Н. А. Баженов, М. И. Марчук, Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций графов, *Сиб. матем. журн.*, 2018, том 59, номер 4, 719–735

DOI: 10.17377/smzh.2018.59.401

Сибирский математический журнал
Июль—август, 2018. Том 59, № 4

УДК 510.5

СТЕПЕНИ АВТОУСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СИЛЬНЫХ КОНСТРУКТИВИЗАЦИЙ ГРАФОВ

Н. А. Баженов, М. И. Марчук

Аннотация. Показано, что любая вычислимо перечислимая тьюрингова степень является степенью автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для разрешимого ориентированного графа. Построен разрешимый неориентированный граф, для которого спектр автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций равен множеству всех PA-степеней.

DOI 10.17377/smzh.2018.59.401

Ключевые слова: вычислимая модель, сильно конструктивизируемая модель, автоустойчивость, автоустойчивость относительно сильных конструктивизаций, степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, спектр автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, PA-степень, вычислимо перечислимая степень, граф.

Работа посвящена исследованию алгоритмической сложности изоморфизмов между разрешимыми копиями для сильно конструктивизируемых моделей. Вычислимая модель $\mathscr{M}$ называется *разрешимой*, если ее полная диаграмма $FD(\mathscr{M})$ вычислима. Модель $\mathscr{M}$ называется *сильно конструктивизируемой*, если $\mathscr{M}$ обладает разрешимой копией.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Говорят, что сильно конструктивизируемая модель $\mathscr{M}$ $\mathbf{d}$-*автоустойчива относительно сильных конструктивизаций*, если для любых разрешимых копий $\mathscr{N}_0$ и $\mathscr{N}_1$ модели $\mathscr{M}$ существует $\mathbf{d}$-вычислимый изоморфизм $f : \mathscr{N}_0 \cong \mathscr{N}_1$. *Спектром автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций* для модели $\mathscr{M}$ называют множество

$$SCAutSpec(\mathscr{M}) = \{\mathbf{d} : \mathscr{M}\ \mathbf{d}\text{-автоустойчива относительно сильных конструктивизаций}\}.$$

Говорят, что тьюрингова степень $\mathbf{a}$ является *степенью автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций* для $\mathscr{M}$, если $\mathbf{a}$ — наименьшая степень в спектре $SCAutSpec(\mathscr{M})$.

Изучение спектров автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций начато С. С. Гончаровым [1]. Отметим, что исследования в этой области существенно связаны с изучением *спектров автоустойчивости* (*спектров категоричности*); подробнее см., например, в [2–6]. Известны следующие результаты о спектрах автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций.

Исследования Н. А. Баженова выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16–31–60058 мол_а_дк. Исследования М. И. Марчук выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 17–01–00247.

(a) Если $\mathbf{d}$ — вычислимо перечислимая (в.п.) степень, то существует разрешимая простая модель сигнатуры $\sigma_0 = \{R^1_n : n \in \omega\}$, имеющая степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций $\mathbf{d}$ [1, теорема 3].

(b) Пусть α — вычислимый ординал-последователь и $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень такая, что $\mathbf{d} \geq \mathbf{0}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{d}$ в.п. относительно $\mathbf{0}^{(\alpha)}$. Тогда существует разрешимая булева алгебра с бесконечным числом выделенных унарных предикатов, имеющая степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций $\mathbf{d}$ [7, теорема 2; 8, теорема 3.1]. Более того, в случае, когда α есть бесконечный ординал-последователь, можно построить разрешимый *линейный порядок*, имеющий степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций $\mathbf{d}$ [8, следствие 5.4; 9, следствие 5].

(c) Существует разрешимая булева алгебра с бесконечным числом выделенных унарных предикатов, для которой спектр автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций равен множеству всех PA-степеней [8, теорема 6.1].

(d) Для любого вычислимого ординала α существует разрешимая булева алгебра, имеющая степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций $\mathbf{0}^{(\alpha)}$ [10, следствие 3.1].

В связи с этими результатами возникает следующий естественный вопрос. Если $\mathscr{M}$ — это разрешимая модель бесконечной сигнатуры, то всегда ли существует разрешимая модель $\mathscr{N}$ некоторой конечной сигнатуры такая, что спектры автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для $\mathscr{N}$ и $\mathscr{M}$ совпадают?

Данная работа посвящена исследованию этого вопроса. Показано, что спектры автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций из пп. (a) и (c), приведенных выше, могут быть реализованы для моделей конечной сигнатуры.

В разд. 1 приводятся необходимые предварительные сведения. В разд. 2 для произвольной вычислимо перечислимой тьюринговой степени $\mathbf{d}$ показано существование разрешимого ориентированного графа, имеющего степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций $\mathbf{d}$. В разд. 3 строится разрешимый неориентированный граф, для которого спектр автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций равен множеству всех PA-степеней.

1. Предварительные сведения

1.1. Критерий автоустойчивости. Если $\mathscr{M}$ — модель сигнатуры σ, то через $Th(\mathscr{M})$ обозначается элементарная теория модели $\mathscr{M}$. Модель $\mathscr{M}$ называется *простой*, если $\mathscr{M}$ элементарно вкладывается в любую модель теории $Th(\mathscr{M})$.

Модель $\mathscr{M}$ сигнатуры σ называется *атомной*, если для любого набора $\bar{a} = a_0, \dots, a_n$ из $\mathscr{M}$ существует формула $\varphi(x_0, \dots, x_n)$ сигнатуры σ такая, что $\mathscr{M} \models \varphi(\bar{a})$ и для любой формулы $\psi(x_0, \dots, x_n)$ выполнено: если $\mathscr{M} \models \psi(\bar{a})$, то

$$\mathscr{M} \models \forall \bar{x}(\varphi(\bar{x}) \to \psi(\bar{x})).$$

Формулу φ, удовлетворяющую таким условиям, называют *полной формулой* теории $Th(\mathscr{M})$. Известен следующий результат (см. [11, теорема 2.3.4]).

Теорема 1.1 (критерий Воота). *Пусть $\mathscr{M}$ — модель счетной сигнатуры σ. Тогда $\mathscr{M}$ является простой моделью в том и только том случае, когда модель $\mathscr{M}$ счетная атомная.*

Пусть T — полная теория сигнатуры σ, n — натуральное число. Определим булеву алгебру $F_n(T)$. Носитель $F_n(T)$ состоит из классов

$$[\varphi(x_0,\dots,x_n)] = \{\psi(x_0,\dots,x_n) : \psi \text{ — формула сигнатуры } \sigma,\\ T \vdash \forall x_0 \dots \forall x_n(\varphi \leftrightarrow \psi)\},$$

а операции и константы определяются по правилам $[\varphi] \vee [\psi] = [\varphi \vee \psi]$, $[\varphi] \wedge [\psi] = [\varphi \& \psi]$, $C([\varphi]) = [\neg\varphi]$, $0 = [(x_0 \neq x_0)]$ и $1 = [(x_0 = x_0)]$. Известен следующий критерий автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, полученный А. Т. Нуртазиным.

Теорема 1.2 [12, теорема 1]. *Пусть $\mathscr{M}$ — сильно конструктивизируемая модель. Она автоустойчива относительно сильных конструктивизаций в том и только том случае, когда существует конечный набор $\bar{c}$ из $\mathscr{M}$ такой, что $(\mathscr{M},\bar{c})$ является простой моделью и семейство множеств атомов булевых алгебр $F_n(Th(\mathscr{M},\bar{c}))$ вычислимо.*

Пусть **a** — произвольная тьюрингова степень. Опираясь на теорему 1.2, С. С. Гончаров получил следующее достаточное условие **a**-автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций.

Теорема 1.3 [1, теорема 2]. *Пусть $\mathscr{M}$ — сильно конструктивизируемая модель. Если существует конечный набор $\bar{c}$ из $\mathscr{M}$ такой, что $(\mathscr{M},\bar{c})$ является простой моделью и семейство множеств атомов булевых алгебр $F_n(Th(\mathscr{M},\bar{c}))$ равномерно* **a***-вычислимо, то модель $\mathscr{M}$* **a***-автоустойчива относительно сильных конструктивизаций.*

1.2. PA-степени. Будем отождествлять множество $\omega^{<\omega}$ с деревом, имеющим стандартное упорядочение: $\sigma \preccurlyeq \tau$ в том и только том случае, когда σ является начальным сегментом τ. Если $\sigma \in \omega^{<\omega}$ и $n \in \omega$, то запись $\sigma\widehat{\ }n$ означает конкатенацию σ и n. Если T — поддерево $\omega^{<\omega}$, то $b(\sigma;T)$ — *функция ветвления* T, действующая из T в $\omega \cup \{\omega\}$ по следующему правилу: для $\sigma \in T$ значение $b(\sigma;T)$ равно мощности множества $\{n \in \omega : \sigma\widehat{\ }n \in T\}$.

