О. А. Ладыженская, Об аттракторах нелинейных эволюционных задач с диссипацией, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 152, 72–85

О.А.Ладыженская

ОБ АТТРАКТОРАХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ С ДИССИПАЦИЕЙ

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений (во всей статье я буду обсуждать лишь нелинейные уравнения) давно была понята плодотворность идеи нахождения и изучения ω - предельных множеств для отдельных траекторий $\gamma(x)$ (где x есть точка фазового пространства X) или для той или иной совокупности траекторий $\{\gamma(B), B \subseteq X\}$. Для нелинейных же уравнений в частных производных эта идея не была принята во внимание, ибо казалось, что ее содержательная реализация вряд ли возможна ввиду сложности возникающих при этом проблем. Для них выделяли лишь частные ситуации, когда все решения при $t \to \infty$ стремились к нулю (или, общее, к стационарному решению, о котором заранее известно, что оно единственно, или к какому-либо другому конкретному решению). В 60-х годах был оправдан принцип линеаризации в окрестности стационарного и периодического решения для уравнений Навье-Стокса и более общего объекта - абстрактных уравнений параболического типа и доказаны аналоги теорем Адамара-Хопфа ([I], [2] и др.). Это давало информацию о поведении решений в малых окрестностях указанных решений. Здесь нет места перечислять другие результаты этого характера. Как правило, они относились к тому или иному конкретному уравнению, причем при таких ограничениях на параметры и другие данные задачи, которые приводили к сравнительно простой ситуации.

Насколько мне известно, я первая решилась нарушить установившуюся традицию, начав изучать ω - предельные множества для $\gamma(B)$, где B - любое ограниченное множество в X, для некоторого класса начально-краевых задач для нелинейных уравнений в частных производных ([3]). В качестве основного, наиболее интересного для меня объекта, я выбрала уравнения Навье-Стокса в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ при первом краевом условии или в прямоугольнике при условиях периодичности по пространственным переменным, при произвольных числах Рейнольдса (т.е. без предположения о малости каких-либо характеристик задачи). Выбор двумерного случая объясняется тем, что только для него удалось доказать глобальную однозначную разрешимость указанных задач ([4] , [5]). Можно было бы взять и трехмерную задачу, обладающую вращательной симметрией. Относительно нее мне тоже удалось доказать глобальную однозначную разрешимость [4] , [5] , и для нее справедливы все результаты работы [3] . В этой работе [3] указано, что все ее результаты и методы их доказательства применимы к широкому классу других диссипативных систем параболического типа. Определяющее их свойство, которое самым существенным образом было использовано мною в работе [3] , - это компактность разрешающего оператора V_t при $t>0$. Наличие для рассмотренных в [3] задач ограниченного множества в фазовом пространстве X , поглощающего все траектории, не так существенно. Оно несколько облегчает исследование, но может быть заменено и более слабыми предположениями относительно V_t .

В [3] я доказала наличие глобального аттрактора $\mathcal{M}$ (а не просто какого-то аттрактора, как цитируется в ряде последующих работ), т.е. множества,которое равномерно притягивает любое ограниченно множество B из X . Множество $\mathcal{M}$ является ω-предельным множеством для всего фазового пространства X . Оно не содержит в себе ничего "лишнего" (т.е. оно минимально среди всех множеств, которые равномерно притягивают любое ограниченное множество B из X), оно инвариантно, компактно и связно (последнее мною не отмечено в [3] , но доказывается элементарно). Построено $\mathcal{M}$ так:

$$\mathcal{M} = \bigcap_{t\geq 0} V_t(B_0), \tag{I}$$

где B_0 - замкнутый шар, втягивающий в себя все траектории.

Как акцентировано в [3] , именно множество $\mathcal{M}$ и должно быть главным объектом изучения при построении теории турбулентности. Именно оно и наблюдаемо в экспериментах (другие точки X "забиваются" потоком). Любая его конечная окрестность равномерно притягивается к $\mathcal{M}$ при $t\to\infty$. $\mathcal{M}$ состоит из тех и только тех (полных) траекторий, которые лежат в ограниченных множествах.

Все перечисленные свойства $\mathcal{M}$ доказываются из "общих соображений" после того, как доказано, что операторы V_t , $t>0$, вполне непрерывны и $V_t(B_0)$- замкнуты. Более глубокими свойствами рассмотренных задач, потребовавшими аналитических рассмотрений, являются следующие: а) непрерывная полугруппа V_t , $t\in\mathbb{R}^+$, на $\mathcal{M}$ расширяется до непрерывной группы V_t , $t\in\mathbb{R}$; имеет место непрерывная зависимость траекторий группы $v(t)=V_t(v(0))$, $t\in\mathbb{R}$ от начальных данных $v(0)$ (в сторону $t\geq 0$ и $t\leq 0$); в) динамика V_t , $t\in\mathbb{R}$, на $\mathcal{M}$ имеет "конечномерный характер в следующем смысле: по числовым параметрам, характеризующим область Ω и величину внешней силы f и по коэффициенту вязкости ν указывается целое число N такое, что любая полная траектория $v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, однозначно восстанавливается по своей ортогональной проекции на некоторое фиксированное эвклидово подпространство $P_N X$ размерности N пространства X. Если при этом $P_N v(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является квазипериодической (в частности, постоянной или периодической функцией), то таковой же будет и $v(t)$.

