М. А. Вашковьяк, С. Н. Вашковьяк, Н. В. Емельянов, Единое представление вековой части возмущающей функции взаимного притяжения спутников планеты, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2012, 003

https://www.mathnet.ru/ipmp21


Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н.,
Емельянов Н.В.

# Единое представление вековой части возмущающей функции взаимного притяжения спутников планеты

***Рекомендуемая форма библиографической ссылки:*** Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н., Емельянов Н.В. Единое представление вековой части возмущающей функции взаимного притяжения спутников планеты // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2012. № 3. 30 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2012-3

**ОРДЕНА ЛЕНИНА**
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ имени М.В. КЕЛДЫША**
**РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК**

**М.А. Вашковьяк, С.Н. Вашковьяк, Н.В. Емельянов**

# ЕДИНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ВЗАИМНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТЫ

**Москва**
**2012**

УДК 521.14

**М.А.Вашковьяк[1], С.Н.Вашковьяк[2], Н.В.Емельянов[2,3]**

[1] *Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН*
(vashkov@keldysh.ru).

[2] *Московский Государственный университет им. М.В. Ломоносова,*

*Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга*

(vashkov@sai.msu.ru), (emelia@sai.msu.ru).

[3] *Парижская обсерватория, Институт небесной механики и вычисления эфемерид.*

# ЕДИНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ ВЗАИМНОГО ПРИТЯЖЕНИЯ СПУТНИКОВ ПЛАНЕТЫ

Препринт Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, М., 2012, № 3
(http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_03.pdf).

***АННОТАЦИЯ.*** В работе предложено специальное представление вековой части возмущающей функции взаимного притяжения спутников. В отличие от известных оно имеет единую аналитическую форму для любого соотношения между большими полуосями орбит возмущаемого и возмущающего спутников. Полученное выражение представляет собой частичную сумму степенного ряда по малым эксцентриситетам и плането-экваториальным наклонениям спутниковых орбит. Эта сумма содержит слагаемые до четвертой степени включительно относительно указанных малых параметров. Проведено сопоставление предложенного и одного из известных разложений вековой части возмущающей функции.

Работа выполнена при содействии программы поддержки научных школ.

***Ключевые слова:*** взаимное притяжение спутников, вековые возмущения, осредненная возмущающая функция.

**M.A. Vashkov'yak[1], S.N. Vashkov'yak[2], N.V. Emelyanov[2]**

[1] *Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS*
(vashkov@keldysh.ru).

[2] *Lomonosov Moscow State University, Sternberg State Astronomical Institute*
(vashkov@sai.msu.ru), (emelia@sai.msu.ru).

[3] L'observatoire de Paris, Institut de Mecanique Celeste et de Calcul des Ephemerides.

# UNITED PRESENTATION FOR SECULAR PART OF PERTURBING FUNCTION OF MUTUAL ATTRACTION OF PLANETARY SATELLITES

Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics, RAS, Moscow, 2012, № 3
(http://www.keldysh.ru/papers/2012/prep2012_03.pdf).

***ABSTRACT.*** The special presentation for secular part of perturbing function of mutual satellite attraction is proposed. Unlike from known presentation it has united analytical form for any relation between semi-major axis of orbits of perturbed satellite and of perturbing one. The formula received is a partial sum of power row relative of small eccentricities and planet-equatorial inclinations of satellite orbits. This sum contains addendum up to fourth power inclusive relative small parameters above. The comparison of development proposed for secular part of perturbing function and known one is made.

The study was supported by Scientific Schools Support Program.

***Keywords:*** mutual satellite attraction, secular perturbations, averaged perturbing function.

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

# ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Разработка аналитических теорий движения планет и спутников была и остается актуальной задачей небесной механики. Возможность получения приближенного аналитического решения уравнений движения системы небесных тел обусловлена наличием ряда малых параметров в конфигурациях орбит. В задаче о движении больших планет и в задачах о движении главных спутников Юпитера, Сатурна и Урана основой является модель возмущенных кеплеровских движений нескольких малых тел вокруг главного притягивающего центра по орбитам с малыми эксцентриситетами и малыми взаимными наклонами. Основная проблема состоит в учете взаимного притяжения малых тел, поскольку для главных спутников возмущения от нецентральности гравитационного поля планеты и возмущения, обусловленные притяжением Солнца, оказываются на несколько порядков меньшими. Наибольший интерес представляют вековые возмущения элементов орбит. Теория вековых возмущений описывает эволюцию орбит на больших интервалах времени и служит нулевым приближением при построении более точных теорий движения планет и спутников. Вековые возмущения получаются в первую очередь из вековой части разложения возмущающей функции, не зависящей от средних долгот тел. Аналитический метод исследования вековых возмущений предполагает отсутствие соизмеримостей низших порядков средних движений спутников. Классики небесной механики Лагранж и Лаплас построили теорию возмущений, обусловленных вековой частью возмущающей функции, в которой не используется факт малости масс тел по сравнению с массой центрального притягивающего центра. Платой за такое обобщение оказалась необходимость разложения возмущающей функции по степеням малых эксцентриситетов и малых взаимных наклонов орбит и отбрасывания членов четвертой и более высоких степеней. Для полученных таким образом уравнений движения больших планет. Лагранж и Лаплас нашли точное решение. В этом решении эксцентриситеты и наклоны орбит остаются малыми на бесконечном интервале времени.

Долгое время теория вековых возмущений Лагранжа-Лапласа не находила других применений. Однако в 1987 году была построена новая аналитическая теория движения главных спутников Урана [9], в которой вековые возмущения учитывались строго в рамках теории Лагранжа-Лапласа. Построенная модель движения спутников Урана почти 20 лет оставалась самой точной для этих спутников и соответствовала точности имеющихся наблюдений. В 2008 году методом численного интегрирования уравнений движения была создана более точная модель движения главных спутников Урана [10]. Однако, это уже отдельная тема.

Что касается аналитической теории движения главных спутников этой планеты, то прогресс в точности получения вековых возмущений упирается в необходимость учета в разложении вековой части возмущающей функции членов четвертой степени относительно малых эксцентриситетов и взаимных наклонов орбит. Такие члены получены для задачи взаимных возмущений системы малых тел (планет или спутников) и опубликованы в статье [12]. Результаты воспроизведены также в монографии «Динамика Солнечной системы» [11].

Заметим, что в рассматриваемой задаче наклоны орбит обычно отсчитываются от некоторой плоскости, относительно которой эти наклоны малы. В качестве такой плоскости в разных случаях берется либо плоскость Лапласа, перпендикулярная вектору момента количества движения системы, либо плоскость экватора планеты, вблизи которой расположены плоскости орбит спутников.

Существенный недостаток результатов работы [12] состоит в том, что полученные громоздкие формулы представлены в двух различающихся вариантах: для случая, когда возмущающее тело является внешним по отношению к возмущающему, и для случая внутреннего возмущающего тела

В данной работе решена задача вывода формул, представляющих разложение вековой части возмущающей функции с точностью до четвертых степеней эксцентриситетов и наклонов орбит независимо от того, каким является возмущающее тело по отношению к возмущаемому, внешним или внутренним. Заметим, что слагаемые, содержащие четвертые степени эксцентриситетов и наклонов только возмущающего тела, даже не понадобились, поскольку после подстановки возмущающей функции в уравнения движения эти слагаемые пропадают при её дифференцировании. Это обстоятельство дополнительно сокращает объем формул.

Так же, как и в классической теории Лагранжа-Лапласа, мы используем элементы Лагранжа. Разложение вековой части возмущающей функции ведется по степеням этих элементов. Заметим, что учет членов четвертой степени этих элементов, в отличие от теории Лагранжа-Лапласа, приводит к необходимости решать нелинейные дифференциальные уравнения.

Первым этапом намеченной разработки явилось получение аналитического выражения силовой функции материальных гауссовых колец, моделирующих почти компланарную систему слабоэллиптических спутниковых орбит [5]. Или (другими словами) - получение возмущающей функции, осредненной по движению *всех возмущающих тел*. На втором этапе, описанном в данной статье, выполнено завершающее осреднение возмущающей функции взаимного притяжения по движению *возмущаемого спутника*.

