R. G. Shterenberg, An example of a periodic magnetic Schrödinger in operator with degenerate lower edge of the spectrum,
Algebra i Analiz, 2004, Volume 16, Issue 2, 177–185

Алгебра и анализ
Том 16 (2004), вып. 2

Моему дорогому Учителю
М. Ш. Бирману посвящается

ПРИМЕР ПЕРИОДИЧЕСКОГО МАГНИТНОГО ОПЕРАТОРА ШРЁДИНГЕРА С ВЫРОЖДЕННЫМ НИЖНИМ КРАЕМ СПЕКТРА

© Р. Г. ШТЕРЕНБЕРГ

Исследуется вопрос о структуре нижнего края спектра периодического магнитного оператора Шрёдингера. Известно, что при отсутствии магнитного потенциала энергия имеет квадратичную зависимость от квазиимпульса вблизи нижнего края спектра оператора. Предъявлен пример магнитного оператора Шрёдингера, для которого энергия вблизи нижнего края спектра имеет частичное вырождение по одному из направлений квазиимпульса.

§0. Введение

0.1. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$, Ω — ее элементарная ячейка. Γ-периодические дифференциальные операторы (ДО) частично диагонализуются с помощью преобразования Гельфанда (см., например, [Sk]). Исходный ДО при этом представляется в виде прямого интеграла семейства ДО, действующих на ячейке Ω, склеенной в тор. Это семейство зависит от параметра (квазиимпульса) $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$.

Мы рассматриваем *полуограниченные самосопряженные* ДО. Для большинства ДО математической физики действующие в $L_2(\Omega)$ операторы имеют дискретный спектр. При этом собственные значения $E_j(\mathbf{k})$, $j = 1, 2, \ldots$, занумерованные в порядке возрастания, непрерывно зависят от $\mathbf{k}$. Спектр исходного ДО тогда имеет *зонную структуру*, порожденную образами *зонных функций* $E_j(\cdot)$. Удобно считать, что нижний край спектра совпадает с точкой $\lambda = 0$. При изучении некоторых вопросов оказывается, что для

Ключевые слова: периодический оператор, магнитный оператор Шрёдингера, нижний край спектра, пороговые эффекты, вырождение.

Работа выполнена в рамках проекта РФФИ, 02-01-00798.

7 Зак. № 99

их решения достаточно приближенно знать поведение первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$ в окрестности своего минимума. В таких случаях говорят о *пороговых эффектах* в точке $\lambda = 0$. Выяснение того, какой эффект является пороговым, представляет собой каждый раз содержательную задачу. Укажем, например, вопрос о дискретном спектре левее точки $\lambda = 0$, возникающем при возмущении периодического ДО отрицательным потенциалом, стремящимся к нулю на бесконечности. Если потенциал убывает не слишком быстро, решающим является пороговый вклад. Другой важный пример порогового эффекта при $\lambda = 0$ — поведение периодического ДО в пределе малого периода.

0.2. Изучение пороговых эффектов облегчается, если периодический ДО допускает удобную („регулярную") факторизацию. В работе [BSu] был выделен широкий класс эллиптических периодических ДО второго порядка, для которых в анализе структуры нижнего края спектра можно продвинуться достаточно далеко. В скалярном случае этот класс определяется следующим условием: *оператор M имеет вид*

$$M = \overline{f(\mathbf{x})}\mathbf{b}(\mathbf{D})^* G(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{D})f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{b}(\mathbf{D}) := \sum_{j=1}^{d} D_j \mathbf{b}_j, \tag{0.1}$$

где $\mathbf{D} = \operatorname{col}\{D_1, \dots, D_d\} = -i\nabla = -i\operatorname{col}\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_d}\}$, $f(\mathbf{x})$ *— Γ-периодическая функция, $G(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(m \times m)$-матрица-функция $(m \geqslant d)$, $\mathbf{b}_j$, $j = 1, 2, \dots, d$, — набор линейно-независимых векторов из $\mathbb{C}^m$; причем выполнены условия*

$$f,\ f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad c_0\mathbf{1} \leqslant G(\mathbf{x}) \leqslant c_1\mathbf{1}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \ 0 < c_0 \leqslant c_1 < \infty. \tag{0.2}$$

Факторизацию вида (0.1) при условиях (0.2) будем называть *правильной*. Из существования правильной факторизации вытекает следующее.

