и целых экспоненциального типа [9] векторов оператора A. В частности, если $\mathfrak{H} = L_2(a,b), -\infty < a < b < \infty, A = \dfrac{d}{dx}, \mathcal{D}(A)$ — пространство Соболева $W_2^1(a,b)$, $C_{(\infty)}(A)$ совпадает с множеством бесконечно дифференцируемых на $[a,b]$ функций, $C_{\{n!\}}(A)$ и $C_{(n!)}(A)$ — пространства аналитических на $[a,b]$ и, соответственно, целых функций, $C_{\{1\}}(A)$ совпадает с пространством целых функций экспоненциального типа. При $m_n = n^{n\beta}$ $(\beta > 1)$ получаем обычные классы Жевре (см., напр. [10]).

§2. О приближении гладких векторов самосопряженного оператора целыми векторами экспоненциального типа

Назовем типом вектора $g \in C_{\{1\}}(A)$ число

$$\sigma(g) = \inf_{\alpha>0: g\in C_\alpha\langle 1\rangle(A)} \alpha,$$

и для произвольного вектора $f \in \mathfrak{H}$ положим

$$\mathcal{E}_r(f) = \inf_{g\in C_{\{1\}}(A): \sigma(g)\leqslant r} \|f-g\|.$$

При фиксированном $f \in \mathfrak{H}$ функция $\mathcal{E}_r(f)$ не возрастает и стремится к нулю при $r \to \infty$ тогда и только тогда, когда $\overline{C_{\{1\}}(A)} = \mathfrak{H}$. Как уже отмечалось в предыдущем параграфе, это всегда имеет место для нормального A. В этом случае $C_\alpha\langle 1\rangle(A) = \{f \mid f = E_\alpha h, \forall h \in \mathfrak{H}\}$ (E_λ — спектральная функция оператора $|A| = \sqrt{A^*A}$) и

$$\mathcal{E}_r(f) = \|f - E_r f\| = \|E_{(r,\infty)} f\|. \tag{2.1}$$

Если, кроме того, спектр A дискретный, то тип целого вектора экспоненциального типа этого оператора равен модулю одного из его собственных чисел $\lambda_i(A)$ и

$$\mathcal{E}_r(f) = \left(\sum_{k>r} |(f, e_k)|^2\right)^{1/2}, \tag{2.2}$$

где e_k — собственный вектор оператора A, соответствующий $\lambda_k(A)$ (каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность). Из (2.2) следует, что если $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — монотонно невозрастающая последовательность положительных чисел такая, что $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, то существует элемент $f \in \mathfrak{H}$, для которого $\mathcal{E}_{\lambda_i}(f) = \alpha_i$ ($i \in \mathbb{N}$). Таким образом, в случае нормального оператора A порядок стремления $\mathcal{E}_r(f)$ к нулю при $r \to \infty$ может быть произвольным. Естественно возникает вопрос о нахождении классов векторов из $\mathfrak{H}$, для которых этот порядок наперед задан.

Обозначим через $C^{-k}(A)$ пространство с негативной нормой в смысле [4], построенное по $\mathfrak{H}$ и пространству с позитивной нормой $C^k(A)$.

Теорема 1. *Пусть A — нормальный оператор в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}$ — банахово пространство такое, что непрерывно*

$$C^{k_1}(A) \subseteq \mathfrak{B} \subseteq C^{-k_2}(A) \tag{2.3}$$

при некоторых $k_1, k_2 > 0$. Пусть также последовательность $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ дополнительно обладает свойством

$$\exists c_1 > 0, \exists h > 1 \colon m_{n+1} \leqslant c_1 h^n m_n. \tag{2.4}$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
&f \in C_{\{m_n\}}(A) \iff \exists \alpha > 0, \exists c > 0 : \mathcal{E}_r^{(\mathfrak{B})}(f) \leq c\rho^{-1}(\alpha r),\\
&f \in C_{(m_n)}(A) \iff \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0 : \mathcal{E}_r^{(\mathfrak{B})}(f) \leq c\rho^{-1}(\alpha r),
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

где

$$\mathcal{E}_r^{(\mathfrak{B})}(f) = \inf_{g \in C_{\{1\}}(A): \sigma(g) \leqslant r} \|f - g\|_{\mathfrak{B}},$$

$$\rho(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{m_k}, \quad \lambda > 0.$$

В качестве функции $\rho(\lambda)$ можно взять

$$\rho(\lambda) = \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{\lambda^n}{m_n} \quad \text{или} \quad \rho(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k}}{m_k{}^2} \right)^{1/2}.$$

Заметим также, что c везде обозначает некоторую константу независимо от ее численного значения.

Доказательство. Рассмотрим сперва случай $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. Так как оператор A нормальный, то $C_{\{m_n\}}(A) = C_{\{m_n\}}(|A|)$ и $C_{(m_n)}(A) = C_{(m_n)}(|A|)$. Поэтому оператор A можно считать неотрицательным самосопряженным. Кроме того, можно сразу предположить, что для любого $\alpha > 0$ существует постоянная $c = c(\alpha) > 0$ такая, что $m_n > c\alpha^n$ для всех $n \in \mathbb{N}_0$ (тогда $\rho(\lambda)$ принимает только конечные значения). В противном случае $C_{\{m_n\}}(A) = C_{\{1\}}(A)$ и соотношения (2.5) тривиальны.

Пусть теперь $f \in C_{\{m_n\}}(A)$ $(f \in C_{(m_n)}(A))$. Согласно операторному аналогу теоремы Пэли-Винера (см. [3, 6])

$$C_{\{m_n\}}(A) = \bigcup_{\alpha > 0} \mathcal{D}(\rho(\alpha A)), \qquad C_{(m_n)}(A) = \bigcap_{\alpha > 0} \mathcal{D}(\rho(\alpha A)),$$

а потому $f \in \mathcal{D}(\rho(\alpha A))$ при некотором (любом) $\alpha > 0$, т.е.

$$\int_0^{\infty} \rho^2(\alpha\lambda)\, d(E_\lambda f, f) < \infty.$$

Следовательно, существует $g \in \mathfrak{H}$ такое, что $f = \rho^{-1}(\alpha A)g$. Из (2.1) и неубывания $\rho(\lambda)$ получаем

$$\mathcal{E}_r{}^2(f) = \int_r^{\infty} d(E_\lambda f, f) = \int_r^{\infty} \frac{d(E_\lambda g, g)}{\rho^2(\alpha\lambda)} \leqslant \rho^{-2}(\alpha r)\|g\|^2.$$