Как показано в моей работе [6], факты, установленные мною в процессе доказательства свойства в), гарантируют конечность $dim_H \mathcal{M}$ – хаусдорфовой размерности $\mathcal{M}$. Величина $dim_H \mathcal{M}$, в свою очередь, мажорирует число квазипериодов любого возможного квазипериодического решения задачи (см. [7]).

Вопрос о $dim_H \mathcal{M}$ в первой работе [3] не рассматривался. Он был впервые поднят в работе [7] Малле-Парэ. В ней доказана теорема о конечности dim_H компактных множеств, инвариантных относительно нелинейного преобразования, дифференциалы которого обладают некоторым "сжимающим" свойством. Условия этой теоремы выполняются для рассмотренных мною задач (для этого все нужные аналитические факты о линеаризованных задачах доказаны в [3], [2]), если только потребовать некоторую дополнительную гладкость всех данных задачи. В [6] я показываю конечность $dim_H \mathcal{M}$ более просто и без привлечения дифференциалов преобразований V_t. Стоит упомянуть, что сам Малле-Парэ не проверяет выполнимость условий его теоремы для уравнений Навье-Стокса и указывает, что это сделано в моей работе [3] (в этом же месте он упоминает и работу Фойаша и Проди [8]; но в ней изучается совсем другой, более простой, хотя и интересный вопрос о конечномерности множества стационарных решений уравнений Навье-Стокса). После работы [7] появилось много работ, в которых даются оценки числа $dim_H \mathcal{M}$ ([9] – [13] и др.). Наиболее хорошие оценки получены в работе М.И.Вишика и А.В. Бабина [12] с использованием теоремы, доказанной Дуади и Остерле́ [13].

Все, что было сделано в [3], без труда переносится на квазилинейные параболические уравнения, для которых доказана глобальная однозначная разрешимость и для которых есть в том или ином смысле "притягивающее" ограниченное множество. На сегодня имеется уже очень много работ, посвященных таким уравнениям. В большинстве из них изучаются уравнения вида $u_t - \Delta u + f(u) = h(x)$. Они обладают одним дополнительным важным свойством – для них имеется функция Ляпунова. Это позволяет полнее исследовать глобальный аттрактор $\mathcal{M}$.

За неимением места укажем лишь на книгу Хенри [14], в которой подытожены исследования самого автора и многих других, и работы М.И.Вишика и А.А.Бабина ([II] ,[I2] и др.).

Качественно другой характер имеет динамика, порождаемая гиперболическими уравнениями. Для нее разрешающий оператор V_t не является "сглаживающим" (вполне непрерывным) при $t>0$. Это существенно меняет дело и осложняет решение описанных выше проблем. Претендентом на глобальный аттрактор (ω-предельное множество для всего фазового пространства X, равномерно притягивающее ограниченные или хотя бы компактные множества) будет конечно, множество $\mathcal{M}$, построенное по формуле (I), если в системе имеется поглощающее ограниченное множество $B_0 = Cl[B_0]$ (заметим, что для гиперболических уравнений операторы V_t определены на всей оси t, и они образуют группу. Этот факт почему-то не отмечается и не используется большинством авторов по таким объектам. Из него, в частности, следует обратимость и непрерывность отображения V_t : $V_t^{-1} = V_{-t}$). Если же такого множества B_0 нет, то разумно ставить вопрос об ω - предельных множествах для ограниченных B, определив их равенством

$$\omega(B) = \bigcap_{t\geq 0} Cl_X [\gamma_t^+(B)], \tag{2}$$

где $\gamma_\tau^+(x) = \{y\in X : y = V_t(x), t\geq\tau\}$, а $\gamma_\tau^+(B) = \bigcup_{x\in B}\gamma_\tau^+(x)$. Под $\omega(X)$ в рамках данной статьи мы понимаем объединение $U\omega(B)$ по всем ограниченным $B\subset X$.

