



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Шлычков, Исследование конвективного тепломассопереноса в водохранилищах северных широт с помощью вихреразрешающей модели, *Прикл. мех. техн. физ.*, 2010, том 51, выпуск 5, 68–76

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

19 марта 2025 г., 19:02:28



УДК 551.465

ИССЛЕДОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ВОДОХРАНИЛИЩАХ СЕВЕРНЫХ ШИРОТ С ПОМОЩЬЮ ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩЕЙ МОДЕЛИ

В. А. Шлычков

Новосибирский филиал Института водных и экологических проблем СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: slav@ad-sbras.nsc.ru

Представлена математическая постановка задачи о термодинамическом взаимодействии водоема с переохлажденным дном и ледовым покровом на свободной поверхности. Моделирование турбулентных течений с когерентными структурами проведено на основе уравнений термогидродинамики в приближении Буссинеска, в которых выделены средние (однородные по горизонтали) и конвективные (крупные вихри) компоненты. Движения подсеточных масштабов описаны с помощью однопараметрической модели для кинетической энергии турбулентности. Обсуждаются вопросы применимости моделей разных классов для расчета вертикального теплообмена в глубоких водоемах над зонами вечной мерзлоты.

Ключевые слова: численное моделирование, турбулентность, крупные вихри, конвекция, теплообмен, водоем, вечная мерзлота.

Введение. При строительстве крупных гидроузлов в районах вечной мерзлоты возникает ряд проблем, связанных с термическим режимом донных грунтов и его влиянием на процессы обмена в водной толще. Так, наполнение водохранилища Эвенкийской ГЭС на р. Нижняя Тунгуска, расположенного в Восточной Сибири вблизи Северного полярного круга, приведет к подъему уровня воды на 120 м и затоплению обширных площадей с мерзлотными грунтами по руслу длиной более 2000 км.

В период затопления температура придонных слоев воды будет близка к температуре тающего льда ($0\text{ }^{\circ}\text{C}$), тогда как слои, лежащие выше, будут иметь температуру максимальной плотности воды $T_{\max} \approx 4\text{ }^{\circ}\text{C}$ (более теплые массы, как более легкие, переместятся вверх под действием сил плавучести). Аномальность физических характеристик воды в диапазоне температур $0 \div 4\text{ }^{\circ}\text{C}$ обуславливает уменьшение плотности с понижением температуры [1]. Примыкающие ко дну охлажденные слои воды с температурой $T < T_{\max}$ окажутся легче вышележащих, что создаст условия для формирования плотностной неустойчивости и развития интенсивных конвективных движений. В зависимости от внешних условий придонная конвекция может охватить значительную площадь, приобрести массовый характер и достигнуть поверхностных горизонтов. В этом случае конвективный теплоперенос способствует охлаждению воды по всей глубине, тем самым влияя на процессы внутриводного и поверхностного льдообразования.

Точность воспроизведения термодинамических характеристик водоема в значительной степени определяется адекватным описанием сложных механизмов взаимодействия

воды и мерзлого грунта в придонной области. Реализация гидростатической неустойчивости в воде сопровождается генерацией так называемых когерентных структур, представляющих собой обособленные термические образования (термики), и конвективных струй с выраженными вертикальными движениями [2]. В течение определенного времени эти вихревые структуры сохраняют индивидуальность, а в совокупности образуют конвективный ансамбль со свойствами стохастичности, так как их пространственное распределение, вообще говоря, неупорядоченно [3].

Процессы конвективного перемешивания могут быть удовлетворительно описаны с помощью метода крупных вихрей (large eddy simulation (LES)), основанного на предположении о возможности разделения гидродинамических полей на когерентные структуры и мелкомасштабные пульсации, причем крупновихревое движение может быть рассчитано отдельно, что обусловлено достаточной изотропностью и универсальностью мелких масштабов. Крупновихревая часть турбулентных полей определяется из решения фильтрованной нестационарной системы уравнений гидротермодинамики. Среди известных способов расчета структуры пространственных турбулентных движений LES-метод является наиболее эффективным при описании турбулентной проникающей конвекции как важнейшего механизма, обеспечивающего высокоскоростной вертикальный теплообмен.