Обратно, пусть $f \in \mathfrak{H}$ удовлетворяет первому (второму) соотношению из (2.5). В силу (2.4)

$$\rho(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{m_n} > \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{m_n} \geqslant c\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{h^{n-1} m_{n-1}} = c\lambda\rho(h^{-1}\lambda) = c\lambda\rho(\alpha_0\lambda), \quad (2.6)$$

где $\alpha_0 = h^{-1} < 1$. Кроме того, для произвольного $\gamma > 1$

$$\lambda\rho'(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\lambda^n}{m_n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\gamma^n\lambda^n}{\gamma^n m_n} \leqslant c\rho(\gamma\lambda), \quad (2.7)$$

где $c = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} n/\gamma^n$. Благодаря (2.5) и (2.7), для $a > 1, \beta = \alpha_0\alpha, \gamma = \alpha_0^{-1} = h$ получаем

$$\begin{aligned}
\int_1^a \rho^2(\beta\lambda)\, d(E_\lambda f, f) &= -\int_1^a \rho^2(\beta\lambda)\, d\big((I - E_\lambda)f, f\big) \\
&= -\rho^2(\beta\lambda)\mathcal{E}_\lambda^2(f)\big|_1^a + 2\beta \int_1^a \rho(\beta\lambda)\rho'(\beta\lambda)\mathcal{E}_\lambda^2(f)\, d\lambda \\
&\leqslant \rho^2(\beta)\mathcal{E}_1^2(f) + c\beta \int_1^a \frac{\rho(\beta\lambda)\rho(\alpha\lambda)}{\lambda}\mathcal{E}_\lambda^2(f)\, d\lambda \\
&\leqslant c\Big(\rho^2(\beta)\rho^{-2}(\alpha) + \beta \int_1^a \frac{\rho(\beta\lambda)\rho(\alpha\lambda)}{\lambda\rho^2(\alpha\lambda)}\, d\lambda\Big) \\
&= c\Big(\rho^2(\beta)\rho^{-2}(\alpha) + \beta \int_1^a \frac{\rho(\beta\lambda)}{\lambda\rho(\alpha\lambda)}\, d\lambda\Big).
\end{aligned}$$

Учитывая, что $\beta = \alpha_0\alpha < \alpha$ (следовательно, $\rho(\beta) \leqslant \rho(\alpha)$), а также (2.6), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned}
\int_1^a \rho^2(\beta\lambda)\, d(E_\lambda f, f) &\leqslant c\Big(1 + \beta \int_1^a \frac{\rho(\alpha_0\alpha\lambda)}{\lambda\rho(\alpha\lambda)}\, d\lambda\Big) \\
&\leqslant c\Big(1 + \frac{\beta}{\alpha} \int_1^a \frac{\rho(\alpha\lambda)}{\lambda^2\rho(\alpha\lambda)}\, d\lambda\Big) \leqslant c\Big(1 + \alpha_0 \int_1^a \frac{1}{\lambda^2}\, d\lambda\Big) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Следовательно, $f \in \mathcal{D}(\rho(\beta A))$ при фиксированном (любом) $\beta > 0$. Операторный аналог теоремы Пэли-Винера позволяет заключить, что $f \in C_{\{m_n\}}(A)$ ($f \in C_{(m_n)}(A)$).

Рассмотрим теперь общий случай. Покажем сперва, что пространства $C_{\{m_n\}}(A)$ и $C_{(m_n)}(A)$, рассматриваемые как подпространства $\mathfrak{H}$, совпадают с соответствующими пространствами (обозначим их через $C^{(k)}_{\{m_n\}}(A)$ и $C^{(k)}_{(m_n)}(A)$), построенными в $C^k(A)$ ($k \geqslant 0$) по сужению $A \upharpoonright C^k(A)$, которое является неотрицательным самосопряженным оператором в $C^k(A)$ (это сужение будем также обозначать через A). Достаточно доказать это для $k = 1$, а потом воспользоваться индукцией. Итак, пусть $f \in C_\alpha(m_n)(A)$. Тогда $f \in C^\infty(A) = C^\infty(A \upharpoonright C^1(A))$ и, в силу (2.4),

$$\begin{aligned}\|A^i f\|_{C^1(A)} &= \left(\|A^i f\|^2 + \|A^{i+1} f\|^2\right)^{1/2} \leqslant c(\alpha^{2i} m_i{}^2 + \alpha^{2(i+1)} m_{i+1}^2)^{1/2} \\ &\leqslant c\alpha^i (m_i^2 + c^2\alpha^2 h^{2(i+1)} m_i^2)^{1/2} = c(\alpha h)^i m_i,\end{aligned}$$

т.е. $f \in C^{(1)}_{\alpha h}(m_n)(A)$, откуда $C_{\{m_n\}}(A) \subseteq C^{(1)}_{\{m_n\}}(A)$, $C_{(m_n)}(A) \subseteq C^{(1)}_{(m_n)}(A)$. Противоположные включения вытекают из оценки $\|A^i f\| \leqslant \|A^i f\|_{C^1(A)}$. Таким образом,

$$C^{(k)}_{\{m_n\}}(A) = C_{\{m_n\}}(A), \quad C^{(k)}_{(m_n)}(A) = C_{(m_n)}(A) \quad \text{при } k \geqslant 0$$

не только как множества, но и топологически.

Так как для $g \in C_{\{1\}}(A)$ ($m_n \equiv 1$)

$$\begin{aligned}\|A^i g\|_{C^k(A)} &= \left(\|A^i g\|^2 + \|A^{i+1} g\|^2 + \dots + \|A^{i+k} g\|^2\right)^{1/2} \\ &\leqslant c(\alpha^{2i} + \alpha^{2(i+1)} + \dots + \alpha^{2(i+k)})^{1/2} = c\alpha^i,\end{aligned}$$

то тип этого вектора в исходном пространстве $\mathfrak{H}$ равен его типу в пространстве $C^k(A)$.