Я затрудняюсь сказать, кто первый начал изучение аттракторов для нелинейных гиперболических уравнений и получил для них какие-либо результаты общего характера. По имеющимся у меня сведениям (а они далеки от полноты) такие исследования начали проводится в Лефшецевском научном центре в Брауновском университете с конца 70-х годов (П.Массаттом, Дж.Хейлом и др.). Именно в нем было получено много интересных результатов по ω- предельным множествам для абстрактных дискретных и непрерывных полугрупп. В монографии Дж.Хейла [I5] подытожены результаты, полученные до 1976 года. В русском переводе имеются к ним дополнения автора. Насколько я поняла, основным источником задач, которые требовали обобщений результатов полученных для обыкновенных дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах на случай бесконечномерного фазового пространства, были обыкновенные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Они и внутренние ("чисто умозрительные", математические) потребности создания более полной и общей теории привели к формулировке, предложений, касающихся поведения траекторий при $t\to+\infty$ (или $n\to\infty$ для дискретных полугрупп), их исследованию и применению к проблемам нахождения стационарных и периодических режимов. Многие из этих теорем будут полезны и при изучении динамик, порождаемых различными классами нелинейных уравнений в частных производных. Примером тому могут служить работы П.Массатта и Дж.Хейла по нелинейным волновым уравнениям.

Я начала знакомиться с результатами по гиперболическим уравнениям с работ М.И.Вишика и А.В.Бабина. В них изучаются вопросы существования глобального аттрактора и его свойств для задачи

$$\ddot{v} + \varepsilon\dot{v} - \Delta v + f(v) = h(x), \quad h \in L_2(\Omega), \tag{3}$$

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0, \quad v\big|_{t=0} = \varphi, \quad \dot{v}\big|_{t=0} = \psi, \tag{4}$$

в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($\dot{v} = v_t$, $\ddot{v} = v_{tt}$). Хорошо известны достаточные условия, при которых задача (3), (4) глобально однозначно разрешима. Основное энергетическое соотношение для них имеет вид

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(y(t)) = -\varepsilon\int_\Omega \dot{v}^2(x,t)\,dx, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{L}(y) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}v_x^2 + \mathcal{F}(v) - hv\right]dx, \tag{6}$$

$y(t) = \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}$ - есть элемент фазового пространства X, $\mathcal{F}(v) = \int_0^v f(s)\,ds$; $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, в (5) есть траектория в X - решение $y(t) = \begin{bmatrix} v(t) \\ \dot{v}(t) \end{bmatrix}$ задачи (3), (4). Как доказано в моих работах начала 50-х годов, изложенных в монографии [16], хорошей шкалой пространств для линеаризованных уравнений (3) являются пространства $X_{s-1} = \mathcal{D}^s \times \mathcal{D}^{s-1}$, $s \geq 1$, где $\mathcal{D}^s$ есть область определения $s/2$ -ой степени самосопряженного оператора $(-\Delta)$ при нулевом краевом условии, а $\mathcal{D}^0 = L_2(\Omega)$ (подробный анализ этих пространств при всех $s \in \mathbb{R}$ имеется в ряде книг: [18] и др.). В частности, $X_0 = \mathcal{D}^1 \times \mathcal{D}^0 = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Эту же шкалу пространств обычно берут и при изучении уравнений (3) при нулевом краевом условии. Ниже $\|\cdot\|$ есть норма $L_2(\Omega)$.

Условия разрешимости для задачи (3), (4) в пространстве X_0, о которых мы говорили выше, состоят, во-первых, в том, чтобы $\mathcal{L}(y(t))$ мажорировала $\|y(t)\|_{X_0}$: $\|y(t)\|^2_{X_0} \leq c_1\mathcal{L}(y(t)) + c_2$. Это будет так, если для $\forall v \in \mathcal{D}^1$ справедливо неравенство

$$\int_\Omega \mathcal{F}(v(x))\,dx \geq -\varepsilon_1\|v_x\|^2 - c_3, \quad \varepsilon_1 \in [0, 1/2). \tag{7}$$

Для справедливости теоремы единственности в классе обобщенных решений y из $C((0,T);X_0)$ накладывается еще условие на порядок роста $\mathcal{F}(v)$ при $|v|\to\infty$. Например, для $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ достаточно потребовать, чтобы

$$|f(v)|\leqslant c_4(|v|^3+1) \quad \text{и, тем самым,} \quad |\mathcal{F}(v)|\leqslant c_5(|v|^4+1). \tag{8}$$

Условия (7), (8) гарантируют априорную оценку

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|y(t)\|^2_{X_0}+\varepsilon\int_0^\infty\|\dot v(t)\|^2dt\leqslant c_6(\|y(0)\|^2_{X_0}+1)^2, \tag{9}$$

а вместе с условием

$$|f'(v)|\leqslant c_7(|v|^2+1) \tag{10}$$

и однозначную глобальную разрешимость задачи (3), (4) в X_0 для случая областей Ω в $\mathbb{R}^3$. Для областей произвольной размерности n все делается аналогично. Поэтому ради бо́льшей наглядности и экономии места ограничусь случаем $n=3$. Характерным представителем уравнений (3) является уравнение (3) с

$$f(v)=cv^3+\mathcal{P}_2(v), \tag{11}$$

где $\mathcal{P}_2(v)$ – полином второго порядка, а $c>0$. На него мы и будем ориентироваться. Для него выполнены условия (7),(8), (10).