Течения с термической стратификацией, обусловленной влиянием дна при температуре ниже 4 °С, наблюдаются в озерах Карелии [4]. Необходимость LES-верификации переменных при построении моделей параметризации в конвективных подледных потоках отмечалась в [5]. Вместе с тем исследования низкотемпературных конвективных режимов в естественных водотоках на основе современных LES-технологий до сих пор не проводились.

Целью данной работы является изучение конвективной неустойчивости и получение количественных оценок вертикальных тепловых потоков в придонных слоях северных водохранилищ над зонами вечной мерзлоты с помощью численной вихреразрешающей модели.

Математическая постановка задачи. Построение вихреразрешающей модели для описания эволюции конвективного ансамбля в водоеме проведем в приближении Буссинеска, выделив основной поток

$$T = \bar{T} + T', \quad \rho = \bar{\rho} + \rho', \quad (1)$$

где \bar{T} , $\bar{\rho}$ — однородные по горизонтали поля температуры и плотности, соответствующие состоянию покоя и связанные соотношением $\bar{\rho} = f(\bar{T})$; f — термодинамическая функция состояния; T' , ρ' — конвективные отклонения, отражающие динамику когерентных структур. Примем $\bar{T} = T_{\max}$.

Заметим, что прямое описание локализованных когерентных структур требует довольно высокого сеточного разрешения: характерный горизонтальный масштаб термик составляет 10 м, следовательно, пространственную детализацию необходимо проводить с шагом $\Delta x \leq 1$ м. Для обеспечения устойчивости осредненных характеристик ансамбль должен содержать в расчетной области достаточно большое (статистически значимое) число когерентных структур. В совокупности эти требования приводят к необходимости интегрирования уравнений на сетке с неоправданно большим числом узлов, что на значительных временных интервалах делает вычислительную задачу достаточно затратной. Как паллиатив сформулируем двумерную математическую модель, которая дает осредненные параметры течения, близкие к параметрам течения трехмерной модели [6].

Введем прямоугольную декартову систему координат (x, z) , в которой ось x расположена горизонтально вдоль водотока, а ось z направлена вертикально вверх, при этом уровень $z = 0$ совпадает с поверхностью дна. В полных уравнениях LES-модели [7] при-

мом $\partial/\partial y = 0$ и исходную систему для описания конвективных когерентных структур в водоеме с учетом (1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -g i_0 - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial u}{\partial z}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} + g \beta_T T' + \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial T'}{\partial t} + u \frac{\partial T'}{\partial x} + w \frac{\partial T'}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial T'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} K_T \frac{\partial T'}{\partial z}, \end{aligned} \quad (2)$$

где u , w — компоненты вектора скорости вдоль осей x , z соответственно; p — давление; i_0 — уклон свободной поверхности; $\beta_T = -\rho^{-1} \partial f / \partial T$ — коэффициент термического расширения воды (в рассматриваемом диапазоне температур $\beta_T < 0$); K_x , K_z — коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена; $K_T = K_z / \text{Pr}$; Pr — число Прандтля.

Сформулируем условия на верхней и нижней границах расчетной области. В вертикальной плоскости рассмотрим прямоугольную область с горизонтальным размером L_x , расположенную вдоль речного водотока. Обозначим через H верхнюю границу области, совпадающую с границей ледового покрова, уровень дна соотнесем с положением оси $z = 0$. Для уравнений (2) поставим следующие краевые условия по вертикали:

$$z = 0: \quad K_z \frac{\partial u}{\partial z} = c_d |u| u, \quad w = 0, \quad T = \xi(x), \quad p = 0; \quad (3)$$

$$z = H: \quad K_z \frac{\partial u}{\partial z} = -c_i |u| u, \quad w = 0, \quad T = 0. \quad (4)$$

Здесь c_d — коэффициент донного трения; c_i — коэффициент трения на поверхности льда; $\xi(x)$ — случайная функция малой амплитуды ($|\xi| < 0,001$ °C) с нулевым математическим ожиданием. Тепловые возмущения задаются для выведения системы из состояния равновесия, последующая эволюция этих возмущений поддерживается за счет энергии неустойчивости. Условия (3), (4) учитывают наличие твердого ледового покрова на границе водоем — атмосфера и вечной мерзлоты на дне (предполагается, что “криогенная емкость” мерзлотного слоя достаточно велика и обеспечивает нулевую температуру дна в течение всего периода решения задачи).