Обозначим через $\widehat{A}$ замыкание оператора A в пространстве $C^{-k}(A)$. Нетрудно видеть, что $\widehat{A}$ — неотрицательный самосопряженный оператор в $C^{-k}(A)$ и что $C^k(\widehat{A})$, рассматриваемое как подпространство $C^{-k}(\widehat{A})$, совпадает с $\mathfrak{H}$. Поэтому пространства $C_{\{m_n\}}(A)$ и $C_{(m_n)}(A)$ совпадают с соответствующими пространствами $C^{(-k)}_{\{m_n\}}(A)$ и $C^{(-k)}_{(m_n)}(A)$, построенными в $C^{-k}(A)$, по оператору $\widehat{A}$.

Пусть теперь $f \in C_{\{m_n\}}(A)$. В силу непрерывности вложений (2.3) можно, не ограничивая общности, считать, что

$$\|f - g\|_{C^{k_1}(A)} \geqslant \|f - g\|_{\mathfrak{B}} \geqslant \|f - g\|_{C^{-k_2}(A)}$$

для произвольного $g \in C_{\{1\}}(A)$. Поэтому

$$\begin{aligned}&\inf_{g \in C_{\{1\}}(A):\sigma(g)\leqslant r} \|f - g\|_{C^{k_1}(A)} \\ &\geqslant \inf_{g \in C_{\{1\}}(A):\sigma(g)\leqslant r} \|f - g\|_{\mathfrak{B}} \geqslant \inf_{g \in C_{\{1\}}(A):\sigma(g)\leqslant r} \|f - g\|_{C^{-k_2}(A)}. \qquad (2.8)\end{aligned}$$

Из доказательства, приведенного выше для $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$ и примененного к случаю $\mathfrak{H} = C^{k_1}(A)$, имеем

$$\mathcal{E}_r^{(\mathfrak{B})}(f) \leqslant \inf_{g \in C_{\{1\}}(A): \sigma(g) \leqslant r} \|f - g\|_{C^{k_1}(A)} \leqslant c\rho^{-1}(\alpha r)$$

при некоторых $c > 0$ и $\alpha > 0$.

Наоборот, если $\exists \alpha > 0, \exists c > 0$: $\mathcal{E}_r^{(\mathfrak{B})}(f) \leqslant c\rho^{-1}(\alpha r)$, то благодаря (2.8)

$$\inf_{g \in C_{\{1\}}(A): \sigma(g) \leqslant r} \|f - g\|_{C^{-k_2}(A)} \leqslant \mathcal{E}_r^{(\mathfrak{B})}(f) \leqslant c\rho^{-1}(\alpha r),$$

откуда $f \in C_{\{m_n\}}^{(-k_2)}(A) = C_{\{m_n\}}(A)$.

Для пространств $C_{(m_n)}(A)$ доказательство аналогичное. Теорема доказана.

Теорема 2. *В условиях теоремы* 1 *относительно оператора* A, *пространства* $\mathfrak{B}$ *и последовательности* $\{m_n\}_0^\infty$

$$f \in C^\infty(A) \iff \forall \alpha \geqslant 0: \lim_{r \to \infty} r^\alpha \mathcal{E}_r^{(\mathfrak{B})}(f) = 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$, а далее повторить рассуждения, содержащиеся в доказательстве теоремы 1. Итак, пусть $f \in C^\infty(A)$ (считаем $A = A^* \geqslant 0$). Тогда для любых $\alpha \geqslant 0$, $r \geqslant 0$

$$\int_r^\infty \lambda^{2\alpha}\, d(E_\lambda f, f) < \infty$$

и

$$\mathcal{E}_r^2(f) = \int_r^\infty d(E_\lambda f, f) \leqslant \frac{1}{r^{2\alpha}} \int_r^\infty \lambda^{2\alpha}\, d(E_\lambda f, f),$$

откуда

$$r^{2\alpha}\mathcal{E}_r^2(f) \leqslant \int_r^\infty \lambda^{2\alpha}\, d(E_\lambda f, f).$$

Так как последний интеграл стремится к нулю при $r \to \infty$, то $\lim\limits_{r \to \infty} r^\alpha \mathcal{E}_r(f) = 0$.

Обратно, пусть выполняется равенство в правой части (2.9) с $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что $r^{2\alpha+1}\mathcal{E}_r^2(f) < \varepsilon$ при $r > \delta$ ($\alpha \geqslant 0$ произвольное фиксированное). При $a > \delta$

$$\begin{aligned}
\int_\delta^a \lambda^{2\alpha}\, d(E_\lambda f, f) &= -\int_\delta^a \lambda^{2\alpha}\, d((I - E_\lambda)f, f) \\
&= -\lambda^{2\alpha}\mathcal{E}_\lambda^2(f)\Big|_\delta^a + 2\alpha \int_\delta^a \lambda^{2\alpha-1}\mathcal{E}_\lambda^2(f)\, d\lambda \\
&\leqslant \delta^{2\alpha}\mathcal{E}_\delta^2(f) + 2\alpha \int_\delta^a \frac{1}{\lambda^2}\lambda^{2\alpha+1}\mathcal{E}_\lambda^2(f)\, d\lambda < \varepsilon + 2\alpha\varepsilon \int_\delta^\infty \frac{1}{\lambda^2}\, d\lambda = c\varepsilon.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\int\limits_0^\infty \lambda^{2\alpha}\, d(E_\lambda f, f) < \infty$, т.е. $f \in \mathcal{D}(A^\alpha)$ при любом $\alpha \geqslant 0$, что и требовалось доказать.