Как известно, силовая функция (или потенциал) кругового гауссова кольца как функция декартовых координат пробной точки выражается через полный эллиптический интеграл первого рода. Её аналитическое выражение приводится во многих руководствах по теории потенциала и, в частности, в монографиях [7], [8] Силовая функция притяжения *эллиптического* кольца как функция эллипсоидальных координат выражена через полные и неполные эллиптические интегралы первого и второго рода [1]. Аналогичное выражение указанного потенциала было представлено Б.П.Кондратьевым в недавнем устном докладе на семинаре отдела небесной механики ГАИШ. Однако вычисление декартовых координат по эллипсоидальным представляет собой нетривиальную задачу, в особенности для произвольного значения эксцентриситета кольца. В то же время оказывается необходимым приближенное аналитическое выражение силовой функции эллиптического гауссова кольца, в частности, при исследовании вековых возмущений астероидных орбит под действием притяжения Юпитера и остальных планет.

В работе [5] получено выражение силовой функции эллиптического кольца в виде частичной суммы степенного ряда с точностью до третьей степени эксцентриситета включительно. Его коэффициенты зависят от координат пробной точки и большой полуоси эллипса. Динамически интерпретируемая как силовая функция материального гауссова кольца, математически она представляет собой возмущающую функцию притяжения планеты, осредненную по средней аномалии её движения.

Естественным обобщением этой функции на случай нескольких возмущающих планет (или спутников) служит возмущающая функция почти компланарной системы слабоэллиптических колец (планетных или спутниковых орбит), осреднённая по средним аномалиям всех возмущающих тел, конечно, при отсутствии соизмеримостей низших порядков их средних движений. Соответствующая силовая функция с точностью лишь до квадратов эксцентриситетов и наклонов планетных орбит была получена в работе [3] и использована для исследования эволюции некоторых астероидных орбит численно-аналитическим методом. В данной работе для спутниковой системы получено уточненное выражение этой функции, учитывающее слагаемые до третьей степени включительно относительно малых параметров – эксцентриситетов и экваториальных наклонений спутниковых орбит. Кроме того, здесь исправлены ошибки в нескольких формулах статьи [5]. Они допущены по вине первого автора указанной статьи.

Рассмотрим систему, состоящую из произвольного числа спутников $J$ с массами $m_j$ ($j$ = 1, 2, 3,…, $J$), обращающихся вокруг центральной планеты массы $m_0 >> m_j$ вблизи ее экваториальной плоскости по почти круговым орбитам. Их невозмущенные большие полуоси обозначим через $a_j$. Введем прямоугольную планетоцентрическую систему координат $Oxyz$, в которой плоскость $xOy$ совпадает с экваториальной плоскостью планеты, причем ось $Ox$ пусть направлена в её точку весеннего равноденствия, ось $Oy$ – направлена в сторону её орбитального движения, а ось $Oz$ – дополняет систему координат до правой. Мы будем использовать предположения, естественные для системы главных спутников Урана: эксцентриситеты спутниковых орбит $e_j << 1$, синусы их экваториальных наклонений $s_j = \sin I_j << 1$, средние движения спутников $n_j = \sqrt{f\left(m_0 + m_j\right)}a_j^{-3/2}$, где $f$ – гравитационная постоянная, несоизмеримы.

В системе $J$ спутников выделим спутник с номером $i$, *возмущаемый* притяжением $J - 1$ *возмущающих* тел. Тогда возмущающая функция для $i$-го спутника определяется формулой

$$R_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{J} R_{ij}, \quad R_{ij} = \mu_j \left( \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right), \tag{1}$$

где $\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$– планетоцентрические радиус - векторы $i$-го и $j$-го спутников, соответственно, $r_j = \left|\mathbf{r}_j\right|$, $\Delta_{ij} = \left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|$, $\mu_j = fm_j$, $f$ – гравитационная постоянная.

Вековая часть возмущающей функции $R_i$ – это результат её независимого двукратного осреднения по схеме Гаусса

$$W_i = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_i(M_i)dM_i, \quad V_i(M_i) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{J} \mu_j \int_0^{2\pi} \frac{dM_j}{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|}, \tag{2}$$

где $M_i$, $M_j$ – средние аномалии возмущаемого и возмущающего спутников, соответственно.

В качестве основных элементов орбит будем использовать элементы Лагранжа:

$$\mathrm{h}_j = e_j \cos\pi_j, \quad \mathrm{k}_j = e_j \sin\pi_j, \quad \mathrm{u}_j = s_j \cos\Omega_j, \quad \mathrm{v}_j = s_j \sin\Omega, \tag{3}$$

где $\pi_j = \Omega_j + \omega_j$, $\Omega_j$ – долгота восходящего узла, $\omega_j$ – аргумент перицентра орбиты $j$ – го спутника.

Получение функции $V_i$ в аналитической форме составляет один из начальных этапов развития нелинейной теории вековых взаимных спутниковых возмущений, а начнём мы с рассмотрения простейшего случая $J = 2$.

## *СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ГАУССОВА КОЛЬЦА*

В двухспутниковой системе ($J = 2$) будем считать возмущающим спутник с номером $j = 1$, а возмущаемым – спутник с номером $i = 2$, причём для упрощения формул индекс “$i = 2$” в данном разделе будет опущен. Тогда искомая силовая функция определится выражением

$$V\left(M\right) = \frac{\mu_1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dM_1}{\left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1\right|}, \tag{4}$$

в котором $\mathbf{r} = (x, y, z)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)^{\mathrm{T}}$.

Введём прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре масс планеты, плоскость $xOy$ пусть совпадает с плоскостью кеплеровской эллиптической орбиты спутника с номером 1 ($z_1 = 0$), а ось $Ox$ направлена в её перицентр. При этом уравнением эллипса (гауссова кольца) будет

$$\left[(x + a_1 e_1)^2 - a_1^2\right](1 - e_1^2) + y^2 = 0\,, \tag{5}$$

где $a_1$ и $e_1$ – соответственно, его большая полуось и эксцентриситет, а функция $V$ имеет вид

$$V(M) = \frac{\mu_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - e_1 \cos E_1)\, dE_1}{\sqrt{A + B\cos E_1 + C\sin E_1 + D\cos^2 E_1}}\,. \tag{6}$$

Здесь

$$A = a_1^2 + r^2 + 2a_1 e_1 x, \quad B = -2a_1(a_1 e_1 + x), \quad C = -2a_1\sqrt{1 - e_1^2}\, y, \quad D = a_1^2 e_1^2, \tag{7}$$

$E_1$ – эксцентрическая аномалия возмущающего спутника, осреднение по которой более предпочтительно, чем по средней аномалии.

Для нахождения определённого интеграла в формуле (6) мы использовали способ, предложенный в работе [6] для произвольного значения эксцентриситета $e_1$. Этот способ позволяет выразить функцию $V$ через полные эллиптические интегралы первого и второго рода рекуррентным образом. Применение данного способа для малых значений эксцентриситета с использованием гипергеометрических функций Гаусса $F$ приводит к конечному выражению с точностью до третьей степени относительно $e_1$ включительно

$$V(x, y, z, \mu_1, a_1, e_1) = \frac{\mu_1}{\sigma} \sum_{k=0}^{3} \left[ p_k F\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \varsigma\right) + q_k F\left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 2; \varsigma\right) \right] e_1^k\,, \tag{8}$$

где аргумент гипергеометрических функций определяется формулой

$$\varsigma = \frac{4a_1^2}{\sigma^4} \sum_{\nu=0}^{3} \xi_\nu e_1^\nu\,. \tag{9}$$

В формулах (7), (8)

$$\sigma = \sqrt{a_1^2 + r^2}, \qquad r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \tag{10}$$