1) Первая зонная функция $E_1(\mathbf{k})$ имеет невырожденный минимум в точке $\mathbf{k} = 0$ (при этом $E_1(0) = 0$), и для соответствующей квадратичной формы минимума можно указать явные и хорошо контролируемые оценки.
2) $E_1(\mathbf{k}) > 0$, $\mathbf{k} \neq 0 \pmod \Gamma$.
3) $\min\limits_{\mathbf{k}} E_2(\mathbf{k}) > 0$.

Иногда ДО в исходной записи не имеет вида (0.1), но может быть к такому виду приведен. В [BSu] отмечено, что, в частности, правильной факторизацией обладают периодический оператор Шрёдингера вида $-\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla + V(\mathbf{x})$ с положительной матрицей (метрикой) $g(\mathbf{x})$, а также двумерный периодический оператор Паули $(\mathbf{D} - \mathbf{A})^2 \pm (\partial_1 A_2 - \partial_2 A_1)$, представляющий собой частный случай магнитного оператора Шрёдингера

$$(\mathbf{D} - \mathbf{A})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}) + V(\mathbf{x}). \qquad (0.3)$$

Здесь $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая вещественная вектор-функция.

0.3. Рассмотрим „чисто магнитный“ оператор Шрёдингера

$$H(t) = (\mathbf{D} - t\mathbf{A})^2, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (0.4)$$

В (0.4) для удобства введен параметр t. Оператор (0.4) исходно факторизован, но эта факторизация не имеет вида (0.1). При этом нижний край спектра оператора $H(t)$ положителен при $t \neq 0$, если только вектор $\mathbf{A}$ не потенциален. При подходящем $\theta(t) > 0$ нижний край спектра оператора $H(t) - \theta(t)I$ совпадает с $\lambda = 0$, но тогда исчезает исходная факторизация.

При не слишком обременительных условиях на коэффициенты можно показать, что для достаточно малых t оператор $H(t) - \theta(t)I$ допускает правильную факторизацию. Однако без ограничений малости правильная факторизация, вообще говоря, не существует.

Отметим, что наличие в (0.3) электрического потенциала, согласованного с магнитным, может изменить дело. Например, для двумерного оператора Паули нижний край спектра всегда совпадает с $\lambda = 0$, и существует правильная факторизация.

В настоящей работе мы предъявим явный пример чисто магнитного оператора Шрёдингера, для которого не только не существует правильной факторизации, но и происходит частичное уплощение нижнего края спектра. Именно у рассмотренного оператора по одному из направлений квазиимпульса первая зонная функция $E_1(\mathbf{k})$ имеет минимум не второго, а четвертого порядка. Такое вырождение нижнего края спектра приводит к особенностям пороговых эффектов, которые не могли наблюдаться при отсутствии магнитного потенциала. Более детальное обсуждение возникающих в этом случае эффектов, а также исследование вопроса о наличии правильной факторизации для оператора (0.3) при не слишком больших $\mathbf{A}$ будут приведены в другой работе.

0.4. Благодарности. Автор выражает глубокую признательность М.Ш.Бирману и Т. А. Суслиной, чьи работы вызвали его интерес к рассматриваемым вопросам, а также благодарит их за указание на данную задачу и полезные обсуждения в процессе подготовки настоящего текста.

§1. Основной результат

1.1. Обозначения. Мы используем обозначения $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\} \in \mathbb{R}^2$; $\Omega := [-1/2, 1/2)^2$, $\widetilde{\Omega} := [-\pi, \pi)^2$ — двойственная к Ω ячейка. Пространство Соболева функций квадратично суммируемых вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно обозначаем через $H^2(\mathbb{R}^2)$. Через $\widetilde{H}^2(\Omega)$ обозначается пространство функций, $\mathbb{Z}^2$-периодическое продолжение которых принадлежит $H^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Наконец, $\mathbf{1}$ — единичная (2×2)-матрица.

1.2. Построение оператора. Предварительные замечания. В $L_2(\mathbb{R}^2)$ рассматривается оператор

$$M_t := (\mathbf{D} - t\mathbf{A}(\mathbf{x}))^2 - t^2, \quad t \in \mathbb{R}, \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2,$$

где магнитный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ задается формулой $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathrm{col}\{0, A_2(x_1)\}$, причем

$$\begin{aligned} A_2(x_1) &:= \operatorname{sign} x_1, & x_1 &\in [-1/2, 1/2), \\ A_2(x_1 + 1) &= A_2(x_1), & x_1 &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