§3. Прямые и обратные теоремы теории аппроксимации

3.1. Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(0, 2\pi), \quad Af = i\frac{df}{dx}, \quad \mathcal{D}(A) = \{f(x) \in W_2^1(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi)\}.$$

Оператор A самосопряженный, его спектр совпадает с множеством $\mathbb{Z}$ целых чисел, а собственные функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$ $(k \in \mathbb{Z})$ образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$. Нетрудно видеть, что в этой ситуации $C^\infty(A)$ совпадает с множеством $\widetilde{C}^\infty[0, 2\pi]$ всех бесконечно дифференцируемых 2π-периодических функций, $C^k(A) = \widetilde{W}_2^k(0, 2\pi)$ — соболевское пространство 2π-периодических функций, а $C_{\{1\}}(A)$ — множество $\mathfrak{T}$ всех тригонометрических полиномов вида $T_n(x) = \sum\limits_{|k| \leqslant n} c_k e^{ikx}$. При этом равенство $\sigma(T) = n$ для $T \in C_{\{1\}}(A)$ означает, что степень полинома T равна n. Обозначим через $\mathfrak{T}_n$ совокупность полиномов из $\mathfrak{T}$, степень которых не превышает n. Для $f \in L_2(0, 2\pi)$

$$\mathcal{E}_n(f) = \inf_{T \in \mathfrak{T}_n} \|f - T\|_{L_2(0,2\pi)}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$\begin{aligned} C_{\{m_n\}}(A) &= \widetilde{C}_{\{m_n\}}[0, 2\pi] \\ &= \{f \in \widetilde{C}^\infty[0, 2\pi] \mid \exists \alpha > 0, \exists c > 0 \colon |f^{(k)}(x)| \leqslant c\alpha^k m_k,\ \forall k \in \mathbb{N}_0\}, \\ C_{(m_n)}(A) &= \widetilde{C}_{(m_n)}[0, 2\pi] \\ &= \{f \in \widetilde{C}^\infty[0, 2\pi] \mid \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0 \colon |f^{(k)}(x)| \leqslant c\alpha^k m_k,\ \forall k \in \mathbb{N}_0\}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\mathfrak{B} = \widetilde{C}[0, 2\pi]$ — пространство непрерывных 2π-периодических на $\mathbb{R}^1$ функций с нормой

$$\|f\|_{\widetilde{C}[0,2\pi]} = \max_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|$$

или $\mathfrak{B} = L_p(0, 2\pi)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Очевидно, что в обоих случаях

$$\widetilde{W}_2^1(0, 2\pi) \subset \mathfrak{B} \subset \widetilde{W}_2^{-1}(0, 2\pi),$$

т.е. пространство $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условию (2.3) с $k_1 = k_2 = 1$. Из теоремы 1 следует

Утверждение 1. *Справедливы следующие соотношения эквивалентности*:

$$\begin{aligned} f \in \widetilde{C}_{\{m_n\}}[0,2\pi] &\iff \exists \alpha > 0, \exists c > 0\colon E_k(f) \leqslant c\rho^{-1}(\alpha k), \\ f \in \widetilde{C}_{(m_n)}[0,2\pi] &\iff \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0\colon E_k(f) \leqslant c\rho^{-1}(\alpha k), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $E_n(f) = \mathcal{E}_n^{(\mathfrak{B})}(f)$ *— наилучшее приближение, равномерное или в метрике* $L_p(0,2\pi)$, *функции* $f(x)$ *тригонометрическими полиномами из* $\mathfrak{T}_n$.

В частности, если $\mathfrak{B} = \widetilde{C}[0,2\pi]$, то при $m_n = n!$ $\rho(\lambda) \sim e^\lambda$, и мы получаем известный результат С. Н. Бернштейна [11], характеризующий наилучшие приближения аналитических и целых функций полиномами из $\mathfrak{T}_n$, а именно: непрерывная 2π-периодическая функция $f(x)$ является аналитической на $\mathbb{R}^1$ (целой) тогда и только тогда, когда

$$E_n(f) \leqslant cq^n, \quad 0 < c = \mathrm{const} \ (0 < c = c(q)) \tag{3.2}$$

при некотором (при любом) q: $0 < q < 1$. Действительно, из (3.1) вытекает, что

$$\begin{aligned} f \in \widetilde{C}_{\{n!\}}[0,2\pi] &\iff \exists \alpha > 0, \exists c > 0\colon E_k(f) \leqslant ce^{-\alpha k}, \ \forall k \in \mathbb{N}_0, \\ f \in \widetilde{C}_{(n!)}[0,2\pi] &\iff \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0\colon E_k(f) \leqslant ce^{-\alpha k}, \ \forall k \in \mathbb{N}_0, \end{aligned}$$

т.е. выполняется (3.2) с $q = e^{-\alpha}$.

Аналогично из теоремы 2 получается еще одна теорема С. Н. Бернштейна [11]: для того чтобы непрерывная 2π-периодическая функция $f(x)$ имела производные любого порядка, необходимо и достаточно, чтобы для произвольного $\alpha > 0$

$$\lim_{n\to\infty} n^\alpha E_n(f) = 0.$$

3.2. Положим $\mathfrak{H} = L_2((-1,1),\mu)$, где $\mu(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, A_0 — минимальный оператор, порожденный в $\mathfrak{H}$ выражением

$$l_1 = \sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\Big(\sqrt{1-x^2}\frac{d}{dx}\Big),$$

т.е. замыкание оператора, заданного выражением l_1 на финитных бесконечно дифференцируемых на $[-1,1]$ функциях. Как известно [12], A_0 — симметрический оператор с индексами дефекта $(2,2)$. В качестве A возьмем квадратный корень из самосопряженного расширения $\widetilde{A}$ оператора A_0, для которого полиномы Чебышева первого рода

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

образуют собственный базис в $\mathfrak{H}$ ($\widetilde{A}P_n(x) = n^2P_n(x)$). Заметим, что отображение $S : L_2(0,\pi) \mapsto L_2((-1,1),\mu)$, переводящее функции $u(\theta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(u)\cos(k\theta) \in L_2(0,\pi)$ в функции $f_u(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k(u)P_k(x) \in L_2((-1,1),\mu)$, является изометрическим изоморфизмом. При этом изоморфизме оператор $Bu = -\frac{d^2u}{dx^2}$, $\mathcal{D}(B) = \{u \in W_2^2(0,\pi) : u'(0) = u'(\pi) = 0\}$, трансформируется в оператор $\widetilde{A}$. На основании [13, 14] заключаем, что если функция $f(x)$ принадлежит $C^2(A)$, то она непрерывна на $[-1,1]$ и

$$\|f\|_{C^2(A)} \geqslant c\|f\|_{\mathfrak{B}}, \quad \text{где } \mathfrak{B} = C[-1,1],$$