а коэффициенты $p_k$, $q_k$, $\xi_\nu$ даются следующими выражениями

$$p_0 = 1, \quad p_1 = -\frac{a_1 x}{\sigma^2}, \quad p_2 = \frac{a_1^2}{2\sigma^2}\left[\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{3}{\sigma^2}\right)x^2 - \frac{2y^2}{\rho^2}\right],$$

$$p_3 = a_1 x \left\{ \frac{a_1^2}{\rho^2 \sigma^2}\left[1 + \left(\frac{3}{\sigma^2} + \frac{2}{\rho^2}\right)y^2\right] - \left[\frac{a_1^2}{\sigma^2}\left(\frac{5}{2\sigma^4} + \frac{3}{2\rho^2\sigma^2} + \frac{1}{\rho^4}\right) + \frac{1}{3\rho^4}\right]x^2 \right\}, \tag{11}$$

$$q_0 = 0, \quad q_1 = -\frac{a_1 x}{2\sigma^2}, \quad q_2 = \frac{a_1^2}{2\sigma^2}\left(\frac{3x^2}{\sigma^2} - 1\right),$$

$$q_3 = a_1 x\left\{\frac{3a_1^2}{\sigma^4} + \left[\frac{1}{3\rho^4} - \frac{3a_1^2}{4\sigma^4}\left(\frac{3}{\rho^2} + \frac{5}{\sigma^2}\right)x^2\right]\right\}, \tag{12}$$

$$\xi_0 = \rho^2, \quad \xi_1 = 2a_1 x\left(1 - \frac{2\rho^2}{\sigma^2}\right),$$

$$\xi_2 = a_1^2 + \left[\frac{6a_1^2}{\sigma^2}\left(\frac{2\rho^2}{\sigma^2} - 1\right) - \frac{\sigma^2}{\rho^2}\right]x^2 + \left(\frac{\sigma^2}{\rho^2} - 1 - \frac{4a_1^2}{\sigma^2}\right)y^2, \tag{13}$$

$$\xi_3 = 2a_1 x\left\{\left[\frac{2a_1^2}{\sigma^4}\left(3 - \frac{8\rho^2}{\sigma^2}\right) + \frac{1}{\rho^2}\right]x^2 + \left[\frac{2}{\sigma^2}\left(1 + \frac{6a_1^2}{\sigma^2}\right) - \frac{1}{\rho^2}\left(1 + \frac{2\sigma^2}{\rho^2}\right)\right]y^2\right\}.$$

В отличие от безразмерных коэффициентов $p_k$, $q_k$, коэффициенты $\xi_\nu$ имеют размерность квадрата длины. Таким образом, формулой (8) определяется силовая функция эллиптического материального гауссова кольца с точностью до третьей степени эксцентриситета включительно. Эта функция зависит от координат пробной точки $x$, $y$, $z$, а постоянные $\mu_1$, $a_1$, $e_1$ входят в неё в качестве параметров кольца. В простейшем случае $e_1 = 0$ из (8) при $p_0=1$ и $q_0=0$ получается формула для силовой функции кругового гауссова кольца, предложенная в работе [13], которая, в свою очередь, получена из хорошо известного классического выражения [7] через полный эллиптический интеграл первого рода.

В зависимости от величины аргумента $\zeta$ гипергеометрических функций вида $F(\alpha, \beta; \alpha+\beta; \zeta)$ целесообразно использовать их представления в виде различных функциональных рядов.

При $0 \le \zeta \le \zeta^*$, где $\zeta^*$ некоторое положительное число, меньшее 1, функция $V$ даётся формулой

$$V = \frac{\mu_1}{\sigma}\sum_{k=0}^{3}\left[\sum_{n=0}^{N}\left(p_k + \frac{4n+1}{n+1}q_k\right)B_n\varsigma^n\right]e_1^k, \tag{14}$$

где коэффициенты $B_n$ определяются рекуррентным соотношением

$$B_n = \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{3}{16n^2}\right)B_{n-1}, \quad n > 0, \quad B_0 = 1. \tag{15}$$

При $\zeta^* \le \zeta < 1$ для функции $V$ следует использовать другую формулу

$$V = \frac{\mu_1}{\pi\sqrt{2}\sigma}\sum_{k=0}^{3}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left[\left(h_n - \ln(1-\varsigma)\right)\left(p_k + 4(4n+1)q_k\right) - 16q_k\right]B_n(1-\varsigma)^n\right\}e_1^k, \tag{16}$$

где коэффициенты $h_n$ определяются рекуррентным соотношением

$$h_n = h_{n-1} + \frac{2(3-8n)}{n(4n-3)(4n-1)}, \quad n > 0, \quad h_0 = 6\ln 2.$$

Здесь для связности изложения мы позволили себе повторить некоторые формулы, содержащиеся в работе [2].

Значение верхнего предела суммирования $N$ определяется требуемой точностью вычислений, а для выбора параметра $\zeta^*$ можно предложить приближенные механические соображения. Когда пробная точка очень близка к кольцу, более полезной является формула (16) в виде ряда, содержащего степени 1 - $\zeta$ . При $\zeta$ = 1 точка с координатами $x$, $y$, $z$ = 0 принадлежит эллиптическому кольцу, определяемому уравнением (5), а функция $V$ имеет особенность, вблизи которой она изменяется как $\ln(1-\zeta)$.

Напротив, представление функции $V$ в виде (14) предпочтительнее для пробной точки, не слишком приближенной к кольцу, когда ряд по степеням $\zeta$ сходится достаточно быстро, а в сумме по $n$ достаточно ограничиться не слишком большим значением $N$. При этом малой величиной можно считать не только $e_1$, но и произведение $ne_1$. Полагая указанные условия выполненными, мы проведем преобразование функции $V$, представленной лишь формулой (14). Применяя к выражению (9) формулу бинома Ньютона, ограничиваясь слагаемыми порядка не выше, чем $(ne_1)^3$ и производя необходимые действия, получим формулу для силовой функции слабоэллиптического гауссова кольца

$$V = \mu_1 \sum_{\lambda=0}^{3} R_\lambda e_1^\lambda, \tag{17}$$

где

$$R_\lambda = \frac{1}{\sigma}\sum_{n=0}^{N} B_n \delta^{2n} \mathrm{w}_\lambda^{(n)}, \qquad \delta = \frac{2a_1\rho}{\sigma^2},$$

а коэффициенты $\mathrm{w}_\lambda^{(n)}$ определяются следующими промежуточными равенствами

$$\mathrm{w}_0^{(n)} = g_0^{(n)}, \quad \mathrm{w}_1^{(n)} = g_1^{(n)} + \frac{n}{\rho^2}\xi_1, \quad \mathrm{w}_2^{(n)} = g_2^{(n)} + \frac{n}{\rho^2}\left[g_1^{(n)}\xi_1 + \xi_2 + \frac{n-1}{2\rho^2}\xi_1^2\right],$$

$$\mathrm{w}_3^{(n)} = g_3^{(n)} + \frac{n}{\rho^2}\left[g_2^{(n)}\xi_1 + g_1^{(n)}\left(\xi_2 + \frac{n-1}{2\rho^2}\xi_1^2\right) + \xi_3 + \frac{n-1}{\rho^2}\xi_1\left(\xi_2 + \frac{n-2}{6\rho^2}\xi_1^2\right)\right].$$