Для доказательства однозначной разрешимости задачи (3), (4) (равно как и более общих задач этого типа) в более хороших пространствах X_s, $s>0$, надо получать априорные оценки норм $\|y(t)\|_{X_s}$. Схема их получения та же, что и схема, разработанная мною для линейных задач (см. [16] и др.), причем начиная с некоторого s нелинейные члены становятся полностью подчиненными главным линейным членам. Для рассматриваемого здесь случая это так, начиная с $s=1$. А именно, для него справедлива оценка

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+}\|y(t)\|^2_{X_1}+\int_0^\infty\|\ddot v(t)\|^2dt\leqslant c_8(\|y(0)\|^2_{X_1}+1). \tag{12}$$

Для ее получения надо продифференцировать уравнение (3) по t, умножить обе части равенства на $\ddot v$ и результат проинтегрировать по Ω. Возникающий при этом нелинейный член $j(t)=\int_\Omega f'(v)\dot v\ddot v\,dx$ надо перенести в правую часть и мажорировать его величиной $\varepsilon/2\,\|\ddot v(t)\|^2+(2\varepsilon)^{-1}\|\dot v(t)\|^2\sup_{x\in\Omega}|f'(v(x,t))|^2$. Для оценки

$\sup_{x\in\Omega}|f'(v(x,t))|$ надо воспользоваться неравенством

$$\sup_{x\in\Omega}|v(x)|\leqslant\beta_1\|v_x\|^{1/2}_{L_6(\Omega)}\|v\|^{1/2}_{L_6(\Omega)}, \tag{13}$$

справедливым для любой $v \in \overset{\circ}{W}{}^1_6(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Впервые подобные мультипликативные неравенства были обнаружены независимо Гальярдо и мною ([19] и [4] , [5])(одно из них - оценка $\|v\|_{L_4(\Omega)}$ через $\|v_x\|^{1/2}\|v\|^{1/2}$ сыграло решающую роль в доказательстве глобальной однозначной разрешимости начально-краевых задач для двумерных уравнений Навье-Стокса, а другое - $\|v\|_{L_6(\Omega)} \leq \beta\|v_x\|$, в исследовании задачи (3), (4) с f из (II) и многих других задач математической физики).

Неравенство (I3), как и многие другие мультипликативные неравенства, можно вывести из неравенств, доказанных В.П.Ильиным [20] . Оно приведено в [21] , но без доказательства. Из него, известных неравенств С.Л.Соболева, неравенства Пуанкаре-Фридрихса , и доказанного мною в 50-м году ([22]) неравенства

$$\|v_{xx}\| \leq \beta_2\|\Delta v\|, \quad \forall v \in W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1 = \mathcal{D}^2 , \tag{I4}$$

легшего в основу построения и изучения пространств $\mathcal{D}^s$, следует, что

$$\sup_{x\in\Omega}|v(x)| \leq \beta_3\|\Delta v\|^{1/2}\|v_x\|^{1/2}, \quad \forall v \in \mathcal{D}^2. \tag{I5}$$

Собирая вместе все сказанное, получим оценку

$$|j(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|\ddot v(t)\|^2 + c_9(2\varepsilon)^{-1}\|\dot v(t)\|^2\left(\|\Delta v(t)\|^2\|v_x(t)\|^2 + 1\right). \tag{I6}$$

Если теперь с помощью (3) оценить $\|\Delta v\|$ через сумму норм $\|\cdot\|$ остальных членов и воспользоваться (9) и неравенством Гронуолла, то получим(I2).

Оценка (I2) получена в работе [23] , но при условии, что

$$|f'(v)| \leq c_{10}(|v|^{2-\delta} + 1) \tag{I7}$$

с каким-либо $\delta > 0$. В [23] есть еще некоторые ограничения "знакового" характера на $f(v)$ и $f'(v)$, но они, как легко видеть, излишни.