а $C^\infty(A) = C^\infty[-1,1]$. Нетрудно видеть, что пространство $\mathfrak{B}$ непрерывно вложено в $L_2((-1,1),\mu)$. Таким образом, выполнены условия теоремы 1. Кроме того, в рассматриваемой ситуации $C_{\{1\}}(A)$ совпадает с множеством $\mathfrak{P}$ всех алгебраических полиномов на $[-1,1]$. При этом равенство $\sigma(P) = n$ для $P \in \mathfrak{P}$ означает, что степень полинома P равна n. Обозначим через $\mathfrak{P}_n$ множество всех полиномов из $\mathfrak{P}$, степень которых не превышает n. Для $f \in \mathfrak{B}$

$$E_k(f) = \mathcal{E}_k^{(\mathfrak{B})}(f) = \inf_{P\in\mathfrak{P}_k} \|f - P\|_{\mathfrak{B}}.$$

Теорема 1 теперь дает

Утверждение 2. *Имеют место следующие соотношения эквивалентности*:

$$f \in C_{\{m_n\}}(A) \iff \exists\alpha > 0, \exists c > 0\colon E_k(f) \leqslant c\rho^{-1}(\alpha k),\ \forall k \in \mathbb{N},$$
$$f \in C_{(m_n)}(A) \iff \forall\alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0\colon E_k(f) \leqslant c\rho^{-1}(\alpha k),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

В частности, при $m_n = n!$ получаем с учетом [15] (где показано, что $C_{\{n!\}}(A)$ совпадает с множеством аналитических на $[-1,1]$ функций, а $C_{(n!)}(A)$ — с множеством целых функций) известный результат С. Н. Бернштейна о том, что непрерывная на $[-1,1]$ функция является аналитической на этом промежутке тогда и только тогда, когда при некотором q: $0 < q < 1$

$$\exists c > 0 : E_k(f) \leqslant cq^k \ (k \in \mathbb{N}); \tag{3.3}$$

она является целой тогда и только тогда, когда неравенство (3.3) выполняется при любом q: $0 < q < 1$. Аналогично получается результат С. Н. Бернштейна, касающийся приближения бесконечно дифференцируемых функций алгебраическими полиномами.

3.3. Пусть $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^1)$, A — минимальный оператор, порожденный в $\mathfrak{H}$ выражением $l_2 = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2$, т.е. замыкание оператора $A_0 : A_0u = l_2u$, $\mathcal{D}(A_0) =$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ ($C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ — множество финитных бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^1$ функций). Как известно [12], A — положительно определенный самосопряженный оператор, спектр которого дискретный, его собственные значения $\lambda_n(A) = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}_0$, а соответствующие собственные функции (функции Эрмита) имеют вид

$$h_n(x) = (2^n n!)^{-1/2}(-1)^n \pi^{-1/4} e^{x^2/2}\left(e^{-x^2}\right)^{(n)}.$$

Как показано в [16], $C^\infty(A)$ совпадает с пространством Л. Шварца S бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}^1$ функций, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Нетрудно видеть, что в этом случае $C_{\{1\}}(A)$ состоит из тех и только тех функций $g(x)$, которые имеют вид

$$g(x) = P(x)e^{-x^2/2}, \tag{3.4}$$

где $P(x)$ — произвольный алгебраический полином. При этом равенство $\sigma(g) = 2n+1$ для $g \in C_{\{1\}}(A)$ означает, что степень полинома P в (3.4) равна n. При $\beta \geqslant 1$ $C_{\{n^{n\beta}\}}(A) = S_{\beta/2}^{\beta/2}$ (см. [16]), где

$$S_\alpha^\beta = \left\{f \in S \mid \exists h > 0, \exists c > 0\colon |x^m f^{(n)}(x)| \leqslant c h^{m+n} m^{m\alpha} n^{n\beta}\right\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{B}$ пространство всех непрерывных, стремящихся к 0 на ∞ функций с нормой

$$\|f\|_{\mathfrak{B}} = \sup_{x\in\mathbb{R}^1} |f(x)|$$

и для любого $f \in \mathfrak{B}$ положим

$$E_n(f) = \inf_{P\in\mathfrak{P}_n} \|f(x) - P(x)e^{-x^2/2}\|_{\mathfrak{B}} = \mathcal{E}_{2n+1}^{(\mathfrak{B})}(f).$$

Нетрудно убедиться, что

$$C^1(A) \subset \mathfrak{B} \subset C^{-1}(A)$$

непрерывно. Таким образом, выполнено условие (2.3) теоремы 1 при $k_1 = k_2 = 1$. Учитывая, что при $m_n = n^{n\beta}$ $\rho(\lambda) \sim \exp(\lambda^{1/\beta})$, приходим к заключению.

Утверждение 3. *Справедливо следующее соотношение*:

$$f \in S \iff \forall \alpha > 0\colon \lim_{n\to\infty} n^\alpha E_n(f) = 0.$$

Для любого $\beta \geqslant 1$

$$f \in S_{\beta/2}^{\beta/2} \iff \exists \alpha > 0, \exists c > 0\colon E_k(f) \leqslant c\exp(-\alpha k^{1/\beta}).$$

Так как отображение

$$f(x) \mapsto f(x)e^{-x^2/2} \quad (x \in \mathbb{R}^1)$$

переводит пространство $L_2(\mathbb{R}^1)$ в $L_2(\mathbb{R}^1, e^{-x^2/2})$, а пространство $\mathfrak{B}$ непрерывных, стремящихся к 0 на ∞ функций — в пространство функций, непрерывных и стремящихся к 0 на ∞ по весу $e^{-x^2/2}$, и $E_n(f) = \inf\limits_{P\in\mathfrak{P}_n} \|(f(x)e^{x^2/2} - P(x))e^{-x^2/2}\|_{\mathfrak{B}}$, то утверждение 3 можно переформулировать в терминах взвешенных приближений функций на всей числовой оси алгебраическими полиномами относительно веса $e^{-x^2/2}$.

Беря в качестве $\mathfrak{H}$ пространство $L_2(0,\infty)$, а в качестве A самосопряженный оператор, собственными функциями которого служат полиномы Лагерра, получим аналог утверждения 3 о приближении соответствующих классов функций алгебраическими полиномами относительно веса e^{-x}. Если $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^1)$, $A = i\dfrac{d}{dx}$, $\mathcal{D}(A) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}^1)$ (замыканию $C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$ в метрике соболевского пространства $W_2^1(\mathbb{R}^1)$), то $C_{\{1\}}(A)$ совпадает с пространством всех целых функций экспоненциального типа, интегрируемых с квадратом на $\mathbb{R}^1$. Выбрав в качестве $\mathfrak{B}$ пространство всех непрерывных, стремящихся к нулю на бесконечности функций или пространство $L_p(\mathbb{R}^1)$, придем к целому ряду результатов, касающихся характеризации различных классов бесконечно дифференцируемых функций в терминах их наилучших приближений целыми функциями экспоненциального типа, суммируемыми с квадратом на $\mathbb{R}^1$.