В качестве краевых условий по горизонтали для системы (2) примем традиционное для данного класса задач предположение о периодичности. Заметим, что условие периодичности относится не к отдельно взятому термику, а ко всей области L_x и имеет смысл статистической однородности процессов по горизонтали.

Начальные поля получены из стационарного решения системы (2) при гомотермии $T = T_{\max}$, $T' = 0$ и представляют собой однородное по горизонтали стоковое течение $u(z)$, $w = 0$, обусловленное уклоном i_0 .

Вертикальная вихревая вязкость рассчитывается с помощью однопараметрической модели теории турбулентности с ограничением масштаба в рамках LES-подхода. При этом используется эволюционное уравнение для кинетической энергии турбулентности e в виде

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + w \frac{\partial e}{\partial z} = \alpha_e \frac{\partial}{\partial x} K_x \frac{\partial e}{\partial x} + \alpha_e \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial e}{\partial z} + K_z J - \varepsilon, \quad (5)$$

где $J = u_z^2 - g \beta_T \partial T / \partial z$ — скорость приращения энергии турбулентности; $\varepsilon = c_\varepsilon e^{3/2} / L_e$ — скорость диссипации; L_e — масштаб турбулентности; коэффициент турбулентности определяется по формуле $K_z = c_m L_e \sqrt{e}$; α_e , c_ε , c_m — универсальные постоянные [8]; для масштаба принято $L_e = \Delta s$, $\Delta s = \sqrt{\Delta x \Delta z}$ — средний размер сеточной ячейки. Для расчета

коэффициента горизонтального турбулентного обмена используется алгебраическая модель Смагоринского [9]. Краевые условия для уравнения (5) имеют вид

$$z = 0: \quad \frac{\partial e}{\partial z} = 0, \quad z = H: \quad \frac{\partial e}{\partial z} = 0.$$

Методы численного решения задачи основаны на применении неявных алгоритмов с использованием консервативных схем, обеспечивающих сохранение вторых моментов. Конечно-разностные аналоги уравнений получены из энергетических соотношений, спроецированных в узлы смещенных сеток. Для интегрирования по времени использовался метод расщепления по физическим процессам, модифицированный с целью увеличения нормы оператора перехода. На этапе динамического согласования уравнение неразрывности сводилось к разностному аналогу уравнения Пуассона для давления p , которое решалось прямыми методами с использованием быстрого преобразования Фурье и метода факторизации. Расчетная область покрывалась прямоугольной сеткой, содержащей 512×100 узлов.

В целом численная модель верифицировалась путем сопоставления результатов с известными LES-моделями, а также тестировалась по натурным данным в задаче о развитии проникающей конвекции при ночном выхолаживании водохранилища Веллингтон [10].

Результаты расчетов. Рассмотрим затопленный участок русла длиной $L_x = 500$ м с толщиной водного слоя $H = 50$ м. Уклон свободной поверхности i_0 зададим таким образом, чтобы максимальная скорость стокового течения не превышала $0,1$ м/с (при больших значениях u стохастическая структура решения подавляется вертикальным сдвигом). При указанных параметрах области и сетки пространственное разрешение составляет $\Delta x \approx 1$ м, $\Delta z = 0,5$ м. Интегрирование по времени проводилось в течение 48 ч с шагом $\Delta t = 3$ с.

Модельный ансамбль когерентных структур образуется достаточно быстро после начала формирования неустойчивой стратификации в нижних слоях. Разрешение неустойчивого состояния реализуется в виде неупорядоченных вертикальных движений. Несмотря на то что размеры возмущений невелики, по мере развития конвекции мощность и амплитуда термиков возрастают. Развитый конвективный режим формирует собственный масштаб когерентных структур за счет нелинейных эффектов. На рис. 1 приведен фрагмент расчетного поля температуры при $t = 3$ ч. Отчетливо видны холодные струи и термики, часть из которых отрывается от ядра вверх, а часть сносится средним потоком.