Здесь $\xi_m$ определены формулами (13), а величины $g_m^{(n)}$ даются формулами

$$g_m^{(n)} = p_m + \frac{4n+1}{n+1} q_m, \quad (m = 0,1,2,3).$$

Проводя необходимые преобразования, получим окончательные выражения для коэффициентов $\mathrm{w}_\lambda^{(n)}$:

$$\mathrm{w}_0^{(n)} = 1,$$

$$\mathrm{w}_1^{(n)} = a_1 x\left[\frac{2n}{\rho^2} - \frac{(2n+3)(4n+1)}{2(n+1)\sigma^2}\right],$$

$$\mathrm{w}_2^{(n)} = a_1^2\left[\frac{n}{\rho^2} - \frac{4n+1}{2(n+1)\sigma^2}\right] +$$

$$+ x^2\left[\frac{n}{\rho^4}\left[2(n-1)a_1^2 - \sigma^2\right] + \frac{a_1^2(4n+1)}{2(n+1)}\left(\frac{(n+2)(4n+3)}{\sigma^4} - \frac{\left(4n^2+5n-1\right)}{\rho^2\sigma^2}\right)\right] +$$

$$+ y^2\left[-\frac{n}{\rho^2} + \frac{n\sigma^2}{\rho^4} - \frac{(4n+1)a_1^2}{\rho^2\sigma^2}\right],$$

$$\mathrm{w}_3^{(n)} = \frac{a_1^3 x}{2(n+1)}\left[\frac{4n\left(n^2-1\right)}{\rho^4} - \frac{(n+2)(2n-1)(4n+1)}{\rho^2\sigma^2} + \frac{2(2n+3)(4n+1)}{\sigma^4}\right] +$$

$$+ a_1 x^3\left[\begin{array}{l}\dfrac{2n(n-1)}{3\rho^6}\left(2(n-2)a_1^2 - 3\sigma^2\right) - \dfrac{a_1^2(n-1)(4n+1)\left(2n^2+2n-1\right)}{(n+1)\rho^4\sigma^2} + \dfrac{n\left(8n^2+10n+1\right)}{2(n+1)\rho^4} + \\ + \dfrac{a_1^2(4n+1)\left(16n^3+36n^2+6n-15\right)}{4(n+1)\rho^2\sigma^4} - \dfrac{a_1^2(2n+5)(4n+1)(4n+3)(4n+5)}{12(n+1)\sigma^6}\end{array}\right] +$$

$$+ a_1 x\ y^2\left[\begin{array}{l}\dfrac{2n\sigma^2}{\rho^6}(n-3) - \dfrac{n}{2(n+1)\rho^4}\left(12n^2+10n-5\right) + \dfrac{n(2n+3)(4n+1)}{2(n+1)\rho^2\sigma^2} - \\ - \dfrac{2a_1^2(n-1)(4n+1)}{\rho^4\sigma^2} + \dfrac{a_1^2(4n+1)\left(4n^2+9n+3\right)}{(n+1)\rho^2\sigma^4}\end{array}\right]. \qquad (18)$$

Отметим, что $V$ - четная функция аргументов $y$ и $z$, как это и следует из выбора осей координат.

# *СИЛОВАЯ ФУНКЦИЯ ПОЧТИ КОМПЛАНАРНОЙ СИСТЕМЫ СЛАБОЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГАУССОВЫХ КОЛЕЦ.*

Для системы, состоящей из $J$ колец, исходя из формулы (2), нетрудно получить выражение функции $V_i$ в виде

$$V_i(M_i) = \frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{J}\mu_j\int_0^{2\pi}\frac{\left(1 - h_j\cos\Lambda_j - k_j\sin\Lambda_j\right)d\Lambda_j}{\Delta_{ij}}, \tag{19}$$

где

$$\Delta_{ij} = \sqrt{A_j^{(i)} + B_j^{(i)}\cos\Lambda_j + C_j^{(i)}\sin\Lambda_j + D_j\cos^2\Lambda_j + G_j\sin\Lambda_j\cos\Lambda_j + H_j\sin^2\Lambda_j},$$

$$A_j^{(i)} = \sigma_{ij}^2 + 2a_j\left[x_i\left(\mathrm{h}_j + \frac{1}{2}\mathrm{v}_j\alpha_{1j}\right) + y_i\left(\left[\mathrm{k}_j - \frac{1}{2}\mathrm{u}_j\alpha_{1j}\right]\right) + z_i\alpha_{1j}\right],$$

$$B_j^{(i)} = -2a_j\left[\begin{array}{l} a_j\mathrm{h}_j + x_i\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{k}_j^2\beta_{1j} - \frac{1}{2}\mathrm{v}_j^2\beta_{2j} + \frac{1}{4}\mathrm{k}_j\mathrm{v}_j\alpha_{2j}\right) + \\ + \frac{1}{2}y_i\left(\mathrm{h}_j\mathrm{k}_j\beta_{1j} + \mathrm{u}_j\mathrm{v}_j\beta_{2j} - \frac{1}{2}\mathrm{k}_j\mathrm{u}_j\alpha_{2j}\right) + z_i\left(-\mathrm{v}_j + \frac{1}{2}\mathrm{k}_j\alpha_{2j}\right)\end{array}\right],$$

$$C_j^{(i)} = -2a_j\left[\begin{array}{l} a_j\mathrm{k}_j + y_i\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{h}_j^2\beta_{1j} - \frac{1}{2}\mathrm{u}_j^2\beta_{2j} + \frac{1}{4}\mathrm{h}_j\mathrm{u}_j\alpha_{2j}\right) + \\ + \frac{1}{2}x_i\left(\mathrm{h}_j\mathrm{k}_j\beta_{1j} + \mathrm{u}_j\mathrm{v}_j\beta_{2j} - \frac{1}{2}\mathrm{h}_j\mathrm{v}_j\alpha_{2j}\right) + z_i\left(\mathrm{u}_j - \frac{1}{2}\mathrm{h}_j\alpha_{2j}\right)\end{array}\right],$$

$$D_j = a_j^2\mathrm{h}_j^2, \quad G_j = 2a_j^2\mathrm{h}_j\mathrm{k}_j, \quad H_j = a_j^2\mathrm{k}_j^2, \quad \sigma_{ij} = \sqrt{a_j^2 + r_i^2}. \tag{20}$$

Переменная интегрирования в формуле (19) в небесно-механическом смысле (по аналогии со средней долготой) представляет собой эксцентрическую долготу $\Lambda_j = E_j + \pi_j$ ($E_j$ - эксцентрическая аномалия).

Для малых значений эксцентриситетов $e_j$ и экваториальных наклонов $I_j$ спутниковых орбит удобно использовать элементы Лагранжа

$$\mathrm{h}_j = e_j\cos\pi_j, \quad \mathrm{k}_j = e_j\sin\pi_j, \quad \mathrm{u}_j = s_j\cos\Omega_j, \quad \mathrm{v}_j = s_j\sin\Omega_j, \tag{21}$$

где $s_j = \sin I_j$, $\pi_j = \Omega_j + \omega_j$ - долгота перицентра орбиты $j$-го спутника. Кроме того, здесь введены обозначения функций элементов орбиты

$$\alpha_{1j} = \mathrm{k}_j\mathrm{u}_j - \mathrm{h}_j\mathrm{v}_j, \quad \alpha_{2j} = \mathrm{h}_j\mathrm{u}_j + \mathrm{k}_j\mathrm{v}_j, \quad \beta_{1j} = 1 + \frac{1}{4}e_j^2, \quad \beta_{2j} = 1 + \frac{1}{4}s_j^2.$$

Элементы всех орбит отнесены к планетоцентрической системе координат, а угловые переменные - к плоскости экватора планеты и к направлению в заданную точку небесной сферы, например, в точку весеннего равноденствия.

Вышеприведенные формулы для коэффициентов $A_j^{(i)}, B_j^{(i)}, C_j^{(i)}$ уточняют формулы работы [3] слагаемыми третьей степени относительно элементов $\mathrm{h}_j, \mathrm{k}_j, \mathrm{u}_j, \mathrm{v}_j$ (или $e_j, s_j$). Выполняя с той же необходимой точностью преобразования и вычисление интеграла (18), описанные в этой работе, получим выражение силовой функции почти компланарной системы $J$ слабоэллиптических гауссовых колец.

$$V_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{J} \frac{\mu_j}{\sigma_{ij}} \left\{ \sum_{m=0}^{3} \Psi_m^{(i,j)} \left( x_i, y_i, z_i \right) \mathrm{h}_j^{m_1} \mathrm{k}_j^{m_2} \mathrm{u}_j^{m_3} \mathrm{v}_j^{m_4} \right\}, \qquad (22)$$

где $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

В функции

$$\Psi_m^{(i,j)} \left( x_i, y_i, z_i \right) = p_m^{(i,j)} F\left( \frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; \zeta_j^{(i)} \right) + q_m^{(i,j)} F\left( \frac{3}{4}, \frac{5}{4}; 2; \zeta_j^{(i)} \right). \qquad (23)$$

аргумент гипергеометрических функций определяется формулой

$$\zeta_j^{(i)} = \frac{4a_j^2}{\sigma_{ij}^4} \left[ \sum_{\nu=0}^{3} \xi_\nu^{(i,j)} \mathrm{h}_j^{\nu_1} \mathrm{k}_j^{\nu_2} \mathrm{u}_j^{\nu_3} \mathrm{v}_j^{\nu_4} \right], \qquad (24)$$

где $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$.