§4. О скорости приближения решения операторного уравнения методом Ритца

Рассмотрим уравнение

$$Au = f, \tag{4.1}$$

где A — положительно определенный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с дискретным спектром, $f \in \mathfrak{H}$ — заданный, а $u \in \mathcal{D}(A)$ — искомый элементы. Для такого A можно определить пространство $C^n(A)$ для произвольного $n > 0$, причем норма

$$\|f\|_n = \|A^n f\|, \quad f \in C^n(A),$$

эквивалентна норме $\|f\|_{C^n(A)}$, фигурирующей в параграфе 1 для натуральных n. При этих же условиях на A уравнение (4.1) имеет единственное решение $u \in \mathcal{D}(A)$ и, согласно принципу Дирихле (см., напр. [17]), нахождение этого решения эквивалентно отысканию элемента $u \in \mathcal{D}(A)$, на котором функционал

$$F(v) = (Av, v) - 2\Re(f, v) = \|v - u\|_{1/2}^2 - \|u\|_{1/2}^2,$$

заданный на $\mathcal{D}(A)$, достигает своего минимума.

Пусть теперь $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — полная система линейно независимых векторов в $\mathfrak{H}$ (так называемая координатная система) и

$$\mathfrak{H}_n = \text{л. о. } \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}.$$

Обозначим через u_n вектор, на котором функционал $F(v)$, рассматриваемый только на $\mathfrak{H}_n$, принимает минимальное значение. Вектор u_n называется приближенным по Ритцу решением (4.1). Как известно [17], независимо от выбора координатной системы последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в пространстве $C^{1/2}(A)$ (и подавно в $\mathfrak{H}$) к решению u рассматриваемого уравнения. Что касается невязки $Au_n - f$, то она не всегда стремится к нулю в $\mathfrak{H}$. Однако координатная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ всегда может быть выбрана так, чтобы невязка стремилась к нулю в $\mathfrak{H}$. Например, это будет так, когда $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$, состоящий из собственных векторов некоторого оператора B, сходного с A, т.е. оператора, для которого $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$. В дальнейшем считается, что $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ выбрана именно таким образом. Следующая теорема показывает, что сходимость невязки $Au_n - f$ к нулю может быть произвольно медленной.

Теорема 3. *Пусть A и B — положительно определенные самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}$, оператор B сходный с A, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис собственных векторов оператора B. Тогда для произвольной монотонно убывающей последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$: $\alpha_n \to 0$ $(n \to \infty)$ существует вектор $f \in \mathfrak{H}$ такой, что*

$$\|Au_n - f\| \geqslant \alpha_n,$$

где u_n — приближенное по Ритцу относительно координатной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ решение уравнения (4.1).

Доказательство. Покажем сперва, что если $\{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$, а $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — числовая последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы, то существует вектор $\varphi \in \mathfrak{H}$ такой, что

$$\left\|\varphi - \sum_{k=1}^{n}(\varphi, \varphi_k)\varphi_k\right\| = \alpha_n.$$

Действительно, положим $\beta_1 = 0$, $\beta_i^2 = \alpha_{i-1}^2 - \alpha_i^2$. Тогда ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \beta_i\varphi_i$ сходится в $\mathfrak{H}$ к некоторому элементу φ и является рядом Фурье этого элемента ($\beta_i = (\varphi, \varphi_i)$). Сформулированное утверждение следует из равенства

$$\left\|\varphi - \sum_{k=1}^{n}(\varphi, \varphi_k)\varphi_k\right\|^2 = \alpha_n^2.$$

Так как оператор AB^{-1} непрерывно обратим, то

$$\begin{aligned}\|Au_n - f\| &= \|Au_n - Au\| = \|AB^{-1}B(u_n - u)\| \geqslant c\|B(u_n - u)\| \\ &\geqslant c \inf_{\alpha_k} \Big\| Bu - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \Big\| = c \Big\| Bu - \sum_{k=1}^{n} (Bu, e_k) e_k \Big\|.\end{aligned}$$

Но неравенство

$$\|Au_n - f\| \geqslant c \Big\| Bu - \sum_{k=1}^{n} (Bu, e_k) e_k \Big\|$$

справедливо для произвольного вектора f и отвечающего ему решения u. Если f пробегает все $\mathfrak{H}$, то u заполняет все $\mathcal{D}(A)$. Учитывая, что B отображает $\mathcal{D}(A)$ на $\mathfrak{H}$ взаимно однозначно, можно утверждать, что Bu пробегает все $\mathfrak{H}$, если так делает f. В силу доказанного существует вектор φ такой, что

$$\Big\| \varphi - \sum_{k=1}^{n} (\varphi, e_k) e_k \Big\| = \alpha_n.$$

В качестве f можно взять $f = AB^{-1}\varphi$.

Возникает вопрос, какими свойствами должен обладать вектор f, чтобы стремление к нулю невязки $Au_n - f$ осуществлялось с определенной скоростью. Этому вопросу как в конкретных задачах, так и в общей операторной постановке посвящен целый ряд работ (их обзор содержится в [18]). В них главным образом рассматривался лишь степенной (и то ограниченной степени) порядок сходимости. Для преодоления степенного барьера понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *В условиях теоремы* 3 *на операторы* A, B *и координатную систему* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и теоремы* 1 *на последовательность* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$ *имеют место следующие соотношения эквивалентности*:

$$\begin{aligned} u \in C^{\infty}(B) &\iff \forall k \in \mathbb{N}\colon \|u - u_n\|_{1/2} = o(\lambda_n^{-k}(B)), \\ u \in C_{\{m_n\}}(B) &\iff \exists \alpha > 0, \exists c > 0\colon \|u - u_k\|_{1/2} \leqslant c\rho^{-1}(\alpha\lambda_k(B)) \ (\forall k \in \mathbb{N}), \\ u \in C_{(m_n)}(B) &\iff \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0\colon \|u - u_k\|_{1/2} \leqslant c\rho^{-1}(\alpha\lambda_k(B)) \ (\forall k \in \mathbb{N}), \end{aligned}$$