Говорят, что тьюрингова степень **d** является *PA-степенью*, если существует полное непротиворечивое расширение арифметики Пеано, вычислимое относительно **d**. Известно следующее описание PA-степеней, полученное Скоттом [13], Джокушем и Соаром [14] и Соловеем.

Теорема 1.4 (см. [15, теорема 6.6]). *Для тьюринговой степени* **d** *следующие условия эквивалентны:*

(a) **d** *является PA-степенью;*

(b) *существует* **d***-вычислимое множество X со следующими свойствами:*

$$\{e \in \omega : \varphi_e(e)\downarrow= 1\} \subseteq X, \quad \{e \in \omega : \varphi_e(e)\downarrow= 0\} \subseteq \overline{X};$$

(c) *для любого вычислимого бесконечного конечно ветвящегося дерева T, являющегося поддеревом $\omega^{<\omega}$ и имеющего частично вычислимую функцию ветвления $b(\sigma;T)$, в T существует* **d***-вычислимый бесконечный путь.*

2. Вычислимо перечислимые степени

В работе С. С. Гончарова [1] показано, что для любой вычислимо перечислимой степени **a** существует простая модель бесконечной сигнатуры, сильно конструктивизируемая и имеющая степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций **a**. Этот результат можно улучшить, показав, что он выполняется для графов.

Вначале напомним конструкцию С. С. Гончарова [1].

Зафиксируем бесконечное вычислимо перечислимое множество C степени **a**. Рассмотрим сильно вычислимую последовательность конечных множеств $\{C^m : m \in \omega\}$ такую, что $C^0 = \varnothing$, $C^m \subset C^{m+1}$ и $C^{m+1} \setminus C^m = \{n_m\}$ для каждого $m \in \omega$. Выберем вычислимую последовательность бесконечных вычислимых множеств $\{X_n : n \in \omega\}$ такую, что $\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n = \omega$ и $X_n \cap X_m = \varnothing$ для любых $n \neq m$. Кроме того, будем считать, что $\bigcup\limits_{n\in\omega} X_{2n}$ равно множеству всех четных чисел.

Рассмотрим сигнатуру $\sigma := \left\{R^1_n : n \in \omega\right\}$. В конструкции по шагам строятся две изоморфные разрешимые простые модели $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ сигнатуры σ со следующими свойствами:

(a) **a** есть степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для $\mathscr{A}$;

(b) если f — изоморфизм из $\mathscr{A}$ на $\mathscr{B}$, то $\deg_T(f) \geq \mathbf{a}$;

(c) любая вычислимая копия модели $\mathscr{A}$ разрешима.

На шаге t будут построены две последовательности непустых конечных множеств $\{D_A(t,n) : n \leq 2t+1\}$ и $\{D_B(t,n) : n \leq 2t+1\}$. Используя эти последовательности, зададим изоморфные вычислимые модели $\mathscr{A}^t$ и $\mathscr{B}^t$ сигнатуры $\{R_n : n \leq 2t+1\}$. Для $n \leq 2t+1$ и $\mathscr{C} \in \{\mathscr{A}^t, \mathscr{B}^t\}$ через $[R_n]^{\mathscr{C}}$ будем обозначать интерпретацию предиката R_n в модели $\mathscr{C}$. Модели $\mathscr{A}^t$ и $\mathscr{B}^t$ определяются в соответствии со следующими правилами.

1. Для $n \leq 2t+1$ выполнено

$$[R_n]^{\mathscr{A}^t} = \bigcup_{i\in D_A(t,n)} X_i, \quad [R_n]^{\mathscr{B}^t} = \bigcup_{i\in D_B(t,n)} X_i.$$

2. Для $\mathscr{C} \in \{\mathscr{A}^t, \mathscr{B}^t\}$ основное множество модели $\mathscr{C}$ равно $\bigcup\limits_{n\leq 2t+1} [R_n]^{\mathscr{C}}$.

Подробное доказательство того, что модели $\mathscr{A}^t$ и $\mathscr{B}^t$ изоморфны, см. в [1].

Шаг 0. Определим $D_A(0,0) := \{0\}$ и $D_A(0,1) := \{1\}$. Пусть $C^1 = \{n_0\}$. Зададим

$$j_0 := \begin{cases} 0, & n_0 \neq 0, \\ 1, & n_0 = 0. \end{cases}$$

Полагаем $D_B(0,0) := \{2n_0\}$ и $D_B(0,1) := \{j_0\}$.

Шаг $t+1$. Рассмотрим элемент $n_t \in C^{t+1} \setminus C^t$. Выполнен один из следующих двух случаев.

Случай 1. Элемент $2n_t$ не лежит в множестве $\bigcup\limits_{i\leq 2t+1} D_B(t,i)$.

В этом случае для каждого $i \leq 2t+1$ полагаем $D_A(t+1,i) := D_A(t,i)$ и $D_B(t+1,i) := D_B(t,i)$. Найдем наименьшее четное число k_1, не лежащее в $\bigcup\limits_{i\leq 2t+1} D_A(t,i)$, и наименьшее нечетное число k_2, не лежащее в $\bigcup\limits_{i\leq 2t+1} D_A(t,i)$. Также зафиксируем наименьшее число $j_t \neq 2n_t$, не лежащее в $\bigcup\limits_{i\leq 2t+1} D_B(t,i)$. Определим

$$D_A(t+1,2t+2) := \{k_1\}, \quad D_A(t+1,2t+3) := \{k_2\},$$

$$D_B(t+1,2t+2) := \{2n_t\}, \quad D_B(t+1,2t+3) := \{j_t\}.$$

Случай 2. Элемент $2n_t$ принадлежит множеству $\bigcup\limits_{i\le 2t+1} D_B(t,i)$. Рассмотрим такое $m \le 2t+1$, что $2n_t$ лежит в $D_B(t,m)$. В этом случае множество $D_B(t,m)$ состоит в точности из одного элемента $2n_t$, а соответствующее ему множество $D_A(t,m)$ — из одного нечетного элемента j. Выберем наименьший четный элемент k, не лежащий в множестве $\bigcup\limits_{i\le 2t+1} D_A(t,i)$, и наименьший нечетный элемент l, не лежащий в $\bigcup\limits_{i\le 2t+1} D_B(t,i)$. Полагаем

$$D_A(t+1,m) := D_A(t,m)\cup\{k\},\quad D_B(t+1,m) := D_B(t,m)\cup\{l\},$$
$$D_A(t+1,2t+2) := \{k\},\quad D_A(t+1,2t+3) := \{j\},$$
$$D_B(t+1,2t+2) := \{2n_t\},\quad D_B(t+1,2t+3) := \{l\}.$$

Описание конструкции завершено. Модель $\mathscr{A}$ определяется как объединение моделей $\mathscr{A}^t$ для $t\in\omega$, а модель $\mathscr{B}$ — как объединение моделей $\mathscr{B}^t$ для $t\in\omega$.

Отметим следующее свойство конструкции: для любого $i\in\omega$ выполнен в точности один из двух случаев:

(a) $[R_i]^{\mathscr{A}}\cap[R_j]^{\mathscr{A}}=\varnothing$ для любого $j>i$

или

(b) существует число $m>i$ такое, что $[R_i]^{\mathscr{A}}=[R_m]^{\mathscr{A}}\cup[R_{m+1}]^{\mathscr{A}}$, $[R_m]^{\mathscr{A}}\cap[R_{m+1}]^{\mathscr{A}}=\varnothing$, при этом $[R_i]^{\mathscr{A}}\cap[R_j]^{\mathscr{A}}=\varnothing$ для любого $j\notin\{i,m,m+1\}$.

Используя кодирование описанных выше моделей в модели конечной сигнатуры, получим следующий результат.

Теорема 2.1. *Для любой вычислимо перечислимой тьюринговой степени* **a** *существует простая модель $\mathscr{N}$ сигнатуры графа, сильно конструктивизируемая и имеющая степень автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций* **a**.

Доказательство. Рассмотрим следующие множества, определенные выше: C — бесконечное вычислимо перечислимое множество степени **a** и $\{X_n : n\in\omega\}$ — вычислимая последовательность бесконечных вычислимых множеств такая, что $\bigcup\limits_{n\in\omega} X_n=\omega$ и $X_n\cap X_m=\varnothing$ для любых $n\ne m$, причем $\bigcup\limits_{n\in\omega} X_{2n}$ состоит в точности из всех четных чисел. Пусть $\mathscr{M}$ — модель сигнатуры, состоящей из унарных предикатов R_n, $n\in\omega$, построенная так же, как и модель $\mathscr{A}$, описанная выше, но в построении модели $\mathscr{M}$ не участвовали множества X_0 и X_1 (на каждом шаге вместо X_i использовалось множество X_{i+2} для любого $i\in\omega$).

