Л. В. Канторович, Функциональный анализ (Основные идеи),
Сиб. матем. журн., 1987, том 28, номер 1, 7–16

https://www.mathnet.ru/smj7230

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XXVIII, № 1 ЯНВАРЬ — ФЕВРАЛЬ 1987

УДК 517.51

Л. В. КАНТОРОВИЧ

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ (ОСНОВНЫЕ ИДЕИ)*

Функциональный анализ — математическая дисциплина, основным предметом которой является изучение бесконечномерных, как правило, векторных пространств и их отображений. В пионерских исследованиях исходными элементами (переменными) были функции, а функция от такого аргумента называлась функционалом или функциональной операцией.

Первая потребность в функциональном анализе возникла в связи с рассмотрением задач с бесконечным множеством переменных, и постановки функционального анализа позволили сблизить их трактовку и изучение с конечномерными задачами. Например, задача о решении бесконечномерной системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{sk}x_k = b_s \quad (s = 1, 2, 3, \ldots)$$

могла быть записана просто в форме

$$Ax = y,$$

где x и y — элементы некоторых пространств бесконечных последовательностей. Точно так же интерпретировалось интегральное уравнение, задача вариационного исчисления формулировалась как поиск экстремума некоторого функционала в подходящем пространстве функций и т. п.

Функциональный анализ развивался одновременно с целым рядом направлений, в известной мере соприкасаясь с теорией множеств, абстрактной алгеброй и аксиоматической геометрией. Общая топология, теория меры, теория дифференциальных уравнений и ряд других разделов математики развивались в столь тесной связи с функциональным анализом, что нелегко указать точную границу между ним и этими дисциплинами.

Фундаментальные идеи функционального анализа зародились на рубеже XIX—XX вв. В 20-х годах он окончательно сформировался как самостоятельное направление. Среди его основоположников были Ж. Адамар, С. Банах, В. Вольтерра, Д. Гильберт, Дж. фон Нейман, М. Фреше, Ф. Рисс. Создание функционального анализа ознаменовало коренное изменение подхода к исследованию многих математических проблем. Рассмотрение отдельных функций и уравнений было заменено изучением совокупностей этих объектов. Абстрактная форма рассмотрения позволила объединять далекие, на первый взгляд, вопросы, обнаруживать более общие и в то же время более конкретные и глубокие закономерности.

Следует сказать, что в начале своего существования функциональный анализ вызывал известный скептицизм. Казалось, что это повторение на новом языке известных фактов классического анализа, любопытное,

*) Над этой статьей Л. В. Канторович работал последние недели своей жизни. К расшифровке магнитной записи и оформлению рукописи он привлек В. Л. Канторовича, С. С. Кутателадзе и В. М. Полтеровича. Однако откорректировать публикуемый вариант Л. В. Канторович уже не успел...

но не дающее ничего существенно нового. В дальнейшем по мере обогащения аппарата функционального анализа, углубления исследований, открытия новых объектов и фактов стало ясно, что это новая и фундаментальная часть математического анализа, вплоть до того, что она стала основным средством и объектом исследований математического анализа. Многие считают, что сейчас понятие функционального анализа почти эквивалентно понятию анализа.

С самого начала развитие функционального анализа стимулировалось как внутренними потребностями самой математики (прежде всего, таких ее разделов, как вариационное исчисление, интегральные уравнения, гармонический анализ), так и прикладными задачами, особенно задачами квантовой механики. В настоящее время язык функционального анализа широко используется во всей непрерывной математике. Его аппарат вошел в фундамент целого ряда новых направлений теоретического и прикладного характера — таких, как теория случайных процессов, дифференциальная топология, теория динамических систем, теория оптимального управления, математическое программирование и т. п. Теоретико-функциональные методы все глубже проникают и в различные инженерные дисциплины. Эти методы находят все более широкое применение и в математической экономике.