где $\rho(\lambda) = \sup\limits_{n \in \mathbb{N}_0} \lambda^n / m_n$, $\lambda_k(B)$ *— собственные числа оператора* B, *занумерованные с учетом их кратности в порядке возрастания.*

Доказательство. Доказательство вытекает из того факта, что u_n реализует наилучшее приближение решения u векторами из $\mathfrak{H}_n$ в метрике пространства $C^{1/2}(A)$ [17] и теорем 1, 2 , если в них положить $A = B$, $\mathfrak{B} = C^{1/2}(A)$, $\mathcal{E}_n^{(\mathfrak{B})} =$

$\|u-u_n\|_{1/2}$. Условие (2.3) теоремы 1 выполнено, так как равенство $\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(B)$ влечет в силу неравенства Гайнца (см., напр. [19]), $\mathcal{D}(A^{1/2})=\mathcal{D}(B^{1/2})$ или, что то же самое, $C^{1/2}(A)=C^{1/2}(B)$.

Положим в теореме 3 $m_n=n^{n\beta}$ $(\beta>0)$. Тогда $\rho(\lambda)\sim\exp(\lambda^{1/\beta})$, а потому справедливо такое утверждение.

Следствие 1. *В условиях теоремы* 3 *на операторы* A, B *и координатную систему* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\begin{aligned}
&u\in C_{\{n^{n\beta}\}}(B)\\
&\qquad\iff \exists\alpha>0,\exists c>0\colon \|u-u_k\|_{1/2}\leqslant c\exp(-\alpha\lambda_k^{1/\beta}(B))\ (\forall k\in\mathbb{N}),\\
&u\in C_{(n^{n\beta})}(B)\\
&\qquad\iff \forall\alpha>0,\exists c=c(\alpha)>0\colon \|u-u_k\|_{1/2}\leqslant c\exp(-\alpha\lambda_k^{1/\beta}(B))\ (\forall k\in\mathbb{N}).
\end{aligned}$$

В частности, u является аналитическим (целым) вектором оператора B тогда и только тогда, когда при некотором (любом) $\alpha>0$

$$\|u-u_k\|_{1/2}=o(e^{-\alpha\lambda_k(B)}),\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Обозначим через Q_n ортопроектор из $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_n$ и положим $Q_n^{\perp}=I-Q_n$.

Лемма 2. *В условиях теоремы* 3 *относительно операторов* A, B *и координатной системы* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$

$$\|Au_n-f\|\leqslant c\lambda_{n+1}^{-(k-1)}(B)\|Q_n^{\perp}B^ku\| \tag{4.2}$$

для любого вектора $u\in\mathcal{D}(B^k)$ ($f=Au$, u_n — ритцево приближение u).

Доказательство. Так как на u_n реализуется наилучшее приближение u элементами из $\mathfrak{H}_n$ в метрике пространства $C^{1/2}(A)$, $\|B^{\alpha}Q_n\|=\lambda_n^{\alpha}(B)$, $\|B^{-\alpha}Q_n^{\perp}\|=\lambda_{n+1}^{-\alpha}(B)$ $(\forall\alpha>0)$ и Q_n коммутирует с B, то

$$\begin{aligned}
\|B^{1/2}(u-u_n)\|&\leqslant\|B^{1/2}A^{-1/2}\|\cdot\|u-u_n\|_{1/2}\\
&\leqslant\|B^{1/2}A^{-1/2}\|\cdot\|u-Q_nu\|_{1/2}\leqslant\|B^{\frac12}A^{-\frac12}\|\cdot\|A^{\frac12}Q_n^{\perp}u\|\\
&\leqslant\|B^{\frac12}A^{-\frac12}\|\cdot\|A^{\frac12}B^{-\frac12}\|\cdot\|B^{\frac12}Q_n^{\perp}u\|=c\|B^{-k+\frac12}Q_n^{\perp}B^ku\|\\
&\leqslant c\lambda_{n+1}^{-(k-\frac12)}(B)\|Q_n^{\perp}B^ku\|.
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\|Au_n-f\|&=\|Au_n-Au\|\leqslant\|AB^{-1}\|\cdot\|B(u_n-u)\|\\
&\leqslant\|AB^{-1}\|(\|BQ_n(u_n-u)\|+\|BQ_n^{\perp}(u_n-u)\|)\\
&=\|AB^{-1}\|(\|B^{\frac12}Q_nB^{\frac12}(u_n-u)\|+\|BQ_n^{\perp}u\|)\\
&\leqslant\|AB^{-1}\|(c\lambda_n^{\frac12}(B)\cdot\lambda_{n+1}^{-(k-\frac12)}(B)+\lambda_{n+1}^{-(k-1)}(B))\|Q_n^{\perp}B^ku\|\\
&\leqslant c\lambda_{n+1}^{-(k-1)}(B)\|Q_n^{\perp}B^ku\|,
\end{aligned}$$

что и требовалось.

Неравенство (4.2) с $k = 1$ показывает, что если в качестве координатной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ выбрана система собственных векторов сходного с A оператора B, то невязка $Au_n - f$ стремится к нулю, так как решение u принадлежит $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

Теорема 4. *В условиях теоремы* 3 *относительно* A, B *и* $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *и теоремы* 1 *на* $\{m_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$u \in C^{\infty}(B) \iff \forall k \in \mathbb{N}\ \|Au_n - f\| = o(\lambda_n^{-k}(B)),$$
$$u \in C_{\{m_n\}}(B) \iff \exists \alpha > 0, \exists c > 0\colon \|Au_k - f\| \leqslant c\rho^{-1}(\alpha\lambda_k(B))\ (\forall k \in \mathbb{N}),$$
$$u \in C_{(m_n)}(B) \iff \forall \alpha > 0, \exists c = c(\alpha) > 0\colon \|Au_k - f\| \leqslant c\rho^{-1}(\alpha\lambda_k(B))\ (\forall k \in \mathbb{N}),$$

где $\rho(\lambda) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}_0} \lambda^n/m_n$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть лишь одно из соотношений, например, второе. Итак, пусть при некоторых постоянных $\alpha, c > 0$

$$\|Au_k - f\| \leqslant c\rho^{-1}(\alpha\lambda_k(B)).$$

Так как оператор $A^{1/2}$ положительно определен, то

$$\|u - u_k\|_{1/2} = \|A^{1/2}(u - u_k)\| \leqslant c\|A(u - u_k)\| \leqslant c\rho^{-1}(\alpha\lambda_k(B)).$$

По лемме 1 $u \in C_{\{m_n\}}(B)$.