По модели $\mathscr{M}$ построим модель $\mathscr{N}$ сигнатуры $\{R,M,S^1,S^2,c_0\}$. Полагаем $|\mathscr{N}|=\omega$. Полагаем $M=|\mathscr{M}|=\bigcup\limits_{j\ge 2} X_j$. Пусть S^2 — бинарный предикат, являющийся графиком функции следования $S'(x)$, определенной на множестве $X_0=\{s_k : k\in\omega\}$ так: $c_0 := s_0$ и $S'(s_i) := s_{i+1}$. Далее будем обозначать $c_i := (S')^i(c_0)$. Предикат S^1 унарный и $S^1=X_0$. Для удобства обозначим $L :=\neg S^1\&\neg M$; ясно, что $L=X_1$.

Опишем дальнейшее построение модели $\mathscr{N}$ по шагам. Зафиксируем вычислимое разбиение $X_1=\bigcup\limits_{i\in\omega} L^i$, где $L^i=\{l^i_j : j\in\omega\}$. Обозначим через $D_R(\mathscr{N})$ атомную диаграмму обеднения модели $\mathscr{N}$ до предиката R. На шаге s будем строить вычислимое множество $D^s_R(\mathscr{N})$. Если на некотором шаге добавляем формулу в $D^s_R(\mathscr{N})$, то подразумеваем, что также добавляются соответствующие отрицания формул: для пары формул $R(k_1,m_1)$, $R(k_2,m_1)$, где $k_1\ne k_2$, добавляем $\urcorner R(k_3, m_1)$, где $k_3 \neq k_1$ и $k_3 \neq k_2$; для формул вида $R(c_i, a)$, $R(b, d)$, $R(k, m)$, где $a, b, d, k \in L$ и $m \in M$ соответственно, добавляем формулы $\urcorner R(c', a)$, $\urcorner R(b, d')$, $\urcorner R(b', d)$, $\urcorner R(k, m')$ для всех $c' \neq c_i$, $d' \neq d$, $b' \neq b$ и $m' \neq m$.

Шаг 0. Для всех $i \in \omega$ добавляем в $D_R^0(\mathscr{N})$ формулы $\urcorner R(a, c_i)$ при всех $a \in |\mathscr{N}|$.

Для всех $k \neq 2^i$, $i \in \omega$ добавляем в $D_R^0(\mathscr{N})$ формулы $\urcorner R(c_k, a)$ при всех $a \in |\mathscr{N}|$.

Для всех $m' \in |\mathscr{M}|$ добавляем в $D_R^0(\mathscr{N})$ формулы $\urcorner R(m', a)$ при всех $a \in |\mathscr{N}|$.

Для всех $m \in |\mathscr{M}|$ таких, что $\mathscr{M} \models R_0(m)$, добавляем в $D_R^0(\mathscr{N})$ формулы $R(c_1, m)$, $R(l_i^0, m)$, где i — наименьший индекс для элементов из L^0, еще не участвовавший в построении.

Шаг 1. Кладем в $D_R^1(\mathscr{N})$ множество $D_R^0(\mathscr{N})$. Для всех $m \in |\mathscr{M}|$ таких, что $\mathscr{M} \models \urcorner R_0(m) \& R_1(m)$, добавляем в $D_R^1(\mathscr{N})$ формулы $R\big(c_2, l_j^1\big)$, $R\big(l_j^1, m\big)$, $R\big(l_{j+1}^1, m\big)$, $R\big(l_{j+2}^1, l_{j+1}^1\big)$, где j — наименьший из неиспользованных индексов для элементов из L^1.

Далее для всех $m \in |\mathscr{M}|$ таких, что $\mathscr{M} \models R_0(m) \& R_1(m)$, добавляем в $D_R^1(\mathscr{N})$ формулу $R\big(c_2, l_i^0\big)$, где l_i^0 такой, что $R(c_1, m)$, $R\big(l_i^0, m\big) \in D_R^0(\mathscr{N})$.

Для всех $m \in |\mathscr{M}|$ таких, что $\mathscr{M} \models R_0(m) \& \urcorner R_1(m)$, добавляем в $D_R^1(\mathscr{N})$ формулы $R\big(l_j^1, l_i^0\big)$, где l_i^0 такой, что $R(c_1, m)$, $R\big(l_i^0, m\big) \in D_R^0(\mathscr{N})$ и j — наименьший из неиспользованных индексов для элементов из L^1.

Шаг i, $i > 1$. Кладем в $D_R^i(\mathscr{N})$ множество $D_R^{i-1}(\mathscr{N})$. Для всех $m \in |\mathscr{M}|$ таких, что $\mathscr{M} \models R_i(m) \& \urcorner \left(\bigvee\limits_{j=0}^{i-1} R_j(m) \right)$, добавляем в $D_R^i(\mathscr{N})$ формулы $R\big(c_{2^i}, l_j^i\big)$, $R\big(l_j^i, l_{j+1}^i\big), \ldots, R\big(l_{j+i-2}^i, l_{j+i-1}^i\big)$, $R\big(l_{j+i-1}^i, m\big)$, $R\big(l_{j+i}^i, m\big)$, $R\big(l_{j+i+1}^i, l_{j+i}^i\big), \ldots$, $R\big(l_{j+2i}^i, l_{j+2i-1}^i\big)$, где j — наименьший из неиспользованных индексов для элементов из L^i. Отметим, что множество всех таких чисел $m \in |\mathscr{M}|$ либо пусто, либо равно $[R_i]^{\mathscr{M}}$.

Для всех $m \in |\mathscr{M}|$ таких, что $\mathscr{M} \models R_j(m) \& R_i(m)$ для некоторого $j < i$, добавляем в $D_R^i(\mathscr{N})$ формулы $R(c_{2^i}, p_i)$, где p_i такой, что $R(p_1, m)$, $R(p_2, p_1), \ldots$, $R(p_i, p_{i-1}) \in D_R^{i-1}(\mathscr{N})$. Отметим, что существует не более чем одно $j < i$, для которого множество $\{m : \mathscr{M} \models R_j(m) \& R_i(m)\}$ непусто.

Для всех $m \in |\mathscr{M}|$ таких, что $\mathscr{M} \models R_k(m) \& \urcorner R_i(m)$ для некоторого $k < i$, добавляем в $D_R^i(\mathscr{N})$ формулы $R(l_j^i, p_i)$, где p_i такой, что $R(p_1, m)$, $R(p_2, p_1), \ldots$, $R(p_i, p_{i-1}) \in D_R^{i-1}(\mathscr{N})$ и j — наименьший из неиспользованных индексов для элементов из L^i.

Полагаем, что $D_R(\mathscr{N}) = \bigcup\limits_{i \in \omega} D_R^i(\mathscr{N})$. По построению полученная диаграмма вычислима.

Покажем, что если модель $\mathscr{M}$ разрешима, то и модель $\mathscr{N}$ разрешима. Для этого установим, что полная диаграмма $FD(\mathscr{N})$ рекурсивно аксиоматизируема и полна. Зададим множество аксиом. Добавим в множество аксиом атомную диаграмму модели $\mathscr{N}$. Далее добавим следующий рекурсивно перечислимый список аксиом.

(1) $\forall x([M(x) \& \urcorner S^1(x)] \vee [\urcorner M(x) \& S^1(x)] \vee L(x))$.

Следующие аксиомы задают график функции следования:

(2) $\forall x \urcorner S^2(x, c_0)$;

(3) $\forall x[S^1(x) \to \exists y S^2(x, y)]$;

(4) $\forall x \forall y \forall z[(S^2(x,y) \& S^2(x,z)) \to (y=z)]$;
(5) $\forall y[(S^1(y) \& y \neq c_0) \to \exists x S^2(x,y)]$;
(6) $\forall x \forall y \forall z[(S^2(x,z) \& S^2(y,z)) \to (x=y)]$.
Следующие аксиомы задают области действия бинарных предикатов:
(7) $\forall x \forall y(R(x,y) \to ([S^1(x) \& L(y)] \vee [L(x) \& L(y)] \vee [L(x) \& M(y)] \vee [S^2(c_0,x) \& M(y)]))$;
(8) $\forall x \forall y(S^2(x,y) \to [S^1(x) \& S^1(y)])$.
Пусть *R-цепь* — это последовательность $x_0, \dots, x_n$ такая, что

$$\mathscr{N} \models \forall y \neg R(y,x_0) \& \mathop{\&}_{0 \le i < n} R(x_i, x_{i+1});$$

аналогично определяется *S-цепь*. Следующие аксиомы гарантируют, что R-цепи выходят только из элементов, на которых истин предикат S^1, имеющих вид c_{2^i}, $i \in \omega$, а также то, что из каждого элемента вида c_{2^i} выходит R-цепь длины $i+1$, где первые i элементов из L, а $(i+1)$-й элемент из M.