(Слагаемое $-t^2$ в операторе M_t обеспечивает то, что при малых t спектр оператора начинается в нуле.) Очевидно, оператор M_t, $t \in \mathbb{R}$, с областью определения $H^2(\mathbb{R}^2)$ самосопряжен и полуограничен снизу. С учетом (1.1) он может быть переписан в виде

$$M_t = D_1^2 + D_2^2 - 2tA_2(x_1)D_2. \tag{1.2}$$

Положим

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, x_2) &:= 2|x_1|, & x_1 &\in [-1/2, 1/2), & x_2 &\in \mathbb{R}, \\ \varphi(x_1 + 1, x_2) &= \varphi(x_1, x_2), & x_1 &\in \mathbb{R}, & x_2 &\in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Введем также семейство эрмитовых матриц

$$G_\gamma(\mathbf{x}; t) := \begin{pmatrix} 1 & -i(t\varphi(\mathbf{x}) + \gamma) \\ i(t\varphi(\mathbf{x}) + \gamma) & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1.4}$$

Непосредственно проверяется тождество

$$M_t = \mathbf{D}^* G_\gamma(\mathbf{x}; t)\mathbf{D}, \quad t \in \mathbb{R}, \ \gamma \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

Отметим, что матрица (1.4) порождает представление (1.5) при любом $\gamma \in \mathbb{R}$, хотя оператор M_t от γ не зависит.

Будем говорить, что матрица $G_\gamma(\mathbf{x}; t)$ *равномерно положительно определена* (при данных t и γ), если для некоторой константы $c > 0$ выполнена оценка

$$G_\gamma(\mathbf{x};t) \geqslant c\mathbf{1}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \ c = c(t,\gamma) > 0. \tag{1.6}$$

Лемма 1.1. *Матрица $G_\gamma(\mathbf{x};t)$ равномерно положительно определена тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$|t| < 2, \quad \begin{cases} \gamma \in (-1, 1-t), & 0 \leqslant t < 2, \\ \gamma \in (|t|-1, 1), & -2 < t < 0. \end{cases}$$

Доказательство. Ясно, что оценка (1.6) равносильна условию

$$\det G_\gamma(\mathbf{x};t) > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.7}$$

В силу (1.3), (1.4) неравенство (1.7) означает, что

$$1 - (2t|x_1| + \gamma)^2 > 0, \quad x_1 \in [-1/2, 1/2).$$

Отсюда уже легко следует утверждение леммы. •

Замечание 1.2. Из леммы 1.1 и тождества (1.5) вытекает, что при $|t| < 2$ для оператора M_t существует правильная факторизация вида (0.1). (При этом не удается при всех $|t| < 2$ выбрать одно и то же γ, обеспечивающее правильную факторизацию (см. лемму 1.1).) Как следствие, точка $\lambda = 0$ является нижним краем спектра оператора M_t. Как мы увидим в дальнейшем, точка $\lambda = 0$ остается нижним краем спектра вплоть до значения параметра $|t| = 2\sqrt{3}$.

1.3. Исследование спектра оператора M_t. В $L_2(\Omega)$ рассмотрим семейство операторов, зависящих от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^2$ ($\mathbf{k}$ — квазиимпульс),

$$M_t(\mathbf{k}) := (D_1 + k_1)^2 + (D_2 + k_2)^2 - 2t \operatorname{sign} x_1 (D_2 + k_2),$$
$$\mathbf{k} = \{k_1, k_2\} \in \mathbb{R}^2. \tag{1.8}$$

Операторы $M_t(\mathbf{k})$, заданные на области определения $\widetilde{H}^2(\Omega)$, самосопряжены, полуограничены снизу и имеют дискретный спектр. Пусть $\{E_j(\mathbf{k};t)\}$ — собственные значения оператора $M_t(\mathbf{k})$, занумерованные в порядке неубывания:

$$E_1(\mathbf{k};t) \leqslant E_2(\mathbf{k};t) \leqslant \cdots \leqslant E_n(\mathbf{k};t) \leqslant \ldots$$

Пусть $\{\psi_j(\mathbf{x},\mathbf{k};t)\}$ — соответствующие (периодические) ортонормированные собственные функции. Функции $E_j(\mathbf{k};t)$ непрерывны по $\mathbf{k}$ и t и $(2\pi\mathbb{Z})^2$-периодичны по $\mathbf{k}$. В дальнейшем мы ограничимся значениями квазиимпульса $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$.

Из общей теории Флоке–Блоха вытекает, что спектр оператора M_t имеет зонную структуру, и справедливо соотношение

$$\sigma(M_t) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathcal{R}(E_j(\cdot;t)). \tag{1.9}$$

Здесь $\mathcal{R}(\cdot)$ означает образ функции.