Обратно, пусть $u \in C_{\{m_n\}}(B)$. Тогда для произвольного натурального $k+1$ выполняется неравенство (4.2), из которого следует, что при некотором $\alpha_1 > 0$

$$\|Au_n - f\| \leqslant c\frac{\alpha_1^k m_{k+1}}{\lambda_{n+1}^k(B)} \leqslant c\frac{h^k\alpha_1^k m_k}{\lambda_n^k(B)}.$$

Так как левая часть этого неравенства не зависит от k, то

$$\|Au_n - f\| \leqslant c\Big(\sup_{k\in\mathbb{N}_0}\frac{\lambda_n^k(B)}{\alpha^k m_k}\Big)^{-1} = c\rho^{-1}\big(\alpha\lambda_n(B)\big),$$

где $\alpha^{-1} = h\alpha_1$, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть

$$\mathfrak{H} = L_2(0,\pi), \quad A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad \mathcal{D}(A) = \big\{v(x) \in W_2^2(0,\pi) : v(0) = v(\pi) = 0\big\}.$$

Здесь $q(x)$ — непрерывная неотрицательная на $[0,\pi]$ функция. Как известно, A — положительно определенный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с дискретным спектром. В качестве B возьмем оператор

$$B = -\frac{d^2}{dx^2}, \quad \mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A).$$

Оператор B также положительно определенный самосопряженный. Его спектр дискретный, $\lambda_n(B) = n^2$, $\sqrt{2/\pi}\sin nx$ — собственный ортонормированный базис. Если функция $q(x)$ бесконечно дифференцируемая на $[0,\pi]$ и

$$q^{(2k-1)}(0) = q^{(2k-1)}(\pi) = 0 \quad (k \in \mathbb{N}),$$

то $C^\infty(B) = C^\infty(A)$. Из леммы 1 следует, что бесконечная дифференцируемость $f(x)$ на $[0,\pi]$ и условие $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ эквивалентны соотношению

$$\forall\alpha > 0\colon n^\alpha \|u - u_n\| \to 0,\ n \to \infty.$$

Если вдобавок $q(x)$ аналитическая на $[0,\pi]$, то

$$C_{\{n^{2n}\}}(A) = C_{\{n^{2n}\}}(B), \qquad C_{(n^{2n})}(A) = C_{(n^{2n})}(B)$$

и условие

$$\exists\alpha > 0\colon e^{\alpha n}\|u - u_n\| \to 0,\ n \to \infty,$$

эквивалентно аналитичности $f(x)$ на $[0,\pi]$ и условию $f^{(2k)}(0) = f^{(2k)}(\pi) = 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$. Для того чтобы выполнялась оценка

$$\forall\alpha > 0\colon e^{\alpha n}\|u - u_n\| \to 0\,(n \to \infty),$$

необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была целой и удовлетворяла тем же условиям в точках 0 и π.

Список литературы

[1] Ахиезер Н. И., *Лекции по теории аппроксимации*, Наука, М., 1965.

[2] Гутер Р. С., Кудрявцев Л. Д., Левитан Б. М., *Элементы теории функций. Функции действительного переменного. Приближение функций. Почти периодические функции*, Физматгиз, М., 1963.

[3] Горбачук В. И., *Теоремы типа Винера-Пэли для нормального оператора и их применение*, Нелинейные граничные задачи, вып. 2, Наук. думка, Киев, 1990, сс. 19–25.

[4] Березанский Ю. М., *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Наук. думка, Киев, 1965.

[5] Крейн М. Г., *Про лінійні цілком неперервні оператори в функціональних просторах з двома нормами*, Збірник праць ін-ту математики, № 9, АН УРСР, Київ, 1948, сс. 104–129.

[6] Горбачук В. И., Князюк А. В., *Граничные значения решений дифференциально-операторных уравнений*, Успехи мат. наук **44** (1989), № 3, 55–91.
[7] Nelson E., *Analytic vectors*, Ann. of Math. (2) **70** (1959), no. 3, 572–615.
[8] Goodman R., *Analytic and entire vectors for representations of Lie groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **143** (1969), 55–76.
[9] Радыно Я. В., *Пространство векторов экспоненциального типа*, Докл. АН БССР **27** (1983), № 9, 791–793.
[10] Lions J. L., Magenes E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Vol. 3, Dunod, Paris, 1970.
[11] Бернштейн С. Н., *Собрание сочинений*. Т. 1, АН СССР, М., 1952; Т. 2, АН СССР, М., 1954.
[12] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве*. Изд. 2-е, перераб. и доп., Наука, М., 1966.
[13] Томин Н. Г., *Применение интерполяции линейных операторов к вопросам сходимости рядов коэффициентов Фурье по классическим ортогональным многочленам*, Докл. АН СССР **212** (1973), № 5, 1074–1077.
[14] Горбачук В. И., *О суммируемости разложений по собственным функциям самосопряженных операторов*, Докл. АН СССР **292** (1987), № 1, 20–25.
[15] Извеков И. Г., Мартыненко Е. В., *О классах Жевре некоторых самосопряженных дифференциальных операторов с вырождением*, Укр. мат. ж. **45** (1993), № 12, 1622–1626.
[16] Горбачук В. И., Горбачук М. Л., *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений*. Изд. 2-е, перераб. и доп., Наук. думка, Киев, 1984.
[17] Михлин С. Г., *Вариационные методы в математической физике*. Изд. 2-е, перераб. и доп., Наука, М., 1970.
[18] Лучка А. Ю., Лучка Т. Ф., *Возникновение и развитие прямых методов математической физики*, Наук. думка, Киев, 1985.
[19] Бирман М. Ш., Соломяк М. З., *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, ЛГУ, Л., 1980.

Институт математики
Национальной Академии Наук Украины
Киев, ул. Терещенковская 3
Украина, 252601 ГСП

Поступило 1 августа 1997 г.