Пространства, изучаемые в функциональном анализе, принадлежат, как правило, к классу векторных (или линейных) метрических пространств, в которых определено расстояние между точками; более обще, это топологические векторные пространства, в которых тем или иным образом введена топология, т. е. соответствующая система открытых множеств и связанное с нею понятие предела. При этом требуется известное согласование алгебраических операций и топологии. Наибольшее значение в первое время получили метрические векторные пространства, для которых естественным образом определяется расстояние между точками. Такое расстояние задается какой-либо функцией (метрикой), сопоставляющей каждой паре векторов пространства неотрицательное число, причем так, чтобы были выполнены аналоги определенных свойств обычного расстояния. Топология пространства естественным образом определяется такой метрикой.

Важнейший наиболее распространенный класс пространств — это *пространства нормированные*, где каждому элементу x соответствует неотрицательное число $\|x\|$, называемое *нормой* x и обладающее следующими свойствами: 1) $\|x\|=0$, если и только если $x=0$; 2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$ для любого скаляра λ (однородность); 3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$ (неравенство треугольника). Например, для пространства $C(S)$ непрерывных функций на компакте S полагают $\|x\|=\sup\{|x(s)|:\ s\in S\}$. Норма — это абстракция понятия «длина вектора». Функция $d(x,\ y)=\|x-y\|$ задает метрику на рассматриваемом пространстве X. Множество U в X называют *открытым*, если наряду с каждой точкой $u\in U$ оно содержит и шар некоторого зависящего от u положительного радиуса ε, т. е. $\{x\in X:\ \|x-u\|\leqslant\varepsilon\}\subset U$ при подходящем $\varepsilon>0$. Возникающую топологию называют *сильной топологией нормированного пространства* X. Сходимость последовательности элементов (x_n) к элементу x в этой топологии означает, что $\|x_n-x\|\to 0$ при $n\to\infty$. Нормированное пространство называют *банаховым* (или, короче, *B-пространством*), если оно полно, т. е. если любая фундаментальная последовательность его элементов (т. е. такая, что $\|x_m-x_k\|\to 0$ при $m,k\to\infty$) имеет предел. Теория банаховых пространств — один из наиболее разработанных и быстро развивающихся в последние годы разделов функционального анализа (Й. Линденштраусс, П. Энфло, А. Пич). Банаховы пространства часто встречаются в приложениях.

Наболее близкими по геометрическим свойствам к конечномерным пространствам являются пространства, в которых задано *скалярное произведение* $\langle x|y\rangle$ элементов x, y, удовлетворяющее определенным свойствам: 1) $\langle x|y\rangle$ комплексно сопряжено $\langle y|x\rangle$ (в частности, при изучении вещественных пространств $\langle x|y\rangle=\langle y|x\rangle$; 2) $\langle\lambda_1x_1+\lambda_2x_2|y\rangle=\lambda_1\langle x_1|y\rangle+\lambda_2\langle x_2|y\rangle$; 3) $\langle x|x\rangle\geqslant 0$ и $\langle x|x\rangle=0$ только при $x=0$. Банахово пространство называется *гильбертовым*, если на нем задано такое скалярное произведение, что $\|x\|^2=\langle x|x\rangle$. Такого рода пространства допускают важную геометрическую характеристику: *банахово пространство является гильбертовым в том и только том случае, если в каждой его плоскости выполнены законы евклидовой планиметрии.* Из сказанного ясно, что в гильбертовых пространствах наиболее полно представлены аналоги средств и методов линейной алгебры и аналитической геометрии. Так, в них можно выделять системы координат — *гильбертовы базисы*, т. е. такие множества $\mathscr{E}$ попарно ортогональных векторов единичной длины, что каждый элемент пространства может быть «разложен по базису», т. е. представлен в виде суммы ряда (*абстрактного ряда Фурье*):

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\langle x_n\,|\,e_n\rangle\,e_n,$$

где (e_n) — некоторая последовательность элементов базиса $\mathscr{E}$. В наиболее распространенных случаях (так называемых сепарабельных гильбертовых пространств) весь гильбертов базис состоит из одной последовательности.

