Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. П. Цветков, Дифференциальное уравнение для одного класса ортогональных многочленов Бернштейна–Сеге, *Изв. вузов. Матем.*, 1977, номер 5, 117–121

https://www.mathnet.ru/ivm5968

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
9 декабря 2025 г., 14:22:51

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1977 МАТЕМАТИКА № 5 (180)

УДК 517.51

В. П. Цветков

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНШТЕЙНА—СЕГЕ

В работе [1] построен класс ортогональных на $[-1, 1]$ с весом $p(x)=(1-x^2)^{1/2}(1+k^2x^2)^{-1}$ $(|k|<\infty)$ многочленов $\omega_n(k, x)$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$, имеющих следующее выражение:

$$\omega_n(k, x)=N_n[\beta_k v_n(x)+\gamma_k v_{n-2}(x)], \tag{1}$$

где N_n — нормирующая постоянная, $n\geqslant 1$, $v_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода,

$$\beta_k=\frac{\sqrt{1+k^2}+1}{2}, \quad \gamma_k=\frac{\sqrt{1+k^2}-1}{2}.$$

Выберем нормирующую постоянную N_n так, чтобы коэффициент при старшей степени многочлена $\omega_n(k, x)$ был равен единице $(N_n=2^{-n}(\sqrt{1+k^2}+1)^{-1})$. Будем обозначать эти многочлены через $\tilde{\omega}_n(k, x)$. Таким образом,

$$\tilde{\omega}_n(k, x)=\tilde{v}_n(x)+\alpha_k\tilde{v}_{n-2}(x), \tag{2}$$

где

$$\alpha_k=\frac{\sqrt{1+k^2}-1}{4(\sqrt{1+k^2}+1)}.$$

Используя метод З. С. Гриншпуна [2], выведем для многочленов $\tilde{\omega}_n(k, x)$ дифференциальное уравнение. Без доказательства это уравнение приведено в [1] (с. 172).

Докажем предварительно следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Многочлены Чебышева первого рода $\tilde{T}_n(x)$ выражаются через многочлены Чебышева второго рода $\tilde{v}_n(x)$:*

$$\tilde{T}_n(x)=\tilde{v}_n(x)-1/4\tilde{v}_{n-2}(x) \quad (n\geqslant 2). \tag{3}$$

Доказательство устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 2. *Для любых натуральных $n\geqslant 3$ справедливо равенство*

$$-x^2\tilde{\omega}_n(k, x)+x(1-x^2)\tilde{\omega}_n'(k, x)=F_{1,n}\tilde{v}_n(x)+F_{2,n}\tilde{v}_{n-2}(x), \tag{4}$$

где

$$F_{1,n} = -(n+1)x^2 + 4\psi_n, \quad F_{2,n} = \alpha_k(n-1)x^2 + \psi_n,$$

$$\alpha_k = \frac{2\mu - 1}{4}, \quad \eta = \frac{\sqrt{1+k^2}}{\sqrt{1+k^2}+1}, \quad \psi_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(n+1) - \alpha_k(n-1)\right]. \tag{5}$$

Доказательство. Используя (2), рассмотрим левую часть выражения (4). Имеем

$$-x^2\tilde{\omega}_n(k, x) + x(1-x^2)\tilde{\omega}'_n(k, x) = -x^2[\tilde{v}_n(x) + \alpha_k\tilde{v}_{n-2}(x)] +$$

$$+ x(1-x^2)[\tilde{v}'_n(x) + \alpha_k\tilde{v}'_{n-2}(x)].$$

Производная многочлена

$$\tilde{v}_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{2^n\sqrt{1-x^2}}$$

равна

$$\tilde{v}'_n(x) = \frac{x\tilde{v}_n(x) - (n+1)\tilde{T}_{n+1}(x)}{1-x^2},$$

следовательно,

$$\tilde{v}'_{n-2}(x) = \frac{x\tilde{v}_{n-2}(x) - (n-1)\tilde{T}_{n-1}(x)}{1-x^2}.$$

Используя лемму 1 и рекуррентное соотношение для многочленов Чебышева второго рода, выразим многочлены $\tilde{T}_{n+1}(x)$ и $\tilde{T}_{n-1}(x)$ через многочлены $\tilde{v}_n(x)$ и $\tilde{v}_{n-2}(x)$:

$$\tilde{T}_{n+1}(x) = \frac{8x^2\tilde{v}_n(x) - 4\tilde{v}_n(x) - \tilde{v}_{n-2}(x)}{8x},$$

$$\tilde{T}_{n-1}(x) = \frac{4\tilde{v}_n(x) + \tilde{v}_{n-2}(x) - 2x^2\tilde{v}_{n-2}(x)}{2x}.$$

Следовательно, имеем

$$-x^2\tilde{\omega}_n(k, x) + x(1-x^2)\tilde{\omega}'_n(k, x) =$$

$$= \left[-(n+1)x^2 + \frac{1}{2}(n+1) - 2(n-1)\alpha_k\right]\tilde{v}_n(x) +$$

$$= \left\{\alpha_k(n-1)x^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}(n+1) - \alpha_k(n-1)\right]\right\}\tilde{v}_{n-2}(x),$$

откуда и следует справедливость леммы 2.