Коэффициенты при различных степенях элементов Лагранжа зависят от координат пробной точки $x_i$, $y_i$, $z_i$ и постоянного параметра $a_j$ – большой полуоси $j$–го кольца, а полученные формулы (22) – (24) определяют силовую функцию почти компланарной системы $J$ слабоэллиптических гауссовых колец с точностью до третьих степеней включительно относительно малых параметров $\mathrm{h}_j, \mathrm{k}_j, \mathrm{u}_j, \mathrm{v}_j$ или ($e_j$, $s_j$). Ниже приводятся достаточно громоздкие выражения коэффициентов $p$, $q$, $\xi$.

$m = \nu = 0.$ $\qquad p_{0000} = 1, \quad q_{0000} = 0, \quad \xi_{0000} = \rho_i^2.$

$m = \nu = 1.$

$$p_{1000} = -\frac{a_j x_i}{\sigma_{ij}^2}, \quad p_{0100} = -\frac{a_j y_i}{\sigma_{ij}^2}, \quad p_{0010} = p_{0001} = 0,$$

$$q_{1000} = \frac{1}{2} p_{1000}, \quad q_{0100} = \frac{1}{2} p_{0100}, \quad q_{0010} = q_{0001} = 0,$$

$$\xi_{1000} = S_0 x_i, \quad \xi_{0100} = S_0 y_i, \quad \xi_{0010} = 2 y_i z_i, \quad \xi_{0001} = -2 x_i z_i,$$

$$S_0 = \frac{2a_j}{\sigma_{ij}^2}\left(a_j^2 + z_i^2 - \rho_i^2\right).$$

$m = \nu = 2.$

$$p_{2000} = \frac{a_j^2}{2\sigma_{ij}^2}\left[S_1 x_i^2 - \frac{2}{\rho_i^2} y_i^2\right], \quad p_{1100} = \frac{3a_j^2}{\sigma_{ij}^2}\left(\frac{1}{\sigma_{ij}^2} + \frac{1}{\rho_i^2}\right) x_i y_i,$$

$$p_{1001} = \frac{a_j}{\sigma_{ij}^2} z_i, \quad p_{0200} = \frac{a_j^2}{2\sigma_{ij}^2}\left[S_1 y_i^2 - \frac{2}{\rho_i^2} x_i^2\right],$$

$$p_{0110} = -p_{1001}, \quad p_{1010} = p_{0101} = p_{0020} = p_{0011} = p_{0002} = 0,$$

$$S_1 = \frac{3}{\sigma_{ij}^2} + \frac{1}{\rho_i^2},$$

$$q_{2000} = \frac{a_j^2}{2\sigma_{ij}^2}\left(\frac{3}{\sigma_{ij}^2} x_i^2 - 1\right), \quad q_{1100} = \frac{3a_j^2}{\sigma_{ij}^4} x_i y_i,$$

$$q_{1001} = \frac{1}{2} p_{1001}, \quad q_{0200} = \frac{a_j^2}{2\sigma_{ij}^2}\left(\frac{3}{\sigma_{ij}^2} y_i^2 - 1\right),$$

$$q_{0110} = -q_{1001}, \quad q_{1010} = q_{0101} = q_{0020} = q_{0011} = q_{0002} = 0,$$

$$\xi_{2000} = a_j^2 + S_2 x_i^2 + S_3 y_i^2, \quad \xi_{1100} = 2 x_i y_i\left[\frac{6a_j^2}{\sigma_{ij}^4}\left(\rho_i^2 - a_j^2 - z_i^2\right) + \frac{4a_j^2}{\sigma_{ij}^2} - \frac{2\left(a_j^2 + z_i^2\right)}{\rho_i^2} - 1\right],$$

$$\xi_{1010} = -\frac{8a_j x_i y_i z_i}{\sigma_{ij}^2}, \quad \xi_{1001} = 2a_j z_i\left[\frac{2}{\sigma_{ij}^2}\left(3x_i^2 + y_i^2\right) - 1\right], \quad \xi_{0200} = a_j^2 + S_2 y_i^2 + S_3 x_i^2,$$

$$\xi_{0110}=2a_jz_i\left[1-\frac{2}{\sigma_{ij}^2}\left(3y_i^2+x_i^2\right)\right],\ \ \xi_{0101}=-\xi_{1010},\ \ \xi_{0020}=z_i^2-y_i^2,$$

$$\xi_{0011}=2x_iy_i,\ \ \xi_{0002}=z_i^2-x_i^2,$$

$$S_2=\frac{6a_j^2}{\sigma_{ij}^4}\left(\rho_i^2-a_j^2-z_i^2\right)-\frac{\sigma_{ij}^2}{\rho_i^2},\ \ S_3=\frac{a_j^2+z_i^2}{\rho_i^2}-\frac{4a_j^2}{\sigma_{ij}^2}.$$

$m=\nu=3.$

$$p_{3000}=a_jx_i\left(\frac{a_j^2}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2}-S_4x_i^2+S_5y_i^2\right),\ \ p_{2100}=a_jy_i\left(\frac{a_j^2}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2}+S_6x_i^2+S_5y_i^2\right),$$

$$p_{2010}=-\frac{3a_j^2}{\rho_i^4\sigma_{ij}^2}x_i^2y_iz_i,\ \ p_{2001}=-3a_j^2x_iz_i\left(\frac{1}{\sigma_{ij}^4}+\frac{y_i^2}{\rho_i^4\sigma_{ij}^2}\right),$$

$$p_{1200}=a_jx_i\left\{\frac{a_j^2}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2}+S_6y_i^2+S_5x_i^2\right\},$$

$$p_{1020}=p_{0102}=p_{0030}=p_{0021}=p_{0012}=p_{0003}=0,$$

$$p_{1002}=\frac{a_j}{2\sigma_{ij}^2}x_i,\ \ p_{0300}=a_jy_i\left\{\frac{a_j^2}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2}-S_4y_i^2+S_5x_i^2\right\},$$

$$p_{0210}=3a_j^2y_iz_i\left(\frac{1}{\sigma_{ij}^4}+\frac{x_i^2}{\rho_i^4\sigma_{ij}^2}\right),\ \ p_{0201}=\frac{3a_j^2}{\rho_i^4\sigma_{ij}^2}x_iy_i^2z_i,\ \ p_{0120}=\frac{a_j}{2\sigma_{ij}^2}y_i,$$

$$p_{1110}=3a_j^2x_iz_i\left(\frac{1}{\sigma_{ij}^4}+\frac{x_i^2+3y_i^2}{\rho_i^4\sigma_{ij}^2}\right),\ \ p_{1101}=-3a_j^2y_iz_i\left(\frac{1}{\sigma_{ij}^4}+\frac{3x_i^2+y_i^2}{\rho_i^4\sigma_{ij}^2}\right),$$

$$p_{1011}=-\frac{a_jy_i}{2\sigma_{ij}^2},\ \ p_{0111}=-\frac{a_jx_i}{2\sigma_{ij}^2},$$

$$S_4=\frac{3a_j^2}{2\rho_i^2\sigma_{ij}^4}+\frac{a_j^2}{\rho_i^4\sigma_{ij}^2}+\frac{1}{3\rho_i^4}+\frac{5a_j^2}{2\sigma_{ij}^6},\ \ S_5=\frac{a_j^2}{\rho_i^2}\left(\frac{3}{\sigma_{ij}^4}+\frac{2}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2}\right),$$