Замкнутыми линиями вблизи левой границы рис. 1 показана локальная скоростная структура вихревой ячейки, течение в которой характеризуется наличием узконаправленных восходящих струй холодной жидкости и медленных компенсационных движений больших масштабов вниз. Участки уплотнения линий тока соответствуют максимальным значениям w , которые в данном расчете равны $5 \div 8$ см/с, модуль скорости нисходящих движений примерно в два раза меньше.

Всплывающие вихри постепенно нагреваются и, смешиваясь с окружающей водой, затухают. При движении термиков вверх развивается быстрый массоэнергообмен между дном и основной толщей воды, что обуславливает формирование слоя перемешивания, ограниченного сверху тонким слоем вовлечения, под которым понимается проникновение турбулизованного конвективного слоя в невозмущенную устойчиво или нейтрально стратифицированную среду. Внизу генерируются новые конвективные образования, процесс эволюции которых повторяет развитие прежних структур. Систематически воздействуя на вышележащие теплые массы, эти образования способствуют увеличению толщины слоя перемешивания.

На рис. 2 (кривая 1) представлен профиль средней температуры \bar{T} при $t = 3$ ч (черта над переменными означает осреднение по горизонтали), по которому можно идентифици-

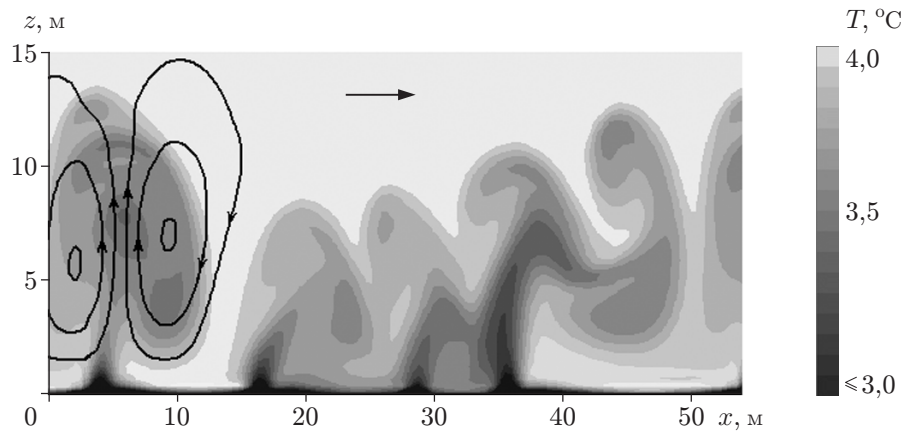


Рис. 1. Фрагмент термической структуры конвективного ансамбля на начальном этапе развития:
замкнутые кривые — линии тока в отдельном термике; стрелка — направление среднего течения

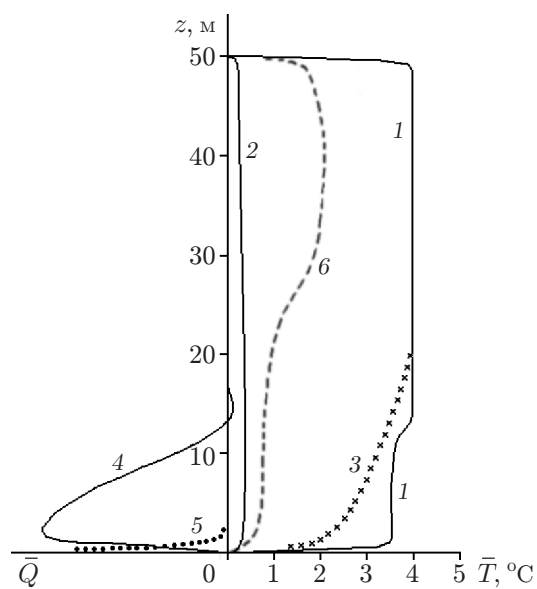


Рис. 2. Вертикальные профили средней температуры (1–3, 6) и конвективный (4) и диффузионный (5) компоненты потока тепла:
1, 2 — расчет по LES-модели: 1 — $t = 3$ ч (начальный этап развития), 2 — $t = 48$ ч (окончание периода интегрирования); 3 — расчет по одномерно-диффузионной модели ($t = 48$ ч); 6 — профиль температуры при скорости внешнего потока $u = 0,4$ м/с

ровать слой перемешивания в данный момент времени. Толщина слоя увеличивается со временем, что свидетельствует о проникающем характере конвекции. На рис. 2 показаны также профили составляющих вертикального потока тепла: конвективного $Q_c = \rho c_w \overline{wT'}$ и диффузионного $Q_t = -\rho c_w \overline{K_T \partial T' / \partial z}$ (кривые 4, 5 соответственно); при этом полный поток тепла равен $Q = Q_c + Q_t$.