В настоящем пункте мы более детально обсуждаем структуру нижнего края спектра оператора M_t. Из существования правильной факторизации (1.5) с равномерно положительно определенной матрицей G_γ, используя несложные вариационные соображения, можно получить ряд соотношений для собственных значений $E_j(\mathbf{k};t)$ (ср. [BSu]). В частности, для $M_t(\mathbf{k})$ при $|t| < 2$ выполнено

$$\begin{gathered} E_1(\mathbf{k};t) \geqslant 0, \quad E_2(\mathbf{k};t) > 0, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}; \\ E_1(\mathbf{k};t) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{k} = 0; \quad \psi_1(\mathbf{x},0;t) = 1. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Кроме того, минимум функции $E_1(\cdot,t)$ при $\mathbf{k} = 0$ является невырожденным.

Нас интересует вопрос о том, при каких значениях параметра, t сохраняют силу соотношения (1.10). Используя дискретное преобразование Фурье по x_2, получаем, что оператор (1.8) раскладывается в ортогональную сумму операторов

$$(D_1 + k_1)^2 + (2\pi n_2 + k_2)^2 - 2t(2\pi n_2 + k_2)\operatorname{sign} x_1, \quad n_2 \in \mathbb{Z},$$

действующих в $L_2([-1/2,1/2))$, с периодическими граничными условиями. Таким образом, задача о спектре оператора $M_t(\mathbf{k})$ сводится к изучению спектра операторного семейства

$$\widetilde{M_t}(k_1,\xi) := (D_1 + k_1)^2 + \xi^2 - 2t\xi \operatorname{sign} x_1, \quad k_1 \in [-\pi,\pi), \ \xi \in \mathbb{R},$$

на интервале $x_1 \in [-1/2,1/2)$ с периодическими граничными условиями. Пусть $\widetilde{E}_1(k_1,\xi;t)$, $k_1 \in [-\pi,\pi)$, — наименьшее собственное значение оператора $\widetilde{M_t}(k_1,\xi)$. Оператор $\widetilde{M_t}(k_1,\xi)$ имеет вид $(D_1+k_1)^2 + V_\xi(x_1)$, и потому, как хорошо известно (см., например, [RSi]), выполнено

$$\widetilde{E}_1(k_1,\xi;t) > \widetilde{E}_1(0,\xi;t), \quad k_1 \in [-\pi,\pi)\setminus\{0\}, \ \xi \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Перейдем теперь к изучению спектра оператора

$$\widetilde{M_t}(0,\xi) = -\frac{d^2}{dx_1^2} + \xi^2 - 2t\xi \operatorname{sign} x_1, \quad \xi \in \mathbb{R},$$

на интервале $x_1 \in [-1/2, 1/2)$ с периодическими граничными условиями. Отдельно выделим случай $\xi = 0$. Очевидно, что ему отвечают соотношения $E_1(0; t) = 0$, $\psi_1(\mathbf{x}, 0; t) = 1$. Рассмотрим задачу

$$\widetilde{M}_t(0, \xi)u(x_1) = 0, \ \ u(-1/2) = u(1/2), \ \ u'(-1/2) = u'(1/2), \ \ \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1.12}$$

Необходимым условием нетривиальной разрешимости задачи (1.12), очевидно, является выполнение соотношения

$$\xi^2 < 2|t\xi|, \quad \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}. \tag{1.13}$$

Положим

$$\alpha_\pm := \sqrt{2|t\xi| \pm \xi^2}, \quad \xi^2 < 2|t\xi|, \ \ \xi \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Простые, хотя и громоздкие, вычисления показывают, что задача (1.12) нетривиально разрешима тогда и только тогда, когда справедливо (1.13) и выполнено одно из следующих двух соотношений:

$$\alpha_+ \operatorname{cth} \frac{\alpha_+}{4} = -\alpha_- \operatorname{ctg} \frac{\alpha_-}{4}, \quad \alpha_+ \operatorname{th} \frac{\alpha_+}{4} = \alpha_- \operatorname{tg} \frac{\alpha_-}{4}. \tag{1.14}$$

Из дальнейшего анализа вытекает, что при $|t| \leqslant 2\sqrt{3}$ соотношения (1.14) не реализуются. Отсюда и из (1.9), (1.11) следует, что при $|t| \leqslant 2\sqrt{3}$ точка $\lambda = 0$ является нижним краем спектра оператора M_t, и выполнены соотношения (1.10).