$$S_6=-\left(\frac{21a_j^2}{2\rho_i^2\sigma_{ij}^4}+\frac{7a_j^2}{\rho_i^4\sigma_{ij}^2}+\frac{1}{\rho_i^4}+\frac{15a_j^2}{2\sigma_{ij}^6}\right),$$

$$q_{3000}=a_j x_i\left[\frac{3a_j^2}{\sigma_{ij}^4}+x_i^2\left(\frac{1}{3\rho_i^4}-\frac{9a_j^2}{4\rho_i^2\sigma_{ij}^4}-\frac{15a_j^2}{4\sigma_{ij}^6}\right)\right],$$

$$q_{2100}=a_j y_i\left[\frac{3a_j^2}{\sigma_{ij}^4}+x_i^2\left(\frac{1}{\rho_i^4}-\frac{27a_j^2}{4\rho_i^2\sigma_{ij}^4}-\frac{45a_j^2}{4\sigma_{ij}^6}\right)\right],$$

$$q_{1200}=a_j x_i\left[\frac{3a_j^2}{\sigma_{ij}^4}+y_i^2\left(\frac{1}{\rho_i^4}-\frac{27a_j^2}{4\rho_i^2\sigma_{ij}^4}-\frac{45a_j^2}{4\sigma_{ij}^6}\right)\right],$$

$$q_{0300}=a_j y_i\left[\frac{3a_j^2}{\sigma_{ij}^4}+y_i^2\left(\frac{1}{3\rho_i^4}-\frac{9a_j^2}{4\rho_i^2\sigma_{ij}^4}-\frac{15a_j^2}{4\sigma_{ij}^6}\right)\right].$$

$$q_{1002}=\frac{a_j x_i}{4\sigma_{ij}^2},$$

$$q_{2010}=q_{1020}=q_{0102}=q_{0201}=q_{0030}=q_{0021}=q_{0012}=q_{0003}=0,$$

$$q_{2001}=-\frac{3a_j^2 x_i z_i}{\sigma_{ij}^4},\quad q_{0210}=\frac{3a_j^2 y_i z_i}{\sigma_{ij}^4},\quad q_{0120}=\frac{a_j y_i}{4\sigma_{ij}^2},\quad q_{1110}=\frac{3a_j^2 x_i z_i}{\sigma_{ij}^4},$$

$$q_{1101}=-q_{0210},\quad q_{1011}=-q_{0120},\quad q_{0111}=-q_{1002},$$

$$\xi_{3000}=2a_j x_i\left(S_7 x_i^2+S_8 y_i^2\right),\quad \xi_{2100}=2a_j y_i\left(S_9 x_i^2+S_8 y_i^2\right),$$

$$\xi_{2010} = 2y_i z_i \left[ 2S_{10} x_i^2 - \frac{4a_j^2}{\sigma_{ij}^4}\left( a_j^2 + z_i^2 + y_i^2 \right) - 1 \right],$$

$$\xi_{2001} = 4x_i z_i \left( S_{12} y_i^2 + S_{11} - \frac{13a_j^2 x_i^2}{\sigma_{ij}^4} \right),$$

$$\xi_{1200} = 2a_j x_i \left( S_9 y_i^2 + S_8 x_i^2 \right), \quad \xi_{1020} = \frac{4a_j x_i}{\sigma_{ij}^2}\left( y_i^2 - z_i^2 \right),$$

$$\xi_{1002} = a_j x_i \left[ \frac{2}{\sigma_{ij}^2}\left( 3x_i^2 + y_i^2 - 6z_i^2 \right) - 1 \right], \quad \xi_{0210} = -4y_i z_i \left( S_{12} x_i^2 + S_{11} - \frac{13a_j^2 y_i^2}{\sigma_{ij}^4} \right),$$

$$\xi_{0201} = 2x_i z_i \left\{ -2S_{10} y_i^2 + \frac{4a_j^2}{\sigma_{ij}^4}\left( a_j^2 + z_i^2 + x_i^2 \right) + 1 \right\}, \quad \xi_{0300} = 2a_j y_i \left( S_7 y_i^2 + S_8 x_i^2 \right),$$

$$\xi_{0120} = a_j y_i \left[ \frac{2}{\sigma_{ij}^2}\left( x_i^2 + 3y_i^2 - 6z_i^2 \right) - 1 \right], \quad \xi_{0102} = \frac{4a_j y_i}{\sigma_{ij}^2}\left( x_i^2 - z_i^2 \right),$$

$$\xi_{0030} = -y_i z_i, \quad \xi_{0021} = x_i z_i, \quad \xi_{0012} = \xi_{0030}, \quad \xi_{0003} = \xi_{0021},$$

$$\xi_{1110} = 2x_i z_i \left( S_{13} x_i^2 + S_{14} y_i^2 + S_{15} \right), \quad \xi_{1101} = -2y_i z_i \left( S_{13} y_i^2 + S_{14} x_i^2 + S_{15} \right),$$

$$\xi_{1011} = a_j y_i \left[ 1 + \frac{2}{\sigma_{ij}^2}\left( 4z_i^2 - 5x_i^2 - y_i^2 \right) \right], \quad \xi_{0111} = a_j x_i \left[ 1 + \frac{2}{\sigma_{ij}^2}\left( 4z_i^2 - 5y_i^2 - x_i^2 \right) \right].$$

$$S_7 = \frac{2a_j^2}{\sigma_{ij}^6}\left( 3a_j^2 + 3z_i^2 - 5\rho_i^2 \right) + \frac{1}{\rho_i^2}, \quad S_8 = \frac{12a_j^2}{\sigma_{ij}^4} + \frac{2}{\sigma_{ij}^2} - \frac{1}{\rho_i^4}\left( 2a_j^2 + 2z_i^2 + 3\rho_i^2 \right),$$

$$S_9 = -\frac{6a_j^2}{\sigma_{ij}^6}\left( a_j^2 + z_i^2 + 9\rho_i^2 \right) - \frac{4}{\sigma_{ij}^2} + \frac{1}{\rho_i^4}\left( 4a_j^2 + 4z_i^2 + 9\rho_i^2 \right),$$

$$S_{10} = \frac{4a_j^2}{\sigma_{ij}^4} + \frac{\sigma_{ij}^2}{\rho_i^4}, \quad S_{11} = -\frac{a_j^2}{\sigma_{ij}^4}\left( a_j^2 + z_i^2 \right) + \frac{4a_j^2}{\sigma_{ij}^2}, \quad S_{12} = -\frac{7a_j^2}{\sigma_{ij}^4} + \frac{\sigma_{ij}^2}{\rho_i^4}.$$

$$S_{13} = \frac{18a_j^2}{\sigma_{ij}^4} - \frac{2\sigma_{ij}^2}{\rho_i^4}, \quad S_{14} = \frac{42a_j^2}{\sigma_{ij}^4} + \frac{2\sigma_{ij}^2}{\rho_i^4}, \quad S_{15} = \frac{6a_j^2}{\sigma_{ij}^4}\left( a_j^2 + z_i^2 \right) - \frac{8a_j^2}{\sigma_j^2} + 1.$$

Если в выражениях (22), (24) отбросить слагаемые третьей степени, то функция $V_i$ приводится к формуле, полученной в работе [3]. Сложность выражений для коэффициентов как функций координат пробной точки резко возрастает с увеличением максимальной степени разложения силовой функции по параметрам $e_j$ , $s_j$. Поэтому её дальнейшее уточнение при необходимости возможно, по-видимому, лишь с привлечением программ аналитических преобразований на ЭВМ.