В основной толще слоя перемешивания конвективный поток (кривая 4 на рис. 2) значительно больше диффузионного (кривая 5). Ниже, в слое неустойчивости, абсолютные значения этих потоков становятся сопоставимыми. С приближением к уровню дна конвективный поток стремится к нулю и доминирует диффузионный механизм обмена. Конвективный поток обращается в нуль также на верхней границе слоя перемешивания, а еще выше он становится положительным. Наличие слоя с положительной корреляцией $\overline{wT'}$ характерно для процесса вовлечения.

С увеличением времени граница слоя перемешивания перемещается вверх, достигая ледового покрова, и профиль температуры выравнивается по глубине. Вертикальные движения захватывают всю толщу потока, и конвекция утрачивает проникающий характер. При этом температура монотонно понижается со временем (кривая 2 на рис. 2).

На рис. 3 представлены зависимости от времени интегральных параметров системы: средней температуры слоя перемешивания, кинетической энергии пульсаций $K_w = \iint \frac{w^2}{2} dx dz$, выражающей меру интенсивности конвективных движений. Видно, что с течением времени температура воды асимптотически приближается к нулю, а с уменьшением температурного перепада в системе дно — толщина воды конвекция начинает затухать.

На рис. 3 показаны также экстремальные значения потоков Q_c , Q_t (кривые 4, 5). Поскольку абсолютная величина диффузионного потока всегда достигается на нижней

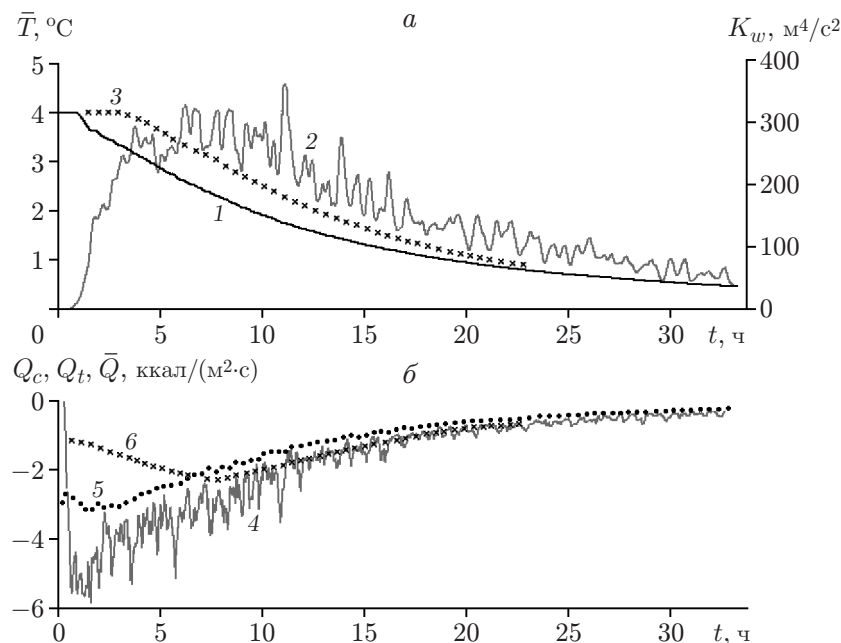


Рис. 3. Зависимости термодинамических параметров от времени: а — 1 — средняя температура, полученная по LES-модели; 2 — кинетическая энергия пульсаций, полученная по LES-модели; 3 — средняя температура, полученная по одномерной модели; б — 4, 5 — экстремальные значения потоков Q_c , Q_t , полученные по LES-модели; 6 — поток тепла, полученный по одномерной модели

границе (см. рис. 2), кривая 5 описывает, по сути, тепловой баланс системы в целом, т. е. интенсивность отвода тепла из толщи воды через донную поверхность, а сумма этой величины по времени соответствует количеству тепла, затраченного на протаивание мерзлого грунта. Эта важная расчетная характеристика позволяет получить количественные оценки скорости деградации вечной мерзлоты под влиянием теплоотдачи от речного потока.