Приведем несколько примеров конкретных пространств. Пространство l_p, $1\leqslant p<+\infty$, составленное такими последовательностями скаляров $x=(x_n)$, для которых конечна норма (иначе, *p-норма*)

$$\|x\|=\|x\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\,x_n\,|^p\right)^{1/p},$$

является банаховым. Если $p=2$, то оно превращается в гильбертово при введении скалярного произведения элементов $x=(x_n)$ и $y=(y_n)$ по формуле

$$\langle x\,|\,y\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}x_n\overline{y_n},$$

где, как обычно, $\bar{a}$ — комплексно сопряженное к a число.

Непрерывным аналогом пространства l_2 служит пространство $L_2(a,b)$ скалярных функций, определенных на отрезке с концами a и b и с интегрируемым по Лебегу квадратом модуля. При этом для обеспечения свойства (3) скалярного произведения функции, отличающиеся на множестве нулевой меры, отождествляют, а само произведение вводят по формуле

$$\langle x|\,y\rangle=\int_a^b x(t)\,\overline{y(t)}\,dt.$$

Базисом в l_2 служат, в частности, векторы (e_n), у которых координата с номером n равна единице, а остальные — нули. В $L_2(0,\ 2\pi)$ в качестве гильбертова базиса можно взять последовательность функций $e_n=f_n/\|f_n\|$, $f_n(t)=e^{int}$ $(n=\ldots-1,\ 0,\ 1,\ \ldots)$. В последнем случае разложение функций по базису представляет собой ее классическое выражение в виде суммы ряда Фурье. Непосредственно видно, что, сопоставляя функции из $L_2(0,\ 2\pi)$ ее коэффициенты Фурье, мы устанавливаем линейную изометрию $L_2(0,\ 2\pi)$ и l_2. Аналогичным образом проверяется изометричность произвольных сепарабельных гильбертовых пространств.

Пространство L_2 по аналогии с пространством последовательностей включается в шкалу банаховых пространств L_p, где $1\leqslant p<+\infty$. При $p=+\infty$ полагают

$$\|x\|_\infty=\sup\{|x_n|:\ n=1,\ 2,\ \ldots\},$$

если $x=(x_n)$ — последовательность. Пространство L_∞ составляют из (классов) почти везде ограниченных функций. Пространства L_p и l_p при $p\neq 2$ не являются гильбертовыми.

Функцию, действующую из одного пространства в другое, часто называют *оператором*. Операторы со скалярными (=числовыми) значениями называют *функционалами*. Наиболее изучены так называемые линейные операторы. Оператор T, действующий из векторного пространства X в векторное пространство Y, называют *линейным*, если

$$T(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 T x_1 + \lambda_2 T x_2$$

при любых $x_1, x_2 \in X$ и произвольных скалярах λ_1, λ_2, т. е. если график $\{(x, Tx): x \in X\}$ — линейное множество в произведении $X \times Y$ пространств X и Y. В случае нормированных пространств полагают

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\|: \|x\| \leqslant 1\}.$$

Величина $\|T\|$ называется *операторной нормой* или, короче, *нормой оператора* T. Операторы T с конечной нормой $\|T\| < \infty$ называют *ограниченными*. Оказывается, что оператор T ограничен в том и только том случае, если он непрерывен. Пространство $B(X, Y)$ ограниченных операторов со значениями в банаховом пространстве Y также является банаховым. В частности, к разряду банаховых относится *сопряженное* к X пространство X', т. е. пространство непрерывных линейных функционалов на X. Можно показать, что с точностью до линейной изометрии (= сохраняющей расстояние линейной замены переменных) $(L_p)' = L_q$, $(l_p)' = l_q$, где $1/q + 1/p = 1$ при $1 < p < +\infty$, $(L_1)' = L_\infty$ и $(l_1)' = l_\infty$. Пространства, сопряженные к l_∞ и L_∞, устроены несколько сложнее.