Лемма 3. *Для любых натуральных $n \geqslant 2$ справедливо тождество*

$$(1-x^2)\tilde{\omega}''_n(k, x) - 3x\tilde{\omega}'_n(k, x) - \tilde{\omega}_n(k, x) =$$

$$= -(n+1)^2\tilde{v}_n(x) - \alpha_k(n-1)^2\tilde{v}_{n-2}(x). \tag{6}$$

Доказательство. Составим левую часть выражения (6). Имеем

$$(1-x^2)\tilde{\omega}_n''(k, x) - 3x\tilde{\omega}_n'(k, x) - \tilde{\omega}_n(kx) =$$
$$= (1-x^2)[\tilde{v}_n''(x) + \alpha_k\tilde{v}_{n-2}''(x)] - 3x[\tilde{v}_n'(x) + \alpha_k\tilde{v}_{n-2}'(x)] -$$
$$- [\tilde{v}_n(x) + \alpha_k\tilde{v}_{n-2}(x)] = (1-x^2)\tilde{v}_n''(x) - 3x\tilde{v}_n'(x) +$$
$$+ n(n+2)\tilde{v}_n(x) - n(n+2)\tilde{v}_n(x) + \alpha_k[(1-x^2)\tilde{v}_{n-2}''(x) -$$
$$- 3x\tilde{v}_{n-2}'(x)] + n(n+2)\tilde{v}_{n-2}(x) - \alpha_k n(n-2)\tilde{v}_{n-2}(x) -$$
$$- \tilde{v}_n(x) - \alpha_k\tilde{v}_{n-2}(x). \tag{7}$$

Но многочлены Чебышева второго рода $\tilde{v}_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\tilde{v}_n''(x) - 3x\tilde{v}_n'(x) + n(n+2)\tilde{v}_n(x) = 0. \tag{8}$$

Поэтому из (7) и (8) следует справедливость леммы 3.

Теорема. *Многочлены* $\tilde{\omega}_n(k, x)$, *ортогональные на* $[-1, 1]$ *по весу* $p(x) = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1+k^2x^2)^{-1}$ $(|k| < \infty)$, *для всех натуральных* $n \geqslant 3$ *удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$A_n(x)y'' + B_n(x)y' + C_n(x)y = 0, \tag{9}$$

где

$$A_n(x) = -\delta_n x^4 + (\delta_n - \tau_n)x^2 + \tau_n,$$
$$B_n(x) = -x(\delta_n x^2 + 3\tau_n + 2\delta_n),$$
$$C_n(x) = n^2\delta_n x^2 + n(n+2)\tau_n + 8\psi_n\delta_n,$$
$$\tau_n = 4\psi_n(1-\mu),\ \delta_n = (2\mu - 1)n,\ y = \tilde{\omega}_n(k, x).$$

Доказательство. Из лемм 2, 3 и формулы (2) для всех натуральных $n \geqslant 3$ получаем совместную систему тождеств

$$(1-x^2)\tilde{\omega}_n''(k, x) - 3x\tilde{\omega}_n'(k, x) - \tilde{\omega}_n(k, x) =$$
$$= -(n+1)^2\tilde{v}_n(x) - \alpha_k(n-1)^2\tilde{v}_{n-2}(x),$$
$$-x^2\tilde{\omega}_n(k, x) + x(1-x^2)\tilde{\omega}_n'(k, x) = F_{1,n}\tilde{v}_n(x) + F_{2,n}\tilde{v}_{n-2}(x),$$
$$\tilde{\omega}_n(k, x) = \tilde{v}_n(x) + \alpha_k\tilde{v}_{n-2}(x).$$

Результатом исключения (или условием совместности) из системы $\tilde{v}_n(x)$ и $\tilde{v}_{n-2}(x)$ получим, что многочлены $\tilde{\omega}_n(k, x)$ тождественно удовлетворяют дифференциальному уравнению, записанному в форме равенства нулю определителя третьего порядка, поэтому имеем

$$(1-x^2)(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})\tilde{\omega}_n''(k,x)-$$
$$-[3x(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})+4n\alpha_k x(1-x^2)]\tilde{\omega}_n'(k,x)-$$
$$-[(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})-\alpha_k(n-1)^2x^2+\alpha_k(n+1)^2x^2-(n+1)^2F_{2,n}+$$
$$+\alpha_k(n-1)^2F_{1,n}]\tilde{\omega}_n(k,x)=0.$$