С увеличением скорости руслового потока характер процессов усложняется вследствие взаимодействия стокового течения и когерентных структур. Сдвиг средней скорости является фактором подавления проникающей конвекции, поэтому при $|u| > 1$ м/с вертикальный обмен реализуется за счет диффузии. При меньших, но достаточно больших скоростях течения когерентные структуры развиваются, однако энергии неустойчивости оказывается недостаточно для преодоления сдвиговых напряжений и вовлечения в конвективный обмен всего слоя жидкости. На некотором энергетическом уровне развитие конвекции стабилизируется, а верхняя кромка слоя перемешивания останавливается, не достигнув верхней границы. Вертикальному распределению средней температуры для этого случая соответствует кривая 6 на рис. 2, построенная по результатам численного эксперимента, в котором скорость потока составляла 0,4 м/с. В нижней части области доминирующим является конвективный поток Q_c , что обуславливает более высокую по сравнению с верхним слоем, где конвекция заблокирована и вертикальный обмен осуществляется посредством диффузионного потока Q_t , скорость охлаждения. В результате формируется сложный температурный профиль со стационарным положением слоя вовлечения (в точке перегиба кривой 6 на рис. 2).

Представленные результаты позволяют сделать вывод о ведущей роли крупных вихрей в процессах конвективного теплопереноса. Однако в расчетах для реальных водоемов LES-технологии используются достаточно редко, в частности по причине высоких требований к вычислительным ресурсам. На практике при описании стратифицированных течений используются модели, в которых когерентные структуры не выделяются явно, а считаются подсеточной турбулентностью [11], что соответствует методу RANS (Reynolds averaged Navier — Stokes) решения уравнений, осредненных по Рейнольдсу. Представляет интерес сопоставить решения, полученные на основе LES- и RANS-методов, и оценить ошибку, обусловленную пренебрежением прямым описанием крупновихревой части поля турбулентности. Аналогом системы (2), (5) в RANS-приближении служат одномерные уравнения вертикального переноса и двухпараметрическая модель турбулентности

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -g^i_0 + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial u}{\partial z}, & \frac{\partial T'}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} K_T \frac{\partial T'}{\partial z}, \\ \frac{\partial e}{\partial t} &= \alpha_e \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial e}{\partial z} + K_z J - \varepsilon, & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \alpha_\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + c_2 \frac{\varepsilon}{e} K_z J - c_3 \frac{\varepsilon^2}{e}, \\ & & K_z &= c_\mu \frac{e^2}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (6)$$

где c_μ , c_2 , c_3 — постоянные.

В постановке (6) $Q_c = 0$ и теплоперенос полностью определяется диффузионным компонентом Q_t . Из решения задачи следует, что на начальном этапе развития, который соответствует периоду проникающей конвекции в LES-варианте, имеются значительные отличия в структуре теплообмена. Так, в профиле температуры (кривая 3 на рис. 2) отсутствует слой перемешивания, а выпуклая книзу гладкая форма профиля характерна для чисто диффузионных процессов. Анализ изменения со временем средней температуры (кривая 3 на рис. 3) показывает, что выхолаживание слоя воды происходит с меньшей интенсивностью и запаздывает примерно на 6 ч (ср. с кривой 1 на рис. 3). Скорость отвода тепла на дне (кривая 6 на рис. 3) также меньше, чем в LES-модели (кривая 5 на рис. 3).

В течение второго периода, когда тепловая волна достигает верхней границы и конвекция распространяется на весь слой воды ($t > 7$ ч), в обоих экспериментах значения придонного потока тепла становятся близкими (кривые 5, 6 на рис. 3), исчезает и различие температур слоя. Следовательно, диффузионная K -модель применима для описания квазистационарных конвективных режимов с малой интенсивностью вертикального обмена и малоприспособна для воспроизведения нестационарной проникающей конвекции с выраженной динамикой слоя перемешивания. Отметим также, что установленный факт количественной близости потоков донного тепла, полученных по существенно различающимся моделям турбулентности, свидетельствует о корректности и физической непротиворечивости данных моделей и адекватности расчетов.