(9) Для каждого $i \in \omega$

$$\forall x \left(\exists x_0 \dots \exists x_{2^i} \left(\mathop{\&}_{j=0}^{2^i-1} S^2(x_j, x_{j+1}) \& (x_0 = c_0) \& (x = x_{2^i}) \right) \to \exists y R(x,y) \right).$$

(10) Для всех ненулевых $n \neq 2^i$, $j \ge 1$

$$\forall x \left(\exists x_0 \dots \exists x_n \left[\left(\mathop{\&}_{j=0}^{n-1} S^2(x_j, x_{j+1}) \& (x_0 = c_0) \& (x = x_n) \right) \to \forall y \neg R(x,y) \right] \right).$$

(11) $\forall y \neg R(c_0, y)$.
(12) $\forall x \forall y[(R(x,y) \& \neg \exists z R(z,x)) \to S^1(x)]$.
(13) Для всех $i \ge 1$

$$\forall x \forall y \left[\exists x_0 \dots \exists x_{2^i} \left(\mathop{\&}_{j=0}^{2^i-1} S^2(x_j, x_{j+1}) \& (x_0 = c_0) \& (x_{2^i} = x) \& R(x,y) \right) \right.$$
$$\left. \to \exists y_0 \dots \exists y_{i+1} \left(\mathop{\&}_{j=0}^{i} R(y_j, y_{j+1}) \& (x = y_0) \& (y = y_1) \& M(y_{i+1}) \& \mathop{\&}_{j=1}^{i} L(y_j) \right) \right].$$

(14) $\forall x \forall y[S^2(c_0,x) \& R(x,y) \to M(y)]$.
(15) Для всех $k = 2^n$, $n \in \omega$

$$\forall x \forall y \left[\left(\exists u R(x,u) \& \exists v R(y,v) \& \exists z_0 \dots \exists z_k \left[(z_0 = x) \& (z_k = y) \& \mathop{\&}_{i=0}^{k-1} S^2(z_i, z_{i+1}) \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. \& \mathop{\&}_{0<j<k} \forall u \neg R(z_j, u) \right] \right) \to \exists x_0 \dots \exists x_{2k} \left(\mathop{\&}_{j=0}^{2k-1} S^2(x_j, x_{j+1}) \right.$$
$$\left. \left. \& (x_0 = c_0) \& (x = x_k) \& (y = x_{2k}) \right) \right].$$

(16) Для всех ненулевых $k \neq 2^n$, $n \in \omega$

$$\forall x \forall y \Big[\exists x_0 \dots \exists x_k \Big([x = x_0] \& [y = x_k]$$
$$\& \mathop{\&}_{0 \le i < k} S^2(x_i, x_{i+1}) \Big) \to [\forall x' \neg R(x,x') \vee \forall y' \neg R(y,y')] \Big].$$

(17) Для каждого $n \in \omega$

$$\forall x\Bigg(\exists y_0 \ldots \exists y_{n+1}\Bigg[\mathop{\&}_{i=0}^{n} R(y_i, y_{i+1}) \& M(y_{n+1}) \& (x = y_0) \& \forall z \neg R(z, x)\Bigg] \rightarrow \exists x_0 \ldots \exists x_{2^n}\Bigg[\mathop{\&}_{j=0}^{2^n-1} S^2(x_j, x_{j+1}) \& (x_0 = c_0) \& (x_{2^n} = x)\Bigg]\Bigg).$$

Аксиомы, запрещающие циклы:

(18) $\forall x \neg S^2(x, x)$.

(19) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \left(\mathop{\&}_{i=1}^{n-1} S^2(x_i, x_{i+1}) \rightarrow \neg S^2(x_n, x_1)\right)$ для всех $n \geq 2$.

(20) $\forall x \neg R(x, x)$.

(21) $\forall x_1 \ldots \forall x_n \left(\mathop{\&}_{i=1}^{n-1} R(x_i, x_{i+1}) \rightarrow \neg R(x_n, x_1)\right)$ для всех $n \geq 2$.

Аксиома, гарантирующая, что в каждый элемент из M входят ровно две R-цепи:

(22) Для любого y

$$\Bigg(M(y) \rightarrow \exists x_1 \exists x_2 \Bigg[R(x_1, y) \& R(x_2, y) \& (x_1 \neq x_2) \& \forall x\Bigg[\mathop{\&}_{i=1}^{2} (x \neq x_i) \rightarrow \neg R(x, y)\Bigg]\Bigg]\Bigg).$$

Аксиомы, задающие наличие предшественника и последователя относительно предиката R:

(23) $\forall x \forall y \forall z[(R(x, y) \& R(x, z) \& \neg S^1(x)) \rightarrow (y = z)]$;

(24) $\forall x \forall y \forall z[(R(y, x) \& R(z, x) \& L(x)) \rightarrow (y = z)]$;

(25) $\forall x[\neg S^1(x) \rightarrow \exists y R(y, x)]$;

(26) $\forall x \forall y[(R(x, y) \& \neg \exists z R(y, z)) \rightarrow M(y)]$.

Следующий тип аксиом гарантирует бесконечное число связей у элемента из S^1, из которого выходит R-цепь:

(27) Для каждого $n \geq 2$

$$\forall x \forall y\Bigg(S^1(x) \& R(x, y) \rightarrow \exists y_1 \ldots \exists y_n \Bigg[\mathop{\&}_{i=1}^{n} R(x, y_i) \& \mathop{\&}_{1 \leq i < j \leq n} (y_i \neq y_j)\Bigg]\Bigg).$$

(28) Для каждого предложения θ из $FD(\mathscr{M})$ добавляем в множество аксиом предложение θ', которое определяем следующим образом. Пусть θ — в пренексной нормальной форме. Если θ — бесквантoрная формула, то θ' получается из θ с помощью замен подформул вида $R_i(y)$ подформулами вида

$$\exists x_0 \ldots \exists x_{2^i} \exists z_0 \ldots \exists z_{i+1}\Bigg(\mathop{\&}_{j=0}^{2^i-1} S^2(x_j, x_{j+1}) \& (x_0 = c_0) \& \mathop{\&}_{j=0}^{i} R(z_j, z_{j+1}) \& (z_0 = x_{2^i}) \& (z_{i+1} = y) \& \mathop{\&}_{0<j<i} L(z_j) \& M(y)\Bigg).$$

Если $\theta = \exists x \theta_1$, то полагаем $\theta' = \exists x(M(x) \& \theta_1')$; если $\theta = \forall x \theta_1$, то полагаем $\theta' = \forall x(M(x) \rightarrow \theta_1')$.

Пусть T — это теория, аксиоматизируемая списком аксиом, приведенным выше. Используя свойства конструкции, нетрудно проверить, что $T \subseteq FD(\mathscr{N})$. Докажем, что теория T полна. Для доказательства полноты теории T рассмотрим произвольные две ее насыщенные модели $\mathscr{N}^*$, $\mathscr{N}^{**}$ мощности ω_1 и покажем, что они изоморфны. Сначала опишем изоморфизм между стандартными элементами. Отображаем константу $c_0 \in \mathscr{N}^*$ в константу $c_0 \in \mathscr{N}^{**}$, таким образом устанавливаем отображение элементов, выделенных предикатом S^1. Элементы $m \in |\mathscr{N}^*|$ такие, что $\mathscr{N}^* \models M(m)$ и m связан конечной R-цепью только с одной константой c_{2^i}, $i \in \omega$, челночным методом отображаем в элементы $m' \in |\mathscr{N}^{**}|$ с аналогичным свойством. При этом естественным образом отображаем элементы из L, связанные с элементом m R-цепью. Элементы $m \in |\mathscr{N}^*|$ такие, что $\mathscr{N}^* \models M(m)$ и m связан конечной R-цепью с двумя различными константами c_{2^i} и c_{2^j}, $i, j \in \omega$, челночным методом отображаем в элементы $m' \in |\mathscr{N}^{**}|$ с аналогичным свойством. Как и ранее, естественным образом отображаем элементы из L, связанные с элементом m R-цепью.

Опишем отображение нестандартных элементов модели $\mathscr{N}^*$ в нестандартные элементы модели $\mathscr{N}^{**}$.

Первый тип нестандартных элементов — это элементы из L, образующие бесконечные R-цепи, не связанные больше ни с какими другими элементами. Таких R-цепей ω_1 штук в каждой модели, и в каждой модели они автоморфны. Таким образом, такие R-цепи можно отобразить челночным методом друг в друга.