Однако основная трудность в построении и изучении ω-предельных множеств для (3), (4) не преодолевается приведенным мною ослаблением условий работы [23] для получения оценки (I2). Мало помогает и то, что задача (3), (4) однозначно разрешима в X_1 для всех $t \in \mathbb{R}$ (а не только для $t \in \mathbb{R}^+$), т.е. что разрешающие операторы V_t , $t \in \mathbb{R}$, определяющие решение по формуле $y(t) = V_t(y(0))$, составляют непрерывную группу на X_1 (а не полугруппу, как в задачах параболического типа). Новое качество задачи (3), (4) по сравнению с рассмотренными мною в [3] задачами параболического типа состоит в том, что операторы V_t только непрерывны в X_s (и даже хорошо дифференцируемы), но не вполне непрерывны. Потеря этого важного свойства существенно затрудняет выявление свойств ω - предельных множеств: их устойчивости и характера притяжения к ним траекторий и, тем более, равномерного притяжения к ним любых ограниченных множеств B . М.И.Вишик и А.В.Бабин ([23] и др.) преодолевают часть этих трудностей, используя тот факт, что функция $\mathcal{L}$ является "хорошей" функцией Ляпунова для задачи (3), (4). Это позволяет доказать, что ω - предельные множества для отдельных траекторий лежат в множестве Z всех стационарных решений. Выполнение дополнительных знаковых условий на $f(v)$ и $f'(v)$, о которых я упоминала выше, гарантирует ограниченность множества Z в X_0 и в X_1 . Предполагая дополнительно, что Z состоит из конечного числа точек $\{z_j\}_{j=1}^{m}$ и что соответствующие им линеаризованные стационарные задачи однозначно разрешимы, они проверяют возможность привлечения известной методики построения "входящих" и "исходящих усов Адамара" из точек z_j . Из "исходящих усов" $\mathcal{M}^{R}(z_j), j=1,\ldots,m$ и Z они составляют множество $\mathcal{A}$ и называют его "максимальным (X_1, X_0) аттрактором задачи (3), (4)". Они доказывают, что к $\mathcal{A}$ равномерно притягивается в метрике X_0 любое ограниченное в норме X_1 множество. Я не имею возможности перечислить здесь другие результаты, имеющиеся в работах Вишика и Бабина, отмечу лишь, что в их последней публикации [24] приведен эскиз доказательства весьма полезного для задачи (3), (4) факта, установленного французским математиком Аро. А именно, для нее имеется ограниченное поглощающее множество B_0 в пространстве X_0 . Оно определяется формулой

$$B_0 = \{ y \in X_0 : \Phi(y) \le 2 c_0 \delta_1^{-1} \}, \tag{18}$$

где $\Phi(y) = \mathcal{L}(y) + \eta(u,p)$, $0 < \eta \ll 1$. Числа δ_1, η и c_0 определяются известными в задаче величинами. Замечу, что для справедливости этого достаточно потребовать выполнения условия

$$\int_{\Omega} [-\beta v f(v) + \mathcal{F}(v)] dx \le c + \frac{1}{8} \| v_x \|^2 \qquad \text{при } \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \tag{19}$$

с каким-нибудь $\beta \geq 3/2$ и $c \in \mathbb{R}^+$. Условие (19) выполняется для $f(u)$ из (11). $V_t B_0$ замкнуты в X_0 и $V_t(B_0) \subset B_0$.

Наличие ограниченного поглощающего множества B_0 позволяет построить ω - предельное множество $\omega(X_0)$ для всего фазового пространства X_0 по формуле (1). Предположение

$$-\int_{\Omega} v(x) f(v(x))\,dx \le \varepsilon_2 \|v_x\|^2 + c, \quad \varepsilon_2 < 1, \quad \text{при} \quad \forall v \in \mathcal{D}^1, \tag{20}$$

вместе с (8), (10), как известно, гарантирует то, что Z. непусто и ограничено в X_0 и в X_1. Оно, очевидно, входит в $\omega(X_0)$. Ограниченность, замкнутость и инвариантность $\omega(X_0)$ следует из самой конструкции $\omega(X_0)$. Легко видеть, что $\omega(X_0)$ полностью характеризуется так:

ТЕОРЕМА I. $\omega(X_0)$ состоит из тех и только тех точек $y_0 \in X_0$, для которых полная траектория $y(x) = V_t(y_0)$, $t \in R$, лежит в каком-нибудь ограниченном множестве X_0.

Действительно, пусть множество γ точек полной траектории $y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, лежит в ограниченном множестве B. Ясно, что $V_t(\gamma) = \gamma$, а с другой стороны, любое ограниченное множество (в том числе и γ), начиная с некоторого $t_0(\gamma)$, входит (и остается) в B_0. Следовательно, $\gamma \subset B_0$ и по самой конструкции видно, что $\gamma \subset \omega(X_0)$. С другой стороны, как сказано выше, $\omega(X_0)$ состоит из полных траекторий.

Нетрудно доказать также, что ω - предельное (в топологии X_0) множество $\omega(y(0))$ для любой траектории $\gamma(y_0)$ лежит в Z. Более того, ω - предельное множество для $\gamma(y_0)$ в слабой топологии X_0 непусто и тоже лежит в Z. Если $\gamma(y_0) \subset \omega(X_0)$, то эти же факты верны для ее α - предельных множеств.