Теория банаховых пространств и линейных операторов в них — один из наиболее развитых разделов функционального анализа, представляющий собой далеко идущее обобщение линейной алгебры и, в частности, теории матриц. При этом в бесконечномерном случае (а любое пространство функций именно таково) чисто алгебраический подход мало эффективен, ибо в этой ситуации в пространстве всегда имеется колоссальное количество линейных разрывных (=неограниченных) операторов и функционалов. Использовать же разрывные операторы, т. е. игнорировать сам факт наличия естественной нормы в пространстве, во многих вопросах бессмысленно. Полезно подчеркнуть, что все линейные операторы, определенные на данном нормированном пространстве X, непрерывны в том и только том случае, если X — это конечномерное пространство (с какой-либо — все равно какой — нормой, ибо любые две нормы в конечномерном пространстве эквивалентны — задают одну и ту же топологию).

В теории банаховых пространств (и в более общих разделах) фундаментальную роль играют так называемые основные принципы функционального анализа: теорема Хана — Банаха (принцип продолжения), теорема Банаха — Штейнгауза (принцип ограниченности), теорема Банаха об открытом отображении (принцип открытости).

Принцип продолжения в простейшей форме утверждает, что каждый *непрерывный линейный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства, допускает продолжение с сохранением нормы на все пространство.* Этот принцип, его модификации и обобщения лежат в основе *выпуклого анализа* — раздела функционального анализа, изучающего выпуклые функции, выпуклые множества, выпуклые экстремальные задачи, модели экономической динамики и т. п.

Принцип ограниченности имеет разнообразные формулировки. В одной из них утверждается, что *множество A в пространстве X ограничено по норме в том и только том случае, если для каждого функционала f из X' числовое множество $f(A)$ ограничено (т. е. если A слабо ограничено)*. Иными словами, при наличии оценок $|f(a)| \leqslant C_f$ для всех $a \in A$, где константа C_f зависит от $f \in X'$, $\|f\| = 1$, можно утверждать, что существует единая константа C, для которой $|f(a)| \leqslant C$ при всех $a \in A$, как только $\|f\| = 1$. Другая используемая в приближенных вычислениях форма принципа ограниченности устанавливает условия поточечной сходимости последовательности (T_n) операторов $T_n \in B(X, Y)$, действующих между банаховыми пространствами X и Y. Оказывается, что $T_n x \to Tx$ *для всех x из X в том и только том случае, если такая сходимость имеет место на некотором множестве аргументов, линейная оболочка которого плотна в X и, кроме того, нормы всех T_n ограничены в совокупности*: $\sup\{\|T_n\|: n = 1, 2, 3, \ldots\} < \infty$.

Принцип открытости гласит, что *ограниченный линейный оператор $T \in B(X, Y)$, определенный на банаховом пространстве X и такой, что образ $T(X)$ — это банахово пространство Y, обязательно переводит открытые множества X в открытые множества Y*. Принцип открытости имеет многочисленные переформулировки и следствия, подчеркивающие его важнейшую роль. Полезна в приложениях следующая теорема корректности: *если операторное уравнение $Tx = y$ однозначно разрешимо при любой правой части y, то имеет место непрерывная зависимость решения x от правой части y* (т. е. $T^{-1} \in B(Y, X)$).

Часто используется также теорема Банаха о замкнутом графике, представляющая собой один из вариантов принципа открытости. *Линейный оператор T, действующий из X в Y (где X, Y — банаховы пространства), ограничен в том и только том случае, если его график — замкнутое множество (в произведении пространств X и Y)*. Иначе говоря, проверка непрерывности T может состоять в установлении следующего условия: если $x_n \to x$ и $Tx_n \to y$, то $y = Tx$ (общее определение непрерывности требует предварительного доказательства существования предела (Tx_n), которое снимает теорема Банаха!).