Второй тип нестандартных элементов — это элементы из M, в которые входят две бесконечные R-цепи элементов из L. Таких элементов ω_1 штук, и их тоже можно отобразить челночным методом друг в друга, при этом естественным образом устанавливается отображение связанных с ними бесконечных R-цепей элементов из L.

Третий тип нестандартных элементов — это элементы из S^1, образующие бесконечные S-цепи. Нестандартные элементы, удовлетворяющие предикату S^1, образуют ω_1 бесконечных S-цепей. Для любой S-цепи нестандартных элементов выполнено следующее: либо только один элемент связан с элементами из L предикатом R, при этом из него выходит ω_1 бесконечных R-цепей элементов из L, либо ни один элемент S-цепи не связан с другими элементами предикатом R. Таким образом, нестандартные S-цепи, не связанные с другими элементами предикатом R модели $\mathscr{N}^*$, будем переводить в нестандартные S-цепи, не связанные с другими элементами предикатом R модели $\mathscr{N}^{**}$, и аналогично действовать с нестандартными S-цепями, связанными с элементами из L, отображая элемент из $\mathscr{N}^*$, связанный с элементами из L, в элемент из $\mathscr{N}^{**}$, связанный с элементами из L. При этом челночным методом будем отображать соответствующие бесконечные R-цепи элементов из L.

Таким образом, T является полной, следовательно, $FD(\mathscr{N}) = T$. Получаем, что полная диаграмма $FD(\mathscr{N})$ вычислима.

Модель $\mathscr{N}$ является атомной моделью в силу того, что любой элемент из ее носителя определим полной формулой. Пусть элемент $s \in S^1$ находится на n-м месте от c_0 (т. е. $s = c_n$). Обозначим через ψ_{S_n} полную формулу для такого элемента:

$$\psi_{S_n}(x) := \exists x_0 \ldots \exists x_n \left[\mathop{\&}_{i=0}^{n-1} S^2(x_i, x_{i+1}) \& (x_0 = c_0) \& (x_n = x) \right].$$

Введем вспомогательную формулу:

$$\xi_n(x_0,\dots,x_{n+1}) := \psi_{S_{2^n}}(x_0)\& \mathop{\&}_{i=0}^{n} R(x_i,x_{i+1})\& M(x_{n+1})\& \mathop{\&}_{0<j<n+1} L(x_j).$$

Произвольный элемент $m \in M$ определим количеством и длиной конечных R-цепей, которые в него входят. Такие элементы описываются формулами вида

$$\psi_{M_n}(x) := \exists x_0 \dots \exists x_{n+1}[\xi_n(x_0,\dots,x_{n+1})\&(x_{n+1}=x)],$$

$$\psi_{M_{n,l}}(x) := \psi_{M_n}(x)\&\psi_{M_l}(x),$$

где $\psi_{M_n}(x)$ соответствует элементу, в который входит в точности одна конечная R-цепь длины n, содержащая элементы из L, а $\psi_{M_{n,l}}(x)$ соответствует элементу, в который входят две конечные R-цепи длины n и l, состоящие из элементов L.

Элементы из L могут быть трех типов. Элемент $a \in L$ может быть связан с $m' \in M$, в который входит только одна конечная R-цепь, при этом a входит в состав либо конечной (тип 1), либо бесконечной (тип 2) R-цепи. Если предыдущее условие не выполнено, то a связан с $m' \in M$, в который входят две конечные R-цепи (тип 3). Опишем полные формулы для всех этих типов, полагая, что элемент типа 1 находится на k-м месте от c_0 в составе R-цепи длины n элементов из L; элемент типа 2 находится на k-м месте от $m' \in M$, в составе бесконечной R-цепи; элемент типа 3 находится на k-м месте от c_0 в составе R-цепи длины n элементов из L, связанной с $m' \in M$, в который входит еще одна R-цепь длины l:

(1) $\Psi_{L_k^n}(x) := \exists x_0 \dots \exists x_{n+1}[\xi_n(x_0,\dots,x_{n+1})\&(x_k = x)]$, $k \le n$;

(2) $$\Psi_{L_{k,\infty}^n}(x) := \exists x_0 \dots \exists x_{n+1}\Bigg[\xi_n(x_0,\dots,x_{n+1})\&\exists y_0 \dots \exists y_k \Bigg[\mathop{\&}_{i=0}^{k-1} R(y_{i+1},y_i) \\ \&(y_0 = x_{n+1})\&(y_1 \ne x_n)\&(x = y_k)\Bigg]\Bigg];$$

(3) $$\Psi_{L_{k,l}^n}(x) := \exists x'[\psi_{M_l}(x')\&\exists x_0 \dots \exists x_{n+1}[\xi_n(x_0,\dots,x_{n+1}) \\ \&(x_k = x)\&(x_{n+1} = x')]].$$

Таким образом, модель $\mathscr{N}$ является атомной и счетной, следовательно, по теореме 1.1 она простая модель своей теории. Как показано в [1], используя оракул C, можно распознавать, какие из формул $R_n(x)$ являлись полными для $Th(\mathscr{M})$, следовательно, относительно оракула C можно распознавать, какие из ψ_{M_n} и $\psi_{L_k^n}(x)$ являются полными формулами для $Th(\mathscr{N})$. Отсюда по теореме 1.3 заключаем, что модель $\mathscr{N}$ **a**-автоустойчива относительно сильных конструктивизаций.

Покажем, что любая вычислимая копия модели $\mathscr{N}$ разрешима. Пусть $\mathscr{N}'$ — это вычислимая модель такая, что $\mathscr{N}' \cong \mathscr{N}$. Построим по модели $\mathscr{N}'$ модель $\mathscr{M}[\mathscr{N}']$ сигнатуры, состоящей из унарных предикатов R_n, $n \in \omega$, следующим образом. Носитель $\mathscr{M}[\mathscr{N}']$ равен интерпретации предиката M в $\mathscr{N}$. Для $i \in \omega$ введем вспомогательную формулу:

$$\phi^i(x) := \exists x_0 \dots \exists x_{i+1}\left(\mathop{\&}_{j=0}^{i} R(x_j,x_{j+1})\&(x_{i+1}=x)\&\psi_{S_{2^i}}(x_0)\right).$$

Будем считать, что $\mathscr{M}[\mathscr{N}'] \models R_i(x)$ в том и только том случае, когда $\mathscr{N}' \models \phi^i(x)$.

Отметим следующий факт:

$$\mathscr{M}[\mathscr{N}'] \models \neg R_i(x) \Leftrightarrow \mathscr{N}' \models \exists x_0 \ldots \exists x_{i+1} \Bigg[\mathop{\&}_{j=0}^{i} R(x_j, x_{j+1}) \& (x_{i+1} = x) \& \neg S^1(x_0)$$

$$\& \bigvee_{k<i} \vee \phi^k(x) \Bigg] \vee \exists x_0 \ldots \exists x_{i+1} \exists y_0 \ldots \exists y_{i+1} \Bigg[\mathop{\&}_{j=0}^{i} R(x_j, x_{j+1})$$

$$\& \mathop{\&}_{j=0}^{i} R(y_j, y_{j+1}) \& (x_{i+1} = y_{i+1} = x) \& (y_i \neq x_i)$$

$$\& \neg S^1(x_0) \& \neg S^1(y_0) \Bigg] \vee \Big[\bigvee_{k<l<i} (\phi^k(x) \& \phi^l(x)) \Big].$$

Нетрудно убедиться, что $\mathscr{M}[\mathscr{N}']$ является вычислимой копией модели $\mathscr{M}$, следовательно, разрешима. Построим по модели $\mathscr{M}[\mathscr{N}']$ модель $\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']]$ способом, описанным в начале доказательства.

Модель $\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']]$ разрешима, покажем, что $\mathscr{N}'$ вычислимо изоморфна $\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']]$. Определим отображение $\psi : \mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']] \to \mathscr{N}'$ следующим образом: $\psi \upharpoonright M = \mathrm{Id}$ и на элементах из S отображение определяется соотношением $\psi([c_0]^{\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']]}) = [c_0]^{\mathscr{N}'}$. Осталось определить отображение на элементах из L, опишем идею построения. Пусть $m \in M^{\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']]}$. Если $\mathscr{M}_{\mathscr{N}'} \models R_i(m)$ для некоторого $i > 0$, то найдутся элементы $l_1, \ldots, l_i \in L^{\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']]}$ такие, что

$$\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']] \models R(c_{2^i}, l_1) \& \mathop{\&}_{1 \leq j < i} R(l_j, l_{j+1}) \& R(l_i, m).$$

Кроме того, существуют $l'_1, \ldots, l'_i \in L^{\mathscr{N}'}$ такие, что

$$\mathscr{N}' \models R(c_{2^i}, l'_1) \& \mathop{\&}_{1 \leq j < i} R(l'_j, l'_{j+1}) \& R(l'_i, m).$$

В этом случае полагаем $\psi(l_j) = l'_j$ при $1 \leq j \leq i$. Вторые R-цепи, состоящие из элементов из $L^{\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']]}$ и $L^{\mathscr{N}'}$ соответственно, отображаем согласно их расположению относительно m (если $\mathscr{N}' \models R(l, m)$ и $\mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']] \models R(l', m)$, то отображаем l в l' и т. д.). Описанная конструкция осуществляется по шагам челночным методом. Построенное таким способом отображение $\psi : \mathscr{N}[\mathscr{M}[\mathscr{N}']] \to \mathscr{N}'$ является вычислимым изоморфизмом.

Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что существуют две разрешимые модели, изоморфные построенной простой, такие, что множество C вычислимо относительно любого изоморфизма между этими моделями. Пусть $\mathscr{N}[\mathscr{B}]$ — модель, построенная по модели $\mathscr{B}$ из конструкции С. С. Гончарова. Напомним, что модель $\mathscr{N}$ построена по модели $\mathscr{A}$ из конструкции С. С. Гончарова и множество C вычислимо относительно любого изоморфизма между $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$. Рассмотрим произвольный изоморфизм $g : \mathscr{N} \to \mathscr{N}[\mathscr{B}]$. Тогда отображение $g_1 = g \upharpoonright M^{\mathscr{N}}$ есть изоморфизм из $\mathscr{A}$ на $\mathscr{B}$. Отсюда получаем, что $\deg_T(g) \geq \deg_T(g_1) \geq \mathbf{a}$.

Заметим, что к построенным моделям конечной сигнатуры можно применить теорему 1.1 из [16] и получить графы с сохранением всех необходимых свойств. $\square$

3. *PA*-степени

Теорема 3.1. *Существует разрешимый неориентированный граф $\mathscr{M}$ такой, что спектр автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для $\mathscr{M}$ равен множеству всех PA-степеней.*

Доказательство. Пусть A, B, C, D — бесконечные вычислимые попарно не пересекающиеся множества такие, что $A \cup B \cup C \cup D = \omega$. Зафиксируем частично вычислимые биекции α и β, действующие из ω^2 в ω, со следующими свойствами:

$$\mathrm{dom}(\alpha) = \mathrm{dom}(\beta) = \{(i,j) : j \leq i+2\}, \quad \mathrm{ran}(\alpha) = A,\ \mathrm{ran}(\beta) = B.$$

Если $j \leq i+2$, то через a_i^j будем обозначать элемент $\alpha(i,j)$, через b_i^j — элемент $\beta(i,j)$. Выберем вычислимую биекцию γ, отображающую ω^2 на C, и вычислимую биекцию δ, отображающую ω^2 на D. Для $i, j \in \omega$ через c_i^j обозначим $\gamma(i,j)$, через d_i^j — элемент $\delta(i,j)$.

Определим вспомогательный вычислимый неориентированный граф $\mathscr{G}$, имеющий носитель ω. Полагаем

$$\begin{aligned} E^{\mathscr{G}} := \big\{ &(a_i^j, a_i^{j+1}), (a_i^{j+1}, a_i^j), (b_i^j, b_i^{j+1}), (b_i^{j+1}, b_i^j) : i \in \omega,\ j \leq i+1 \big\} \\ \cup \big\{ &(a_i^{i+2}, a_i^0), (a_i^0, a_i^{i+2}), (b_i^{i+2}, b_i^0), (b_i^0, b_i^{i+2}) : i \in \omega \big\} \cup \big\{ (a_i^0, c_i^0), (c_i^0, a_i^0), (b_i^0, d_i^0), \\ &(d_i^0, b_i^0) : i \in \omega \big\} \cup \big\{ (c_i^j, c_i^{j+1}), (c_i^{j+1}, c_i^j), (d_i^j, d_i^{j+1}), (d_i^{j+1}, d_i^j) : i, j \in \omega \big\}. \end{aligned}$$

Приведем краткое неформальное описание графа $\mathscr{G}$. Для каждого $n \geq 3$ граф $\mathscr{G}$ содержит в точности два цикла длины n. К каждому циклу в $\mathscr{G}$ прикреплена одна бесконечная цепь. Отметим, что степень любой вершины $\mathscr{G}$ не равна нулю и не превосходит 3.

Граф $\mathscr{M}$ будет строиться как подмодель $\mathscr{G}$. На шаге s конструкции будем определять конечное множество M_s, являющееся подмножеством носителя $\mathscr{M}$. Кроме того, построим частично вычислимую инъективную функцию $\lambda(x)$ такую, что

$$\mathrm{dom}(\lambda) = \{e : \varphi_e(e) \downarrow \in \{0,1\}\}.$$

Как обычно, под *свежим числом* будет пониматься число, превосходящее все числа, встречавшиеся до этого в конструкции.

Шаг 0. Полагаем $M_0 = \varnothing$.

Шаг $s+1$. Пусть $s = \langle e, t \rangle$. Если $t = 0$, то полагаем

$$M_{s+1} = M_s \cup \big\{ a_e^j, b_e^j : j \leq e+2 \big\} \cup \big\{ c_e^0, d_e^0 \big\}.$$

Если $t > 0$, то выполнен один из следующих четырех случаев.

Случай 1. Пусть t — наименьший шаг такой, что $\varphi_{e,t}(e) \downarrow= 1$. Выбираем наименьшее свежее число L. Полагаем $\lambda(e) := L$ и $M_{s+1} := M_s \cup \big\{ c_e^k, d_e^k, d_e^{k+1} : k \leq L \big\}$.

Случай 2. Пусть t — наименьший шаг такой, что $\varphi_{e,t}(e) \downarrow= 0$. Выбираем наименьшее свежее число L, определяем $\lambda(e) := L$ и $M_{s+1} := M_s \cup \big\{ c_e^k, c_e^{k+1}, d_e^k : k \leq L \big\}$.

Случай 3. Либо $\varphi_{e,t}(e) \downarrow \notin \{0,1\}$, либо значение $\varphi_{e,t}(e)$ не определено. Тогда $M_{s+1} := M_s \cup \big\{ c_e^t, d_e^t \big\}$.

Случай 4. Если не выполнен ни один из случаев 1–3, то полагаем $M_{s+1} := M_s$.

Описание конструкции завершено. Определим $\mathscr{M}$ как подмодель графа $\mathscr{G}$, имеющую носитель $\bigcup\limits_{s\in\omega} M_s$. Отметим следующее: элемент a лежит в $\mathscr{M}$ в том и только том случае, когда выполнено одно из условий:

1) $a \in A \cup B$,

2) $a \in \{c_e^t, d_e^t\}$ и $a \in M_{\langle e,t\rangle+1}$ для некоторых $e, t \in \omega$.

Отсюда вытекает, что носитель $\mathscr{M}$ есть вычислимое множество и граф $\mathscr{M}$ вычислим.

Лемма 3.1. *Граф $\mathscr{M}$ разрешим.*

Доказательство. Так же, как в доказательстве теоремы 2.1, достаточно показать, что полная диаграмма $FD(\mathscr{M})$ есть рекурсивно аксиоматизируемая полная теория. В силу того, что модель $\mathscr{M}$ бесконечна и вычислима, без ограничения общности можно считать, что носитель $\mathscr{M}$ равен ω.

Для натурального числа $n \geq 3$ зададим следующие вспомогательные формулы:

$$\psi_C^n(x_1,\ldots,x_n) := \mathop{\&}_{1\leq i<j\leq n}(x_i \neq x_j) \& \mathop{\&}_{1\leq i<n} E(x_i,x_{i+1}) \& E(x_n,x_1),$$

$$\psi_{same}^n(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) := \bigvee_{\substack{\sigma\text{ — перестановка}\\ \text{множества }\{1,2,\ldots,n\}}} \mathop{\&}_{1\leq i\leq n}(x_i = y_{\sigma(i)}).$$

Формула $\psi_C^n(\bar{x})$ говорит о том, что элементы кортежа $\bar{x}$ образуют цикл длины n в графе. Формула $\psi_{same}^n(\bar{x},\bar{y})$ говорит о том, что кортежи $\bar{x}$ и $\bar{y}$ совпадают с точностью до перестановки элементов.

Для натурального числа n определим формулу $\psi_{\deg,n}(x)$, означающую, что вершина x имеет степень n:

$$\psi_{\deg,0}(x) := \neg\exists y E(x,y),$$

$$\psi_{\deg,n+1}(x) := \exists y_0\ldots\exists y_n\Big(\mathop{\&}_{i\leq n} E(x,y_i) \& \mathop{\&}_{i<j\leq n} y_i \neq y_j\Big)$$
$$\&\forall z_0\ldots\forall z_{n+1}\Big(\mathop{\&}_{i\leq n+1} E(x,z_i) \to \bigvee_{i<j\leq n+1} z_i = z_j\Big).$$

Определим рекурсивно перечислимый список аксиом в сигнатуре $\{E^2\} \cup \{c_k : k \in \omega\}$, включающий в себя следующие предложения.