Однако, главные вопросы - о том, приближаются ли (при $t \to \infty$) в метрике X_0 к $\omega(X_0)$ отдельные траектории $y(t) = V_t(y(0))$, множества $V_t(K)$, где K - компакт, и самый важный вопрос - множества $V_t(B)$, где B - произвольное ограниченное множество в X_0, еще впереди. Они решены (в положительном смысле) в работе А.Аро [25] и работе Дж.Хейла [I7] в предположении, что выполнено условие (I7) с $\delta > 0$. Методы их доказательства,по-существу, идентичны, только в [I7] используется уже отработанная Дж.Хейлом и его коллегами (Массаттом и Куперманом) теория ω - предельных множеств для "условно уплотняющих" полугрупп, а Аро непосредственно проводит все нужные для данного случая рассуждения. Центральным моментом для этого является представление операторов V_t в виде суммы

$$V_t = S_t + U_t, \quad t \in \mathbb{R}^+, \tag{21}$$

где S_t - строго сжимающая линейная полугруппа, а U_t, $t \in \mathbb{R}^+$, - семейство вполне непрерывных операторов. Представление V_t в виде суммы естественно продиктовано задачей (3), (4). А именно: S_t есть линейная полугруппа, отвечающая задаче

$$\ddot{w}+\varepsilon\dot{w}-\Delta w=0,\quad w\big|_{\partial\Omega}=0,\quad w\big|_{t=0}=\varphi,\ \dot{w}\big|_{t=0}=\psi,\tag{22}$$

т.е. $\begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t)\end{bmatrix}=S_t\left(\begin{bmatrix} w(0) \\ \dot{w}(0)\end{bmatrix}\right)$, где $w(t)$ есть решение этой задачи, а $\begin{bmatrix} w(0) \\ \dot{w}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varphi \\ \psi\end{bmatrix}$. Первая компонента $u(t)$ вектор-функции

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ \dot{u}(t)\end{bmatrix}\equiv U_t\left(\begin{bmatrix} v(0) \\ \dot{v}(0)\end{bmatrix}\right)=\int_0^t S_{t-\tau}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ -f(v(\tau))+h\end{bmatrix}\right)d\tau\tag{23}$$

есть решение линейной неоднородной задачи

$$\ddot{u}+\varepsilon\dot{u}-\Delta u=-f(v)+h,\quad u\big|_{\partial\Omega}=0,\quad u\big|_{t=0}=0,\ \dot{u}\big|_{t=0}=0,\tag{24}$$

в которой v под знаком $f(\cdot)$ есть решение исследуемой задачи (3), (4). Так что

$$y(t)=V_t(y(0))=S_t(y(0))+U_t(y(0))\tag{25}$$

(заметим, что $U_t,\ t\in\mathbb{R}^+$, не образуют полугруппу). Свойства линейных задач (22) и (23) в шкале пространств X_s изучаются ровно так же, как это было сделано мною давно для случая $\varepsilon=0$. Для данных целей нужно знать, что:

$$\left\| S_t\right\|_{\mathcal{L}(X_s,X_s)}\leqslant c_s e^{-\alpha t}.\qquad \text{с некоторым } \alpha>0\tag{26}$$

при $\forall s\in\mathbb{R}$, и то, как извлекаются свойства гладкости для решений неоднородной задачи

$$\ddot{u}+\varepsilon\dot{u}-\Delta u=g(t),\quad u\big|_{\partial\Omega}=0,\quad u\big|_{t=0}=0,\ \dot{u}\big|_{t=0}=0,\tag{27}$$

с повышением гладкости g по x или t (повышение гладкости по x надо вести по шкале $\mathcal{D}^s$, $s\in\mathbb{R}$, и знать теоремы вложения $L_q(\Omega)$ в $\mathcal{D}^s$, $s<0$). Именно это и позволило авторам [17], [25] доказать, что $U_t,\ t\geqslant 0$, вполне непрерывны, если (17) выполняется с $\delta>0$. В работе Дж.Хейла и Ставракакиса [26] утверждается большее – что U_t вполне непрерывны и при $\delta=0$. Но тут, мне кажется, они допустили оплошность. Ссылаясь на мои результаты по линейным задачам, не заметили, что применяют их неверно. А именно, у них роль $g(t)$ в (27) играет функция $-f(v(t))+h$, где $v(t)$ есть решение задачи (3), (4), принадлежащее $C(\mathbb{R}^+,\mathcal{D}^1)$. Если бы $\frac{\partial g}{\partial t}$ принадлежала $L_1(0,T;L_2(\Omega))$, то u принадлежала бы $C(0,T;\mathcal{D}^2)$. Но $\frac{\partial g(t)}{\partial t}=f'(v(t))\,\dot{v}(t)\notin$ $\notin L_2(\Omega)$ и потому нельзя утверждать, что $v(t)\in\mathcal{D}^2$ (т.е. имеется желаемое увеличение гладкости).

Итак, мне кажется, что вопрос о полной непрерывности U_t

в X_0 для случая $\delta=0$ остается открытым, а тем самым остаются нерешенными и вопросы о притяжении к $\omega(X_0)$ в норме X_0 различных множеств из X_0 .