Положим

$$A_n(x)=2(1-x^2)(F_{2,n}-F_{1,n}),$$
$$B_n(x)=-2[3x(F_{2,n}-F_{1,n})+4n\alpha_k x(1-x^2)],$$
$$C_n(x)=-2[F_{2,n}-F_{1,n})-\alpha_k(n-1)^2x^2+\alpha_k(n+1)^2x^2-$$
$$-(n+1)^2F_{2,n}+\alpha_k(n-1)^2F_{1,n}].$$

Пользуясь обозначениями леммы 2 и настоящей теоремы, упростим коэффициенты $A_n(x)$, $B_n(x)$ и $C_n(x)$. Имеем

$$A_n(x)=2(1-x^2)(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})=$$
$$=2(1-x^2)[\alpha_k(n-1)x^2+\psi_n+\alpha_k(n+1)x^2-4\psi_n\alpha_k]=$$
$$=(1-x^2)[n(2\mu-1)x^2+4\psi_n(1-\mu)]=(1-x^2)(\delta_n x^2+\tau_n)=$$
$$=-\delta_n x^4+(\delta_n-\tau_n)x^2+\tau_n;$$
$$B_n(x)=-6x(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})-8n\alpha_k x(1-x^2)=$$
$$=-6x\left[\frac{1}{2}nx^2(2\mu-1)+2\psi_n(1-\mu)-2nx(1-x^2)(2\mu-1)\right]=$$
$$=x(\delta_n x^2+3\tau_n+2\delta_n).$$

$$C_n(x)=-2(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})+2\alpha_k(n-1)^2x^2-2\alpha_k(n+1)^2x^2+$$
$$+2(n+1)^2F_{2,n}-2\alpha_k(n-1)^2F_{1,n}=-2(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})+$$
$$+8n\alpha_k x^2+2(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})+2n^2(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})+$$
$$+4n(F_{2,n}-\alpha_k F_{1,n})=2n(2\mu-1)x^2+2n^2\left[\frac{1}{2}nx^2(2\mu-1)+2\psi_n(1-\mu)\right]+$$
$$+4n\left[-\frac{1}{2}x^2(2\mu-1)+\psi_n+\psi_n(2\mu-1)\right]=2\delta_n x^2+n^2\delta_n x^2+$$
$$+n^2\tau_n-2\delta_n x^2+4n\psi_n+4\psi_n\delta_n=n^2\delta_n x^2+n(n+2)\tau_n+8\psi_n\delta_n.$$

Положив $\tilde{\omega}_n(k,x)=y$, завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Непосредственной проверкой легко показывается, что многочлены $\tilde{\omega}_0(k,x)$, $\tilde{\omega}_1(k,x)$ и $\tilde{\omega}_2(k,x)$ также удовлетворяют уравнению (9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Цветков В. П. Об одном классе ортогональных многочленов. Сб. аспирантск. работ Казанск. ун-та. Точные науки, Матем., вып. 1, 1970, с. 167—177.
2. Гриншпун З. С. Об одном классе ортогональных многочленов. Вестник ЛГУ, сер. матем., мех. и астр., № 19, вып. 4, 1966, с. 147—149.

г. Пенза

Поступила
23 VIII 1973

А. П. Южаков. О вычислении коэффициентов псевдополинома Вейерштрасса

(аннотация статьи, принятой к печати)

Пусть $f(w, z)$ — голоморфная функция переменных $w \in C^1$, $s = (z_1, \dots, z_n) \in C^n$ в окрестности точки $(0, O) = (0; 0, \dots, 0) \in C^{n+1}$, $f(0, O) = 0$, $\frac{\partial^k f(0, O)}{\partial w^k} = 0$, $k = 1, \dots, m-1$, $\frac{\partial^m f(0, O)}{\partial w^m} \neq 0$. Показывается, что коэффициенты псевдополинома $w^m + a_1(z) w^{m-1} + \dots + a_m(z)$, определяемого подготовительной теоремой Вейерштрасса для функции f в точке $(0, O)$, выражаются формулами

$$a_k(z) = -\frac{1}{k}[s_k(z) + a_1(z) s_{k-1}(z) + \dots + a_{k-1}(z) s_1(t)],$$

$$s_k(t) \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^r k}{(mr-k)!\, r} \left. \frac{\partial^{mr-k} g^r(w, z)}{\partial w^{mr-k}} \right|_{w=0},$$

$k = 1, \dots, m$, где $g(w, z) = f(w, z) \cdot m! \Big/ \frac{\partial^m f(0, O)}{\partial w^m} - w^m$. (Работа поступила в журнал „Математика“ 25 V 1976.)