(1) Все формулы из атомной диаграммы графа $\mathscr{M}$.

(2) Предложение, говорящее о том, что отношение E симметрично и иррефлексивно.

(3) $\forall x[\psi_{\deg,1}(x) \vee \psi_{\deg,2}(x) \vee \psi_{\deg,3}(x)]$. Эта формула говорит о том, что степень любой вершины в графе не равна нулю и не превосходит 3.

(4) Для каждого натурального числа n верно предложение

$$\forall x\forall y_0\ldots\forall y_n\Big[\Big(\psi_{\deg,3}(x) \& E(x,y_0) \& \mathop{\&}_{i<n} E(y_i,y_{i+1})\Big) \to (y_n = x \vee \neg\psi_{\deg,3}(y_n))\Big].$$

Эта серия предложений говорит о том, что любая компонента связности графа содержит не более одной вершины степени 3.

(5) Для каждого n верна формула

$$\forall x\forall y_0\ldots\forall y_n\Big[\Big(\psi_{\deg,1}(x) \& E(x,y_0) \& \mathop{\&}_{i<n} E(y_i,y_{i+1})\Big) \to (y_n = x \vee \neg\psi_{\deg,1}(y_n))\Big].$$

Эта серия формул говорит о следующем: любая компонента связности графа содержит не более одной вершины степени 1.

(6) Для каждого $n \geq 3$ верно предложение

$$\exists x_1 \dots \exists x_n \exists y_1 \dots \exists y_n \Big[\psi_C^n(\bar{x}) \& \psi_C^n(\bar{y}) \& \mathop{\&}_{1 \leq i,j \leq n} x_i \neq y_j) \& \forall z_1 \dots \forall z_n \big(\psi_C^n(\bar{z}) \to \psi_{same}^n(\bar{z},\bar{x}) \vee \psi_{same}^n(\bar{z},\bar{y})\big)\Big].$$

Эта формула говорит о том, что граф содержит в точности два различных цикла длины n.

(7) Пусть N — ненулевое натуральное число и s — наименьший шаг конструкции такой, что существует $e \leq s$, для которого $\lambda(e)[s]$ (т. е. значение $\lambda(e)$ на шаге s) определено и не меньше, чем N. Рассмотрим следующие два случая.

(7a) Допустим, что существует $e' \leq s$ такое, что $\lambda(e')[s] \downarrow \in \{N-1, N\}$. Тогда добавляем в наш список следующую формулу:

$$\forall x_0 \dots \forall x_N \forall y \Big[\Big(\psi_{\deg,1}(x_0) \& \mathop{\&}_{i<N} E(x_i,x_{i+1}) \& \mathop{\&}_{1 \leq i < j \leq N} (x_i \neq x_j) \& \mathop{\&}_{1 \leq i \leq N} \psi_{\deg,2}(x_i) \& E(x_N,y) \& \psi_{\deg,3}(y)\Big) \to \exists z_2 \dots \exists z_{e'+3} \psi_C^{e'+3}(y,\bar{z})\Big].$$

(7b) Если числа e' из предыдущего случая не существует, то добавляем формулу

$$\forall x_0 \dots \forall x_N \forall y \Big[\Big(\psi_{\deg,1}(x_0) \& \mathop{\&}_{i<N} E(x_i,x_{i+1}) \& \mathop{\&}_{1 \leq i < j \leq N} (x_i \neq x_j) \& \mathop{\&}_{1 \leq i \leq N} \psi_{\deg,2}(x_i) \& E(x_N,y)\Big) \to \neg\psi_{\deg,3}(y)\Big].$$

Пусть T — теория, аксиоматизируемая списком аксиом, приведенным выше. Используя свойства конструкции, нетрудно проверить, что $T \subseteq FD(\mathscr{M})$. Докажем, что теория T полна.

Для установления полноты теории T достаточно показать, что любые две насыщенные модели T, имеющие мощность ω_1, являются изоморфными.

Пусть $\mathscr{M}^*$ и $\mathscr{M}^{**}$ — насыщенные модели теории T мощности ω_1. Построим изоморфизм F из $\mathscr{M}^*$ на $\mathscr{M}^{**}$. Стандартные элементы отображаются естественным образом. Говоря неформально, образ стандартного элемента a относительно F определяется следующими условиями:

1) видом компоненты связности $\mathscr{C}$, в которой лежит a (т. е. длиной цикла $\mathscr{R}$, входящего в $\mathscr{C}$, и количеством элементов $\mathscr{C}$, не принадлежащих $\mathscr{R}$);

2) расстоянием от a до единственной вершины степени 3 из $\mathscr{C}$;

3) принадлежит ли a циклу $\mathscr{R}$ или нет.

ζ-*Цепью* в модели $\mathscr{M}$ будем называть последовательность $\{x_i : i \in \mathbb{Z}\}$ попарно различных элементов модели $\mathscr{M}$ такую, что $\mathscr{M} \models \psi_{\deg,2}(x_i)$ и $\mathscr{M} \models E(x_i,x_{i+1})$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. ω-*Цепью* в модели $\mathscr{M}$ называем последовательность $\{x_i : i < \omega\}$ попарно различных элементов $\mathscr{M}$ такую, что $\mathscr{M} \models \psi_{\deg,1}(x_0)$, $\mathscr{M} \models \psi_{\deg,2}(x_{i+1})$ и $\mathscr{M} \models E(x_i,x_{i+1})$ для каждого $i < \omega$.

Кратко опишем отображение нестандартных элементов модели $\mathscr{M}^*$ в нестандартные элементы модели $\mathscr{M}^{**}$. Нестандартные элементы могут быть трех типов.

Нестандартный элемент *первого типа* лежит в некоторой ζ-цепи. Элемент *второго типа* входит в ω-цепь. В каждой из моделей $\mathscr{M}^*$ и $\mathscr{M}^{**}$ как ζ-цепей, так и ω-цепей содержится ω_1 штук. При построении изоморфизма между $\mathscr{M}^*$ и $\mathscr{M}^{**}$ ζ-цепи можно челночным методом отображать друг в друга. Элементы из ω-цепей отображаем в соответствии с их местоположением относительно вершины степени 1.

Нестандартный элемент *третьего типа* входит в компоненту связности $\mathscr{C}$, которая не содержит циклов и при этом имеет в точности один элемент степени 3. В силу схемы аксиом (7) все остальные элементы $\mathscr{C}$ имеют степень 2. Как в модели $\mathscr{M}^*$, так и в модели $\mathscr{M}^{**}$ существует ω_1 попарно различных компонент такого вида. Элементы третьего типа отображаются друг в друга в соответствии с их местоположением относительно вершины степени 3.

Таким образом, $\mathscr{M}^*$ и $\mathscr{M}^{**}$ изоморфны, следовательно, теория T полна. В силу того, что T полна, выполнено $FD(\mathscr{M}) = T$. Отсюда вытекает, что полная диаграмма $FD(\mathscr{M})$ вычислима. Лемма 3.1 доказана.

Для $e, n \in \omega$ зададим формулу

$$\psi^n_{e,tail}(x) := \exists y_2 \ldots \exists y_{e+3} \exists z_0 \ldots \exists z_n \Big[\psi^{e+3}_C(x, \bar{y}) \\ \& \mathop{\&}_{2 \le i \le e+3, j \le n} (y_i \ne z_j) \& \mathop{\&}_{i < j \le n} (z_i \ne z_j) \& E(x, z_0) \& \mathop{\&}_{i < n} E(z_i, z_{i+1}) \Big].$$

Пусть $\mathscr{N}$ — разрешимая копия графа $\mathscr{M}$, имеющая носитель ω. Для $e \in \omega$ рассмотрим множество

$$U^e(\mathscr{N}) := \big\{ x \in \omega : \mathscr{N} \models \psi_{\deg,3}(x) \& \exists y_2 \ldots \exists y_{e+3} \psi^{e+3}_C(x, \bar{y}) \big\}.$$

Легко понять, что множество $U^e(\mathscr{M})$ равно $\big\{a^0_e, b^0_e\big\}$. Пусть $U^e(\mathscr{N}) = \{u_e <_\omega v_e\}$, где $<_\omega$ — стандартный порядок на ω.

Определим *дерево изоморфизмов* $T(\mathscr{N})$ следующим образом. Носитель дерева $T(\mathscr{N})$ состоит из всех конечных частичных функций f, действующих из ω в ω и удовлетворяющих следующим свойствам.