Заключение. Представленная вихреразрешающая модель конвективного теплообмена в проточном водохранилище над зонами мерзлотных грунтов описывает высокоскоростной транспорт холода из придонных слоев вверх за счет действия механизма плотностной неустойчивости. Развитие свободной конвекции обуславливает перемешивание водных масс и выравнивание вертикальных плотностных контрастов над ледяным дном с быстрым понижением температуры до близких к нулю значений по всей толще потока.

Рассмотрен альтернативный LES-моделированию вариант расчета на основе одномерной аппроксимации вертикального теплопереноса с использованием диффузионно-градиентного турбулентного замыкания. Показано, что при проникающей конвекции с выраженным слоем перемешивания и эффектами вовлечения применение вихреразрешающей модели является принципиально важным для максимально точного воспроизведения вертикальных потоков тепла и профиля температуры. В условиях полного перемешивания, когда весь слой жидкости является турбулизированным, приемлемой оказалась одномерно-диффузионная модель, дающая расчетные характеристики, близкие к характеристикам, полученным LES-методом.

Сделанное при постановке задачи предположение о неограниченном запасе холода на дне, позволяющее задать условие $T \approx 0$ в (3), ограничивает применимость модели случаями, когда температура грунта весьма низка и (или) дно покрыто достаточно мощным слоем льда. Следующим этапом обогащения задачи должна стать трехслойная модель с уравнениями притока тепла в грунте, придонном ледяном покрове и воде. В такой постановке температура на нижней границе слоя воды станет расчетной величиной и будет изменяться со временем, определяя динамику теплоотдачи и скорость продвижения нулевой изотермы (фронта протаивания) в область вечной мерзлоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Chen C. T., Millero F. J.** Precise thermodynamic properties for natural waters covering only the limnological range // *Limnol. Oceanogr.* 1986. V. 31, N 3. P. 657–662.
2. **Large G., Gent P. R.** Validation of vertical mixing in an equatorial ocean model using large eddy simulations and observations // *J. Phys. Oceanogr.* 1999. V. 29, N 3. P. 449–464.
3. **Монин А. С.** Об определении когерентных структур // *Докл. АН СССР.* 1991. Т. 318, № 4. С. 853–856.
4. **Самолубов Б. И.** Плотностные течения и диффузия примесей. М.: ЛКИ, 2007.
5. **Миронов Д. В., Тержевик А. Ю.** Весенняя конвекция в пресноводных озерах, покрытых льдом // *Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана.* 2000. Т. 36, № 5. С. 681–688.
6. **Шлычков В. А.** Расчет параметров слоя перемешивания в водоеме с использованием различных способов аппроксимации адвекции в вихреразрешающей модели // *Вычисл. технологии.* 2002. Т. 7, № 5. С. 108–114.

7. **Skyllingstad E. D., Smyth W. D., Moum J. N.** Upper-ocean turbulence during wind burst: A comparison of large-eddy simulation result and microstructure measurements // *J. Phys. Oceanogr.* 1999. V. 29, N 1. P. 5–28.
8. **Роди В.** Модели турбулентности окружающей среды // *Методы расчета турбулентных течений* / Под ред. В. Кольмана. М.: Мир, 1984. С. 297–322.
9. **Smagorinsky J.** General circulation experiments with the primitive equations. 1. The basic experiment // *Mon. Weather Rev.* 1963. V. 91, N 2. P. 99–164.
10. **Imberger J.** The diurnal mixed layer // *Limnol. Oceanogr.* 1985. V. 30, N 4. P. 737–770.
11. **Васильев О. Ф., Воеводин А. Ф., Никифоровская В. С.** Численное моделирование температурно-стратифицированных течений в системах глубоких озер // *Вычисл. технологии.* 2005. Т. 10, № 5. С. 29–38.

*Поступила в редакцию 26/VIII 2009 г.,
в окончательном варианте — 14/IX 2009 г.*