В экономических приложениях первостепенное значение приобретает концепция двойственности функциональных пространств. Простейшим примером *двойственности* служит отображение $(x, f) \to f(x)$, ставящее в соответствие элементу x пространства X и функционалу f на X число $f(x)$. При трактовке x как вектора товаров, а f как вектора цен, величину $f(x)$ можно рассматривать как стоимость x. Дальнейшие уточнения и детализация этой трактовки требуют введения дополнительной структуры в X: цена, как правило, неотрицательна и поэтому необходимо рассматривать пространства, в которых между некоторыми векторами установлено отношение «больше»,— *полуупорядоченные векторные пространства*. В экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль, и при их анализе теория таких пространств дает полезные плоды. Наиболее важны те из полуупорядоченных пространств, в которых каждое ограниченное (в смысле порядка) подмножество имеет точную верхнюю границу. Эти пространства называют *K-пространствами* или, более полно, *пространствами Канторовича*.

Таковы пространства L_p и l_p, где отношение порядка вводится очевидным способом — одна последовательность больше другой, если соответствующие координаты первой превосходят координаты второй; функция x больше y, если $x(t)$ при почти всех t больше $y(t)$.

Несколько более широкий класс пространств составляют *векторные решетки*, в которых точные границы имеются у конечных множеств. Как правило, векторную решетку можно считать вложенной в подходящее K-пространство.

Основы теории K-пространств были заложены в 30-х годах Л. В. Канторовичем, к настоящему времени она получила существенное развитие. Фундаментальное общенаучное значение этих пространств было вскрыто в последние годы в связи с развитием математической логики и, в частности, с доказательством независимости континуум-гипотезы. Было обнаружено, что элементы произвольного K-пространства суть изображения обычных вещественных чисел в соответствующей модели обычной теории множеств. В настоящее время происходит бурное развитие возникшего на этой основе булевозначного анализа, в котором разрабатываются средства, позволяющие оперировать элементами K-пространств как числами, а операторами в них — как обычными функциями.

Развитие теории линейных операторов, особенно на своем начальном этапе, стимулировала задача решения операторных уравнений *«первого рода»*

$$Tx = y.$$

Аналогия между функциональными и алгебраическими уравнениями, замеченная ранее для линейных дифференциальных уравнений, оказалась плодотворной и при рассмотрении интегральных уравнений, основы теории которых были заложены при формировании функционального анализа в работах В. Вольтерра, Д. Гильберта, К. Нётера и И. Фредгольма. При этом выяснилось, что удобно выделять уравнение *«второго рода»*

$$x + Kx = y$$

(т. е. формально рассматривать уравнение «первого рода» при условии, что $T = I + K$, где I — тождественный оператор). Более того, оказалось целесообразным следующее обобщение (типичный прием функционального анализа): вводить в такое уравнение параметр. Точнее говоря, исходную задачу удобно включать в класс задач, зависящих от параметра λ. При этом, как ни парадоксально, решить семейство задач оказывается значительно проще. Таким образом, рассматривают либо проблему *«характеристических значений»* исходного уравнения, т. е. задачу исследования уравнения вида

$$x + \mu Kx = y,$$

либо *«спектральную задачу»* вида

$$\lambda x - Kx = y,$$

где λ, μ — дополнительно вводимые, вообще говоря, комплексные скаляры. Видно, что обе постановки эквивалентны друг другу. Оказывается, что при малых (по абсолютной величине) μ (или, что то же самое, больших λ) названные задачи разрешимы, и при этом имеет место аналитическая зависимость решения от параметра λ. Особые точки — параметры, при которых решение отсутствует,— выделяют и изучают дополнительно. Для спектральной задачи их называют точками *спектра* оператора K. Ясно, что спектр оператора аналогичен набору собственных чисел матрицы. Примером полностью исследованных спектральных задач служат интегральные уравнения Фредгольма второго рода

$$x(s) + \mu \int_a^b k(s, t)\, x(t)\, dt = y(s),$$

где k, y — известные функции, а x — искомая функция.

Если, например, квадрат функции k интегрируем и задача ставится в пространстве L_2, то внутри каждого круга с центром в нуле лежит лишь конечное число характеристических значений, каждому из которых отвечает конечномерное собственное подпространство K. Для регулярных (т. е. нехарактеристических) значений решение может быть выписано в виде ряда, причем имеет место аналитическая зависимость решения от параметра.