Однако, если вместо фазового пространства X_0 взять пространство X_1 , то в нем операторы $\mathcal{U}_t, t\geq 0$, будут вполне непрерывными и при $\delta=0$. Действительно, в данном случае исследуемые решения v задачи (3), (4) будут элементами из $C_b(R^+; \mathcal{D}^2)$, и этого достаточно, чтобы заключить, что соответствующие им решения u будут элементами $C_b(R^+; \mathcal{D}^3)$. При этом, конечно, надо потребовать на единицу большую гладкость всех данных задачи и выполнения необходимого условия согласования: $-f(v(t))+h\in$ $\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Найти заранее поглощающее множество B_0 и хорошую функцию Ляпунова для фазового пространства X_1 мне не удалось. Не имея этих исходных фактов, привлеку теорему 2.I из работы [26] , о которой сказано, что она фактически доказана Массаттом. Она следующая:

ТЕОРЕМА 2. (Массатта) Пусть операторы $V_t, t\in R^+$, образуют непрерывную в X полугруппу и представимы в виде

$$V_t = S_t + \mathcal{U}_t ,$$

где S_t – линейная непрерывная полугруппа в X , удовлетворяющая условию (26) при $X_s=X$, а $\mathcal{U}_t$ – вполне непрерывны в X , при $t\geq 0$. Пусть, далее, орбиты $\gamma^+(B)$ ограниченных в X множеств B являются ограниченными в X множествами и $V_t, t\in R^+$, является точечно диссипативной (т.е. имеется ограниченное в X множество $\widetilde{B}$, которое притягивает любую точку $y\in X$: $V_t(y) \xrightarrow{X} \widetilde{B}$ при $t\to+\infty$).

Тогда для $V_t, t\in R^+$, в X имеется компактный связный аттрактор $\mathcal{I}$ (т.е. $V_t(\mathcal{I})=\mathcal{I}$, и $\mathcal{I}$ равномерно притягивает в норме X любое ограниченное множество).

В моей терминологии $\mathcal{I}$ есть глобальный аттрактор. Проверим, что все условия этой теоремы выполнены для задачи (3), (4), если в качестве фазового пространства взять X_1 и предположить, что $f(v)$ удовлетворяет требованиям (7), (8), (10), (20), а также требованиям

$$\operatorname*{vrai\,max}_{v\in I} |f''(v)| < \infty \qquad \text{для } \forall I\subset R , \tag{28}$$

и

$$f(v) - h\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \qquad \text{при } \forall v\in \mathcal{D}^2.$$

. Действительно, известными способами доказывается, что Z есть компакт в X_1 (Z ограничено в X_2), а для $\mathcal{U}_t(y(0))$ из (23) при $y\in C_b(R^+; X_1)$ справедлива оценка

$$\sup_{t\in R^+}\| U_t(y(0))\|_{X_2} \leq C\left(\sup_{t\in R^+}\|y(t)\|_{X_1}\right), \tag{29}$$

где $C(\cdot)$ есть ограниченная на R^+ функция. Для самого $y(t)$ справедлива оценка (12). Ввиду этого каждая полутраектория $\gamma^+(y(0))$ является прекомпактом в X_1, и потому ее ω - предельное множество $\omega(y(0))$ является связным компактом в X_1, и $dist_{X_1}\{y(t);\omega(y(0))\}\to 0$ при $t\to\infty$. Отсюда и монотонного убывания функции $\mathcal{L}(y(t))$ следует, что $\mathcal{L}\big|_{\omega(y(0))} = \lim\limits_{t\to\infty}\mathcal{L}(y(t)) = const$, и потому $\omega(y(0))\subset Z$ (см.(5)). Таким образом, каждая точка $y\in X_1$ притягивается в норме X_1 к Z, т.е. в качестве $\tilde{B}$ можно взять Z. Итак, я проверила все условия теоремы 2. Из нее и данных выше оценок легко выводятся следующие заключения: для траекторий, лежащих в $\mathcal{J}$, справедливо представление

$$y(t) = \int\limits_{-\infty}^{t} S_{t-\tau}\left(\begin{bmatrix}0\\ -f(v(\tau))+h\end{bmatrix}\right)d\tau, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{30}$$

Если полная траектория $\gamma(y(0))$ лежит в каком-нибудь ограниченном в X_1 множестве, то она принадлежит $\mathcal{J}$. $\mathcal{J}$ является ограниченным в X_2 множеством. Для каждой $\gamma(y(0))\subset\mathcal{J}$ существует α - предельное множество $\alpha(y(0))$; оно связно и принадлежит Z. Если Z конечно, то $\exists \lim\limits_{t\to\pm\infty} {}_{X_1}\, y(t) = z^{\pm}\in Z$ для $\gamma(y(0))\subset\mathcal{J}$.

Подытожим сделанное в виде теоремы:

ТЕОРЕМА 3. Пусть для задачи (3), (4) выполнены условия (7), (8), (10),(20),(28)и $\partial\Omega\subset C^3$. Тогда для нее существует глобальный аттрактор $\mathcal{J}$ в фазовом пространстве X_1. Он является инвариантным, компактным, связным множеством в X_1, ограниченным в X_2, равномерно притягивающим в норме X_1 при $t\to\infty$ любое ограниченное в X_1 множество. $\mathcal{J}$ состоит из тех и только тех $\gamma(y(0))$, которые лежат в ограниченных множествах X_1. Любая $y(t)\in\mathcal{J}$ стремится к Z при $t\to\pm\infty$.