Представленная силовая функция $V_i$ характеризует притяжение системы колец, оказываемое ими на пробную точку с координатами $x_i, y_i, z_i$, в частности, движущуюся по оскулирующей эллиптической кеплеровской орбите возмущаемого спутника. В предположении, что эта орбита не является равномерно близкой ни к одному из колец, т.е. среди аргументов $\zeta_j^{(i)}$ нет слишком близких к единице, в выражении (23) заменим гипергеометрические функции соответствующими степенными рядами и получим формулу для $\Psi_m^{(i,j)}$ в следующем виде

$$\Psi_m^{(i,j)}\left(x_i, y_i, z_i\right) = \sum_{n=0}^{N} g_m^{(i,j,n)} B_n \zeta_j^{(i)^n} , \tag{25}$$

где
$$g_m^{(i,j,n)} = p_m^{(i,j)} + \frac{4n+1}{n+1} q_m^{(i,j)} . \tag{26}$$

Имея в виду перспективные приложения к системе главных спутников Урана, мы в дальнейшем будем предполагать, что орбита возмущаемого спутника, так же как и орбиты возмущающих спутников, имеет малый эксцентриситет $e_i$ и наклонение $I_i$ = arcsin($s_i$) к плоскости экватора планеты. Приближённые числовые значения гравитационных параметров и элементов орбит главных спутников Урана представлены в табл. 1.

Табл. 1. Гравитационные параметры и элементы орбит главных спутников Урана.

| Принятый порядковый номер спутника ($j$) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Обозначение и название спутника | U V Миранда | U I Ариэль | U II Умбриэль | U III Титания | U IV Оберон |
| $\mu_j$, км$^3$сек$^{-2}$ | 4.4 | 90.3 | 78.2 | 235.3 | 201.1 |
| $a_j$ , тыс. км. | 130 | 191 | 266 | 436 | 584 |
| $e_j$ | 0.0013 | 0.0012 | 0.0040 | 0.0014 | 0.0016 |
| $I_j$ , град. | 4.34 | 0.04 | 0.13 | 0.08 | 0.07 |
| $T_j$ , сут. | 1.413 | 2.520 | 4.144 | 8.706 | 13.46 |

При малых значениях $e_i$, $s_i$ аргументы $\zeta_j^{(i)}$ близки к значению $\tilde{\zeta}_j^{(i)} = \zeta_j^{(i)}(e_i = s_i = 0) = \dfrac{4a_j^2 a_i^2}{\left(a_j^2 + a_i^2\right)^2}$, а координаты возмущаемого спутника (являющиеся известными функциями времени) могут быть заданы небольшими отрезками рядов по степеням $e_i$ .В симметричной таблице 2 приведены величины аргументов $\tilde{\zeta}_j^{(i)}$ для всех пар значений индексов $i, j$ .

Табл. 2. Параметры $\tilde{\zeta}_j^{(i)}$.

| $i \setminus j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | **0.865** | 0.622 | 0.300 | 0.180 |
| 2 | **0.865** | 1 | **0.898** | 0.540 | 0.349 |
| 3 | 0.622 | **0.898** | 1 | **0.791** | 0.569 |
| 4 | 0.300 | 0.540 | **0.791** | 1 | **0.919** |
| 5 | 0.180 | 0.349 | 0.569 | **0.919** | 1 |

Из нее видно, что наибольшим взаимным влияниям подвержены, естественно, соседние спутники (для них числовые значения выделены жирным шрифтом), а максимальный параметр разложения составляет примерно 0.9. Поэтому для соседних пар спутников сходимость ряда (25) будет достаточно медленной.

Для дальнейшего применения теории вековых возмущений проведем преобразование функции $V$ из вида (22) к окончательному виду

$$V_i = \sum_{j=1(j\neq i)}^{J} \mu_j \sum_{\lambda=0}^{3} R^{(i,j)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} \, \mathrm{h}^{\lambda_1}\mathrm{k}^{\lambda_2}\mathrm{u}^{\lambda_3}\mathrm{v}^{\lambda_4}. \tag{27}$$

В этом выражении $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4$, а **к**оэффициенты $R^{(i,j)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ определяются формулой

$$R^{(i,j)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4} = \sum_{n=0}^{N} 2^{2n} B_n a_j^{2n} \frac{\rho_i^{2n}}{\sigma_{ij}^{4n+1}} \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}, \tag{28}$$

которая получается путем возведения выражения (24) в $n$-ю степень и умножения результата на коэффициенты (26), зависящие от $p_m^{(i,j)}, q_m^{(i,j)}$ и $n$. Ниже приводятся явные формулы для $\mathrm{w}^{(i,j,n)}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}$ для $\lambda < 3$.

$\lambda = 0.$ $\quad \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{0000} = 1.$

$\lambda = 1.$ $\quad \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{1000} = T_0 x_i, \quad \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{0100} = T_0 y_i, \quad \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{0010} = \frac{2n y_i z_i}{\rho_i^2}, \quad \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{0001} = -\frac{2n x_i z_i}{\rho_i^2},$

$$T_0 = a_j \left[ \frac{2n}{\rho_i^2} - \frac{(2n+3)(4n+1)}{2(n+1)\sigma_{ij}^2} \right].$$

$\lambda = 2.$ $\quad \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{2000} = T_1 a_j^2 + T_2 y_i^2 + T_3 x_i^2, \quad \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{1100} = x_i y_i T_4,$

$$\mathrm{w}^{(i,j,n)}_{1010} = T_5, \quad \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{1001} = \left[ -\frac{2n}{\rho_i^2} + \frac{3(2n+1)}{2(n+1)\sigma_{ij}^2} + \frac{4n}{\rho_i^2 \sigma_{ij}^2} y_i^2 + T_6 x_i^2 \right] a_j z_i,$$

$$\mathrm{w}_{0200}^{(i,j,n)} = T_1 a_j^2 + T_2 x_i^2 + T_3 y_i^2,\quad \mathrm{w}_{0110}^{(i,j,n)} = \left[\frac{2n}{\rho_i^2} - \frac{3(2n+1)}{2(n+1)\sigma_{ij}^2} - \frac{4n}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2} x_i^2 - T_6 y_i^2\right] a_j z_i,$$

$$\mathrm{w}_{0101}^{(i,j,n)} = -T_5,\quad \mathrm{w}_{0020}^{(i,j,n)} = n\left[\frac{z_i^2 - y_i^2}{\rho_i^2} + \frac{2(n-1)}{\rho_i^4} y_i^2 z_i^2\right],$$

$$\mathrm{w}_{0011}^{(i,j,n)} = 2n\left[\frac{1}{\rho_i^2} - \frac{2(n-1)}{\rho_i^4} z_i^2\right] x_i y_i,\quad \mathrm{w}_{0002}^{(i,j,n)} = n\left[\frac{z_i^2 - x_i^2}{\rho_i^2} + \frac{2(n-1)}{\rho_i^4} x_i^2 z_i^2\right].$$

$$T_1 = \frac{n}{\rho_i^2} - \frac{4n+1}{2(n+1)\sigma_{ij}^2},\quad T_2 = -\frac{n}{\rho_i^2} + \frac{n\sigma_{ij}^2}{\rho_i^4} - \frac{(4n+1)a_j^2}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2},$$

$$T_3 = \frac{n}{\rho_i^4}\left[2(n-1)a_j^2 - \sigma_{ij}^2\right] + \frac{a_j^2(4n+1)}{2(n+1)}\left[\frac{(n+2)(4n+3)}{\sigma_{ij}^4} - \frac{4n^2+5n-1}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2}\right],$$

$$T_4 = \frac{2n}{\rho_i^2} + \frac{4n\left[(n-1)a_j^2 - \sigma_{ij}^2\right]}{\rho_i^4} - \frac{(4n+1)\left(4n^2+3n-3\right)a_j^2}{(n+1)\rho_i^2\sigma_{ij}^2} + \frac{(n+2)(4n+1)(4n+3)a_j^2}{(n+1)\sigma_{ij}^4},$$

$$T_5 = \left[\frac{4(n-1)}{\rho_i^4} - \frac{(2n+3)(4n+1)}{(n+1)\rho_i^2\sigma_{ij}^2}\right] n a_j x_i y_i z_i,\quad T_6 = \frac{n}{n+1}\left[\frac{4\left(1-n^2\right)}{\rho_i^4} + \frac{(2n+1)(4n+7)}{\rho_i^2\sigma_{ij}^2}\right].$$

Коэффициенты для $\lambda = 3$ получены, в основном, с помощью специализированной компьютерной системы, а предыдущие - двумя способами: компьютерным и ручным. Формула для первого коэффициента $\mathrm{w}_{3000}^{(i,j,n)}$ может быть получена из выражения (18) простой заменой $a_1$ на $a_j$ , $\rho$ на $\rho_i$, $\sigma$ на $\sigma_{ij}$, $x$ на $x_i$, $y$ на $y_i$. Остальные девятнадцать коэффициентов $\mathrm{w}_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4}^{(i,j,n)}$ для $\lambda = 3$ имеют такой же громоздкий вид и в данной работе не приводятся в силу ограниченности ее объема.