Теория уравнений второго рода — один из наиболее разработанных разделов современного спектрального анализа операторов. Весьма полная, глубокая и удобная трактовка названного круга проблем дана в теории индекса М. Атьи и И. Зингера.

Наряду с однозначными отображениями векторных пространств применяются *многозначные отображения* или *соответствия*, т. е. произвольные подмножества F в произведении $X \times Y$ пространств X и Y. Такое F можно трактовать как функцию из X в множество подмножеств Y, полагая $F(x)=\{y\in Y\colon\ (x,y)\in F\}$. В этой связи соответствие F часто называют многозначным отображением, одно-многозначным или, наконец, точечно-множественным отображением. Такие соответствия весьма часто возникают в связи с задачами экономики. Например, если x означает некоторую совокупность ресурсов, а $F(x)$ — продукцию, которая может быть получена на основе этих ресурсов, то такой набор $F(x)$ весьма многообразен и мы имеем дело со случаем точечно-множественного отображения.

В приложениях часто используются выпуклые и выпуклозначные соответствия. В первом случае выпукло само множество F — «график» отображения, во втором выпуклы допустимые «выпуски» — образы $F(x)$ при каждом x. Для точечно-множественных отображений справедливы многочисленные теоремы о существовании так называемых *неподвижных точек* (т. е. таких, что $x\in F(x)$). Эти теоремы широко используются при исследовании проблем конкурентного равновесия. Одна из упомянутых теорем (К. Фан) существования гласит следующее.

Пусть X — нормированное пространство и F — выпуклозначное отображение, определенное на некотором непустом компакте Q в X, причем такое, что $F(x)$ замкнуто при $x\in Q$. Допустим, что F полунепрерывно сверху, т. е. для каждого замкнутого множества A в X его прообраз $F^{-1}(A)=\{x\in Q\colon\ (\exists y\in A)\ (x,y)\in F\}=\{x\in Q\colon\ F(x)\cap A\neq\varnothing\}$, является замкнутым в X. Тогда F имеет неподвижную точку в Q. Сформулированная теорема справедлива и для более широкого, чем нормированный, класса так называемых *локально выпуклых пространств*. Эти пространства составляют, по сути, наименьший класс, содержащий в себе все нормированные пространства и выдерживающий операцию образования произведения таких пространств в произвольном количестве. Такие пространства находят исключительно плодотворные применения, прежде всего в теории функциональных пространств дифференцируемых функций (с так называемыми обобщенными производными) — *пространствах Соболева.*

Число различных направлений анализа весьма велико. Среди них — уже названные теория функциональных пространств Соболева, спектральный анализ и теория индекса, теория гильбертовых пространств, а также теория банаховых алгебр (И. М. Гельфанд) и операторных алгебр (Дж. фон Нейман), теория представлений и другие. Эти теории получили глубокое развитие, способствовали решению внутренних проблем самой математики, получили важнейшие применения в теоретической физике, механике, математической физике, теории вероятностей и т. п.

Мы сосредоточим внимание лишь на некоторых направлениях, которые либо уже используются в математической экономике, либо их применения можно ожидать в ближайшее время.

Хотя экономические проблемы, по существу, конечны — имеется ограниченное множество продуктов и ресурсов, время можно считать дискретным, но такие конечные модели невообразимо громоздки и необозримы и для анализа, и для расчета. Поэтому гораздо эффективнее вместо них использовать родственные непрерывные континуальные модели. Такова, например, модель развития (роста) при техническом прогрессе с вмененными основными фондами (Р. Солоу, Л. В. Канторович), описываемая функциональным уравнением, хорошо поддающимся теоретическому анализу и расчету.

Во многих модельных построениях возникает вопрос не только об адекватности модели исследуемому процессу, но и о «реальности модели самой по себе», т. е. о существовании модели, обладающей нужными свойствами. При этом заведомо известная неадекватность модели реальному процессу не позволяет сделать такое заключение на основании анализа исходных данных.