Для того чтобы завершить исследование нижнего края спектра оператора M_t, снова рассмотрим задачу на первое собственное значение оператора $M_t(\mathbf{k})$:

$$M_t(\mathbf{k})\psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t) = E_1(\mathbf{k}; t)\psi_1(\mathbf{x}, \mathbf{k}; t).$$

Из сказанного выше следует, что при $|t| \leqslant 2\sqrt{3}$ выполнено $E_1(0; t) = 0$, $\psi_1(\mathbf{x}, 0; t) = 1$, причем точка $\lambda = 0$ является простым собственным значением оператора $M_t(0)$. Несложно выписать несколько членов аналитического разложения функции $E_1(\cdot; t)$ в окрестности точки $\mathbf{k} = 0$:

$$E_1(\mathbf{k}; t) = k_1^2 + \left(1 - \frac{t^2}{12}\right)k_2^2 + \frac{1}{42} \cdot \frac{t^4}{144}k_2^4 - \frac{1}{10} \cdot \frac{t^2}{12}k_1^2 k_2^2 + O(|\mathbf{k}|^6).$$

В частности, при $|t| = 2\sqrt{3}$ имеем

$$E_1(\mathbf{k}; \pm 2\sqrt{3}) = k_1^2 + \frac{1}{42}k_2^4 - \frac{1}{10}k_1^2 k_2^2 + O(|\mathbf{k}|^6).$$

Подытожим полученные результаты.

Теорема 1.3. 1) *При* $|t| < 2\sqrt{3}$ *точка* $\lambda = 0$ *является нижним краем спектра оператора* M_t, *выполнены соотношения* (1.10), *а аналитическая в окрестности* $\mathbf{k} = 0$ *функция* $E_1(\cdot; t)$ *имеет в точке* $\mathbf{k} = 0$ *невырожденный минимум. Кроме того, при* $|t| < 2$ *для оператора* M_t *существует правильная факторизация.*

2) *При* $|t| = 2\sqrt{3}$ *точка* $\lambda = 0$ *является нижним краем спектра оператора* M_t, *выполнены соотношения* (1.10), *а аналитическая в окрестности* $\mathbf{k} = 0$ *функция* $E_1(\cdot; \pm 2\sqrt{3})$ *имеет в точке* $\mathbf{k} = 0$ *минимум второго порядка по направлению* k_1 *и четвертого — по* k_2.

Замечание 1.4. 1) Можно показать, что при $2 \leqslant |t| \leqslant 2\sqrt{3}$ правильной факторизации для оператора M_t не существует. 2) Несколько более детальный анализ показывает, что при $|t| > 2\sqrt{3}$ оператор M_t больше не является положительным. Причем, по крайней мере если $|t| \in (2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}+\delta)$, где $\delta > 0$ достаточно мало, реализуется ситуация, когда (отрицательный) минимум спектра оператора M_t достигается при двух различных (по $\mathrm{mod}\,(2\pi\mathbb{Z})^2$) значениях квазиимпульса $\mathbf{k}^{(1)} = \{0, k_2\}$, $\mathbf{k}^{(2)} = \{0, -k_2\}$, $k_2 > 0$.

Замечание 1.5. Разумеется, аналогичный рассмотренному в данном пункте пример существует и в размерностях $d \geqslant 3$. Следует просто рассмотреть оператор вида

$$M_t^{(d)} := M_t \otimes (-\Delta'), \quad \text{где } \Delta' := \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}\right).$$

Тогда справедливо утверждение, аналогичное теореме 1.3.

Мы построили пример частичного (по одному направлению квазиимпульса) уплощения нижнего края спектра периодического магнитного оператора Шрёдингера. Автор полагает, что реализуются примеры полного уплощения нижнего края спектра. По-видимому, подобная ситуация должна наступить при непрерывном изменении параметра $t \in \mathbb{R}$ в семействе двумерных операторов $\mathcal{M}_t := (\mathbf{D} - t\mathbf{A})^2 - t^2$, где $\mathbb{Z}^2$-периодический магнитный потенциал $\mathbf{A}$ задан на Ω формулой $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathrm{col}\{\mathrm{sign}\, x_2, \mathrm{sign}\, x_1\}$, $\{x_1, x_2\} \in \Omega$.

Список литературы

[BSu] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, pp. 71–107.

[RSi] Рид М., Саймон Б., *Методы современной математической физики*. Т. 4. *Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

[Sk] Скриганов М. М., *Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов*, Тр. Мат. ин-та АН СССР **171** (1985), 3–122.

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
198504 Санкт-Петербург, Петродворец
Россия
E-mail address: roman@RS3759.spb.edu

Поступило 1 сентября 2003 г.