1. $f = \varnothing$ или $\operatorname{dom}(f) = \big\{a^0_i, b^0_i : i \le s\big\}$ для некоторого $s \in \omega$.

2. Если значение $f\big(a^0_i\big)$ определено, то $f\big(a^0_i\big), f\big(b^0_i\big) \in U^i(\mathscr{N})$.

3. Пусть $\operatorname{dom}(f) = \big\{a^0_i, b^0_i : i \le s\big\}$ и $p_i \in \big\{a^0_i, b^0_i\big\}$. Тогда для всех $i, n \le s$ условие $\mathscr{M} \models \psi^n_{i,tail}(p_i)$ выполнено в том и только том случае, когда $\mathscr{N} \models \psi^n_{i,tail}(f(p_i))$.

Порядок на дереве $T(\mathscr{N})$ задается стандартным образом: $f \preccurlyeq g$ в том и только том случае, когда $f \subseteq g$.

В силу того, что модели $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ разрешимы, можно отождествить дерево $T(\mathscr{N})$ с вычислимым поддеревом $\omega^{<\omega}$. Пусть $f \in T(\mathscr{N})$ и $\operatorname{dom}(f) = \big\{a^0_i, b^0_i : i \le s\big\}$. Ясно, что сыновьями f в $T(\mathscr{N})$ могут быть только отображения

$$f \cup \big\{ \big(a^0_{s+1}, u_{s+1}\big), \big(b^0_{s+1}, v_{s+1}\big) \big\} \text{ и } f \cup \big\{ \big(a^0_{s+1}, v_{s+1}\big), \big(b^0_{s+1}, u_{s+1}\big) \big\}.$$

Отсюда получаем, что для каждого $\sigma \in T(\mathscr{N})$ верно $b(\sigma; T(\mathscr{N})) \le 2$. В частности, дерево $T(\mathscr{N})$ является конечно ветвящимся. Кроме того, легко показать, что функция $b(\sigma; T(\mathscr{N}))$ частично вычислима.

Если F — изоморфизм из $\mathscr{M}$ на $\mathscr{N}$, то для любого $s \in \omega$ отображение $F \restriction \big\{a^0_i, b^0_i : i \le s\big\}$ принадлежит $T(\mathscr{N})$. Следовательно, дерево $T(\mathscr{N})$ бесконечно.

Лемма 3.2. *Пусть* $\mathbf{d}$ — *PA-степень. Тогда модель* $\mathscr{M}$ $\mathbf{d}$*-автоустойчива относительно сильных конструктивизаций.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{N}$ — разрешимая копия графа $\mathscr{M}$, имеющая носитель ω. Дерево $T(\mathscr{N})$ есть вычислимое бесконечное конечно ветвящееся поддерево $\omega^{<\omega}$, имеющее частично вычислимую функцию ветвления. Отсюда по теореме 1.4 следует, что в дереве $T(\mathscr{N})$ существует $\mathbf{d}$-вычислимый бесконечный путь P.

Пусть $F := \bigcup_{f \in P} f$. Тогда F — частично $\mathbf{d}$-вычислимая функция, которую можно эффективным образом продолжить до изоморфизма $G : \mathscr{M} \cong \mathscr{N}$. В самом деле, из определения дерева изоморфизмов вытекает, что для любых $i, n \in \omega$ и $p_i \in \{a_i^0, b_i^0\}$ выполнено

$$\mathscr{M} \models \psi^n_{i,tail}(p_i) \ \Leftrightarrow\ \mathscr{N} \models \psi^n_{i,tail}(F(p_i)).$$

Следовательно, если компонента связности $\mathscr{C}$ графа $\mathscr{M}$, содержащая вершину p_i, имеет вид цикла длины m с прикрепленной к нему цепью длины L (конечной или бесконечной), то компонента связности $\mathscr{D}$ графа $\mathscr{N}$, содержащая $F(p_i)$, тоже имеет такой же вид (т. е. $\mathscr{D}$ изоморфна $\mathscr{C}$). Зная этот факт, нетрудно построить изоморфизм между компонентами $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$. Лемма 3.2 доказана.

Лемма 3.3. *Существует разрешимая копия $\mathscr{N}$ графа $\mathscr{M}$ со следующим свойством: если F — произвольный изоморфизм из $\mathscr{M}$ на $\mathscr{N}$, то тьюрингова степень $\deg_T(F)$ является PA-степенью.*

Доказательство. Построение графа $\mathscr{N}$ проводится аналогично конструкции $\mathscr{M}$ со следующим основным изменением: на шаге $s+1$ в обоих случаях 1 и 2 нужно определять N_{s+1} как $N_s \cup \{c_e^k, d_e^k, d_e^{k+1} : k \leq L\}$.

Нетрудно организовать конструкцию $\mathscr{N}$ так, чтобы граф $\mathscr{N}$ был изоморфен $\mathscr{M}$. Используя рассуждения, аналогичные лемме 3.1, можно показать, что модель $\mathscr{N}$ разрешима.

Пусть F — это произвольный изоморфизм из $\mathscr{M}$ на $\mathscr{N}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

(a) $\{e : \varphi_e(e)\downarrow = 1\} \subseteq \{e : F(a_e^0) = a_e^0\}$,

(b) $\{e : \varphi_e(e)\downarrow = 0\} \subseteq \{e : F(a_e^0) = b_e^0\} = \{e : F(a_e^0) \neq a_e^0\}$.

Из теоремы 1.4 получаем, что $\deg_T(F)$ есть PA-степень. Лемма 3.3 доказана.

В силу того, что любая степень $\mathbf{d}$ из спектра автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для $\mathscr{M}$ обязана вычислять некоторый изоморфизм из $\mathscr{M}$ на $\mathscr{N}$, по лемме 3.3 получаем, что $\mathbf{d}$ является PA-степенью. Этот факт и лемма 3.2 говорят о том, что построенный граф $\mathscr{M}$ обладает спектром автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций, состоящим в точности из всех PA-степеней. Теорема 3.1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гончаров С. С.* Степени автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций // Тр. МИАН. 2011. Т. 274. С. 119–129.
2. *Fokina E. B., Kalimullin I., Miller R.* Degrees of categoricity of computable structures // Arch. Math. Logic. 2010. V. 49, N 1. P. 51–67.
3. *Csima B. F., Franklin J. N. Y., Shore R. A.* Degrees of categoricity and the hyperarithmetic hierarchy // Notre Dame J. Form. Logic. 2013. V. 54, N 2. P. 215–231.
4. *Miller R., Shlapentokh A.* Computable categoricity for algebraic fields with splitting algorithms // Trans. Am. Math. Soc. 2015. V. 367, N 6. P. 3955–3980.
5. *Fokina E., Frolov A., Kalimullin I.* Categoricity spectra for rigid structures // Notre Dame J. Form. Logic. 2016. V. 57, N 1. P. 45–57.
6. *Баженов Н. А., Калимуллин И. Ш., Ямалеев М. М.* О строгих и нестрогих степенях категоричности // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 2. С. 257–263.

7. *Баженов Н. А.* Спектры автоустойчивости булевых алгебр // Алгебра и логика. 2014. Т. 53, № 6. С. 764–769.

8. *Bazhenov N.* Autostability spectra for decidable structures // Math. Struct. Comput. Sci. 2018. V. 28, N 3. P. 392–411.

9. *Bazhenov N.* A note on effective categoricity for linear orderings // Theory and applications of models of computation. Cham: Springer-Verl., 2017. P. 85–96. (Lect. Notes Comput. Sci.; V. 10185).

10. *Баженов Н. А.* О степенях автоустойчивости относительно сильных конструктивизаций для булевых алгебр // Алгебра и логика. 2016. Т. 55, № 2. С. 133–155.

11. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

12. *Нуртазин А. Т.* Сильные и слабые конструктивизации и вычислимые семейства // Алгебра и логика. 1974. Т. 13, № 3. С. 311–323.

13. *Scott D.* Algebras of sets binumerable in complete extensions of arithmetic // Proc. Sympos. pure math. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1962. V. V. P. 117–121.

14. *Jockusch C. G., Soare R. I.* Π^0_1 classes and degrees of theories // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 173. P. 33–56.

15. *Simpson S. G.* Degrees of unsolvability: A survey of results // Handbook of mathematical logic. Studies in logic and the foundations of mathematics. Amsterdam: Elsevier, 1977. V. 90. P. 631–652.

16. *Гончаров С. С., Марчук М. И.* Индексные множества автоустойчивых относительно сильных конструктивизаций конструктивных моделей конечной сигнатуры и сигнатуры графов // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 6. С. 663–679.

Статья поступила 1 ноября 2017 г.

Баженов Николай Алексеевич, Марчук Маргарита Игоревна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 1, Новосибирск 630090
bazhenov@math.nsc.ru, margaretmarchuk@gmail.com