Вопрос существования нужной модели в известной мере сродни вопросу существования решения. Геометрически он может быть сформулирован так. Если мы выделяем два множества в пространстве моделей — одно, обладающее одной частью свойств, другое — другой, то имеют ли они общую точку? Существует значительная литература о методе неподвижных точек: принцип Каччиополли, принцип Шаудера, теорема Какутани, упомянутая выше теорема Фана и др. В частности, таким образом получается известная теорема Эрроу — Вальда.

Скарфом и другими были развиты не только качественные, но и количественные методы нахождения решений моделей, в частности оптимизационных. Хотя эти методы громоздки и пока недостаточно эффективны, но сам по себе принципиально новый подход к поиску решений является весьма ценным.

Говоря о численных методах нахождения решений, необходимо напомнить о том значении, которое они имеют в экономике. Мало где в других науках встречаются задачи таких масштабов и такой сложности, как в моделях экономических процессов. Поэтому то развитие, которое получили численные методы алгебры и анализа в результате создания функционально-аналитического подхода к ним, призваны сыграть большую роль в математической экономике.

Это следующие группы методов:

1. Метод наискорейшего спуска и градиентные методы.
2. Методы ньютоновского типа.
3. Общая теория приближенных методов.
4. Принцип мажорант и методы последовательных приближений.

По ним имеется обширная литература в функциональном анализе и многих разделах прикладной математики, порождено огромное число эффективных численных методов решения с точной характеристикой наличия сходимости и ее быстроты. Названные методы дают также и много других важных средств исследования экономических моделей.

С их помощью в ряде случаев на основе расчетов могут устанавливаться строго существование решения, область единственности, некоторые свойства решения. В ряде случаев приближенное решение может быть получено на компьютере не в численном, а в аналитическом (формульном) виде. Эта область получила названия «вычислительное доказательство» и «аналитические вычисления на машинах», «доказательные вычисления». В то же время значение названных методов для экономики, в частности для задач на поиск равновесия или экстремума, полностью не раскрыто.

При развитии теории функциональных пространств одна сторона реальной действительности оказалась в ней на некоторое время упущенной. Для практических объектов наряду с алгебраическими и другими соотношениями большое значение имеет соотношение сравнения. Простое сравнение, имеющееся между всеми объектами, носит обедненный характер, например, можно все виды расположить по их весу, но это мало что дает. Гораздо более естественным является упорядочение, которое для тех случаев, когда это естественно, определяется или фиксируется, а в других случаях остается неопределенным (частичное упорядочение или полуупорядочение). Например, два набора продуктов несомненно следует считать сравнимыми и первый больше второго, если в первом каждого продукта соответственно больше, чем во втором. Если же часть больше в одном, часть больше в другом, то можно сравнение не фиксировать.

Так, в свое время была построена теория полуупорядоченных пространств, и прежде всего теория K-пространств, определенных выше. Она получила разнообразные применения как в теоретических вопросах анализа, так и в построении некоторых прикладных методов, например в теории мажорант в связи с интенсивным изучением метода последовательных приближений. В то же время полностью ее возможности до сих пор еще не раскрыты. Недооценено также и значение этой ветви функционального анализа для экономики. Между тем в экономике соотношения сравнения и сопоставления играют исключительную роль, и уже при возникновении K-пространств было ясно, что при анализе экономики они найдут свое место и дадут полезные плоды.

Теория K-пространств имеет и другое значение — их элементы могут использоваться как числа. В частности, при построении пространств типа Банаха в качестве нормы вместо чисел могут использоваться элементы такого пространства, конечномерного или бесконечномерного. Подобная нормировка объектов является гораздо более точной. Скажем, функция нормируется не своим максимумом на всем интервале, а десятком чисел — максимумами ее на частях этого интервала. Очевидно, что возникающая норма гораздо точнее характеризует функцию. В частности, в экономике этот подход очень полезен при применении агрегирования, если он делается более детальным, чем обычная стоимость, образом. Итак, большие системы путем агрегирования упрощаются до систем меньшего размера, но все же довольно близким по свойствам к исходным.