Можно доказать, что $\mathcal{J}$ имеет конечную хаусдорфову размерность.

Литература

I. Ю д о в и ч В.И. Математическая теория устойчивости течений жидкости. - Докторская диссертация. Москва, институт проблем механики АН СССР, 1972.

2. Л а д ы ж е н с к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А. О принципе линеаризации и инвариантных многообразиях для задач магнитной гидродинамики. - Зап.научн.семин.ЛОМИ, I973, т.38, с. 46-93.

3. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О динамической системе, порождаемой уравнениями Навье-Стокса. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I972,т. 27, с.9I-II4.

4. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Решение "в целом" краевой задачи для уравнений Навье-Стокса в случае двух пространственных переменных. - ДАН СССР, I958, т.I23, с.427-429.

5. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. I-ое издание, М., I96I; 2-ое издание, М., I970.

6. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье-Стокса и других диссипативных систем. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I982, т.II5, с.I37-I55.

7. M a l l e t - P a r e t J. Negatively invariant sets of compact maps and an extension of a theorem of Cartwright. - J.Diff.eq.s, 1976, v.22, p.331-348.

8. F o i a s C., P r o d i G. Sur le comportement global des solutions nonstationares des equations de Navier-Stokes en dimension 2. - Rend.Semin.Math.Univ.di Padova, 1967, v.39, p.1-34.

9. F o i a s C., T e m a m R. Some analytic and geometric properties of the solutions of the evolution Navier-Stokes equations. - J.Math.Pure Appl., 1979, v.58, fasc.3, p.339-368.

I0.И л ь я ш е н к о Ю.С. Слабо сжимающие системы и аттракторы галеркинских приближений уравнений Навье-Стокса. - УМН, I98I, т.36, в.3, с.243-244.

II.Б а б и н А.В., В и ш и к М.И. Аттракторы системы Навье-Стокса и параболических уравнений и оценка их размерности. - Зап.науч.семин.ЛОМИ, I982, т.II5, с.I37-I55.

I2.Б а б и н А.В., В и ш и к М.И. Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности. - УМН, I983, т.38, в.4, с.I33-I87.

I3.D o u a d y A., O e s t e r l é J. Dimension de Hausdorff des attracteurs.-C.R.Acad.Sci.,1980,v.290,p.1135-1138.

I4. Х е н р и Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. - Перевод с англ., М., "Мир", I985.

I5. Х е й л Дж. Теория функционально-дифференциальных уравне-

ний. – Перевод с англ., "Мир", 1984.
16. Л а д ы ж е н с к а я О.А. Смешанная задача для гиперболических уравнений, М., Гостехиздат, 1953.
17. H a l e J.K. Asymptotic behavior and dynamics in infinite dimensions. – Nonlinear Diff.Equations. Res.Notes in Math. (Pittman), 1985, v.132, p.1-42.
18. L i o n s J.L., M a g e n e s E. Problèmes aux limites non homogènes et applications, vol.1, Dunod, Paris, 1968.
19. G a g l i a r d o E. Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. – Ricerche Mat., 1958, v.7, N 1, p.102-137.
20. И л ь и н В.П. Некоторые неравенства в функциональных пространствах и их применение к исследованию сходимости вариационных методов. – Труды МИАН им.В.А.Стеклова, 1959, т.53, с. 64–127.
21. Л а д ы ж е н с к а я О.А., С о л о н н и к о в В.А., У р а л ь ц е в а Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., "Наука", 1967.
22. Л а д ы ж е н с к а я О.А. О замыкании эллиптического оператора. – ДАН СССР, 1951, т.79, № 5, с.723-725.
23. B a b i n A.V., V i s h i k M.I. Regular attractors of semigroups and evolution equations. – J.Math.pures et appl., 1983, v.62, Fas.4, p.441-496.
24. Б а б и н А.В., В и ш и к М.И. Максимальные аттракторы полугрупп, соответствующих эволюционным дифференциальным уравнениям. – Мат.сб., 1985, т.126(168), № 3, с.397–419.
25. H a r a u x A. Two remarks on hyperbolic dissipative problems. – Expose au séminaire Brezis-Lions, Collége de France, Preprint, 1984, N 85029, p.1-19.
26. H a l e J a c k K., S t a v r a k a k i s N. Limiting behaviour of linearly damped hyperbolic equations. – Brown University Providence, preprint 1986, LCDS = 86-6, p.1-38.

Ladyzhenskaya O.A. On the attractors of nonlinear evolution problems.

The existence of a compact connected global attractor in the space $X = W_2^2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ for the problem $u_{tt} + \varepsilon u_t - \Delta u + f(u) = h(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, with cubical growth of $f(u)$ is prooved.