Имеется ряд других применений частично упорядоченных множеств — в экономике, выпуклом анализе, некоторых расчетах и т. д., в то же время их использование весьма недостаточно. Большее проникновение этих методов функционального анализа в экономику сыграет должную роль в изучении экономических систем.

Выше отмечены применения функционального анализа в экономике. В свою очередь, экономическая проблематика оказывает влияние на развитие самой математики. Это естественно, так как экономика представляет собой огромную область исследований с чертами существенных принципиальных отличий от тех классических физико-математических дисциплин, на базе которых шло развитие функционального анализа. Нужно отметить тот очевидный факт, что теория систем линейных неравенств и методов их решения развилась на сто лет позже, чем теория систем линейных уравнений, и притом именно в связи с потребностями экономики.

Еще один интересный и важный пример — транспортная задача. Это классическая задача об определении путей перевозки материалов от одних пунктов к другим, которая была математически оформлена и нашла эффективные методы решения, в частности метод потенциалов, около 1940 г. Известно, какое значение названная задача и ее обобщения, например производственно-трнспортная задача, имеют для экономики — в вопросах размещения производства и ряде других.

Первоначальное изложение транспортной задачи под названием задачи о перемещении масс дано в 1942 г. (Л. В. Канторович). При этом, в частности, были проанализированы задача перевозок и задача выравнивания грунта, важная при строительстве аэродромов. Основная задача формулировалась в весьма абстрактном виде для произвольного метрического пространства, и довольно естественно введено понятие расстояния между двумя множествами одинаковой массы в компакте. Оно определено как минимальный объем затрат по перемещению одной массы из одного места в другое.

Названная метрика в дальнейшем стала широко применяться в теории вероятностей для распределений, в геометрии и некоторых других областях математического знания. Ее применения в самом функциональном анализе привели к ряду новых интересных теорем. Можно назвать и другие примеры, где математический аппарат, развитый в связи с разнообразными задачами экономики, получил определенные приложения в самой математике и в совершенно иных прикладных науках. В этом нет ничего удивительного, потому что экономический анализ по своему многообразию и сложности, вероятно, превосходит даже проблематику современной физики. Следует ожидать, что в дальнейшем углубление математического анализа проблем экономики станет еще более мощным источником развития математического аппарата, идей самой математики.

Из тех теорий, которые перечислены выше, остановимся на использовании общей теории приближенных методов в экономике. Основная идея этой теории содержит общий принцип изучения больших систем, причем не только принцип системного анализа, но и общий гносеологический принцип исследований. Он состоит попросту в том, что данной большой сложной модели, расположенной в некотором пространстве, в известном смысле сопоставляется более простая, менее многомерная модель в этом же или другом пространстве посредством однозначного или одно-многозначного соответствия. Изучение типа упрощенной модели оказывается более доступным и осуществимым. При этом принципы и конкретные теоремы общей теории нередко позволяют на основе исследования более простой малой системы строить точные заключения о первоначальной большой системе, получать численные приближенные, но довольно точные оценки ее характеристик и осуществлять теоретический анализ системы — устанавливать существование решения, его единственность, асимптотические свойства и т. д.

Подчеркнем, что имеются разные средства построения таких упрощенных систем в экономике — переход к малоразмерным задачам, однопродуктовым или глобальным задачам и т. д. В частности, одним из общих приемов такого рода построения упрощенной системы является метод агрегирования. В этой связи применение общей теории приближенных методов и ее методологии даст существенные результаты в исследовании и экономическом анализе.

В заключение можно выразить убежденность в том, что все более широкое применение методов функционального анализа в математической экономике является весьма перспективным, и следует ожидать, что оно даст существенный вклад в развитие этой важной отрасли науки.

г. Москва

Статья поступила
16 мая 1986 г.