## *ЕДИНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЕКОВОЙ ЧАСТИ ВОЗМУЩАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ С ТОЧНОСТЬЮ ДО ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО ($e_j$,$s_j$) И ЧЕТВЕРТОЙ СТЕПЕНИ ОТНОСИТЕЛЬНО ($e_i$, $s_i$, $e_j$, $s_j$) ВКЛЮЧИТЕЛЬНО*

Выполнение стандартных, но достаточно громоздких преобразований, необходимых для получения аналитического выражения функции $W_i$, требует нахождения определенных интегралов вида

$$\Phi^{(i,j,n)}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} = \frac{\left(a_i^2 + a_j^2\right)^{2n}}{2\pi a_i^{2n}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho_i^{2n}}{\left(a_i^2 + r_j^2\right)^{2n+1/2}} \mathrm{w}^{(i,j,n)}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} dM_i \,, \tag{29}$$

с помощью которых и определяется искомое выражение

$$W_i = \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{J} \mu_j \sum_{\nu=0}^{3} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \Phi^{(i,j,n)}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} B_n \zeta_{ij}^n \right] \mathrm{h}_j^{\nu_1} \mathrm{k}_j^{\nu_2} \mathrm{u}_j^{\nu_3} \mathrm{v}_j^{\nu_4} \quad , \tag{30}$$

где $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4$.

Подынтегральная функция в формуле (29) содержит координаты $i$-го спутника, вычисляемые по формулам невозмущенного кеплеровского движения. В формуле(30) верхний предел суммирования по $\nu$ определяется третьей степенью разложения по элементам $\mathrm{h}_j$, $\mathrm{k}_j$, $\mathrm{u}_j$, $\mathrm{v}_j$, поскольку слагаемые с $\nu = 4$ в принятом приближении не содержат элементов орбиты возмущаемого спутника $\mathrm{h}_i$, $\mathrm{k}_i$, $\mathrm{u}_i$, $\mathrm{v}_i$ и при вычислении производных по этим элементам (входящим в уравнения Лагранжа) дадут нуль. По этой же причине в формуле (6) опущены слагаемые, не зависящие от $\mathrm{h}_i$, $\mathrm{k}_i$, $\mathrm{u}_i$, $\mathrm{v}_i$, и для $\nu = 2$. Указанные составляющие вековой части возмущающей функции будут существенны лишь для учета короткопериодических возмущений средней аномалии $M_i$.

Степенной ряд относительно параметра

$$\zeta_{ij} = \tilde{\zeta}_j^{(i)} = \left( \frac{2a_i a_j}{a_i^2 + a_j^2} \right)^2 < 1 \tag{31}$$

даёт единое выражение как для внешних, так и для внутренних возмущающих спутников (независимо от соотношения $a_i$ и $a_j$). Использование одного этого ряда, вместо двух различных рядов по степеням отношений $a_i/a_j$ и $a_j/a_i$ , доставляет известные преимущества при программной реализации вычисления вековых возмущений. Однако, за такую универсальность приходится «расплачиваться» увеличением количества слагаемых в сумме по «$n$» (по сравнению с использованием коэффициентов Лапласа).

Для нахождения функций $\Phi^{(i,j,n)}_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4}$ , в основном, была использована специализированная компьютерная система символьных преобразований, позволившая контролировать правильность выполняемых «ручных» выкладок, выявлять и исправлять неизбежные в таком процессе ошибки.

Окончательное представление возмущающей функции взаимного притяжения спутников дается формулой

$$W_i = \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{J} W_{ji} = \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{J} \frac{\mu_j}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}} \sum_{\nu=0}^{3} \sum_{l=1}^{L_\nu} P^{(ij)}_{\nu,l}\left(a_i, a_j\right) \; Q^{(ij)}_{\nu,l}\left(\mathrm{h}_i, \mathrm{h}_j, \mathrm{k}_i, \mathrm{k}_j, \mathrm{u}_i, \mathrm{u}_j, \mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j,\right), \tag{32}$$

в которой разделены сомножители, зависящие лишь от больших полуосей спутниковых орбит, и лишь от их элементов Лагранжа. Число $L_\nu$, являющееся верхним пределом суммирования по $l$, зависит от степени элементов ($e_j$, $s_j$) и для $0 \le \nu \le 3$ не превышает 15.

В качестве вспомогательных функций больших полуосей $a_i$ , $a_j$ мы введем функции

$$C_{ij}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} n^m B_n \zeta_{ij}^n, \quad D_{ij}^{(m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^m}{n+1} B_n \zeta_{ij}^n \quad (m = 1,2,3,4), \tag{33}$$

связанные очевидным рекуррентным соотношением $D_{ij}^{(m+1)} = C_{ij}^{(m)} - D_{ij}^{(m)}$, а также параметр

$$\alpha_{ij} = \frac{a_i^2}{a_i^2 + a_j^2} = 1 - \frac{a_j^2}{a_i^2 + a_j^2}, \tag{34}$$

через который величина $\zeta_{ij}$ выражается более простой формулой $\zeta_{ij} = 4\alpha_{ij}(1-\alpha_{ij})$.

Далее для различных значений $\nu = 0, 1, 2, 3$ приводятся явные выражения коэффициентов $P_{\nu,l}^{(ij)}(a_i, a_j)$, $Q_{\nu,l}^{(ij)}(\mathrm{h}_i, \mathrm{h}_j, \mathrm{k}_i, \mathrm{k}_j, \mathrm{u}_i, \mathrm{u}_j, \mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j,)$. Слагаемые нулевой степени не зависят от элементов $\mathrm{h}_j$, $\mathrm{k}_j$, $\mathrm{u}_j$, $\mathrm{v}_j$ и содержат произведение $P_{0,1}^{(ij)} Q_{0,1}^{(i)}$, отвечающее известному случаю Лагранжа. Подобные «лагранжевы» произведения $P_{1,1}^{(ij)} Q_{1,1}^{(ij)}$, $P_{1,2}^{(ij)} Q_{1,2}^{(ij)}$ содержат и слагаемые первой степени.

Составляющие нулевой степени: $\nu = 0$, $L_0 = 5$

$$P_{0,1}^{(ij)} = \frac{1}{2} C_{ij}^{(1)}; \quad P_{0,2}^{(ij)} = \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{8}\alpha_{ij}\right) C_{ij}^{(1)} + \left(-\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\alpha_{ij}\right) C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{0,3}^{(ij)} = \frac{3}{16}\left(C_{ij}^{(2)} - C_{ij}^{(1)}\right); \quad P_{0,4}^{(ij)} = -\frac{3}{4} C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{0,5}^{(ij)} = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\alpha_{ij}\right) C_{ij}^{(1)} + \left(\frac{7}{8} - \alpha_{ij}\right) C_{ij}^{(2)};$$

$$Q_{0,1}^{(i)} = \mathrm{h}_i^2 + \mathrm{k}_i^2 - \mathrm{u}_i^2 - \mathrm{v}_i^2; \quad Q_{0,2}^{(i)} = \left(\mathrm{h}_i^2 + \mathrm{k}_i^2\right)^2; \quad Q_{0,3}^{(i)} = \left(\mathrm{u}_i^2 + \mathrm{v}_i^2\right)^2;$$

$$Q_{0,4}^{(i)} = \left(\mathrm{h}_i^2 + \mathrm{k}_i^2\right)\left(\mathrm{u}_i^2 + \mathrm{v}_i^2\right); \quad Q_{0,5}^{(i)} = \left(\mathrm{h}_i \mathrm{u}_i + \mathrm{k}_i \mathrm{v}_i\right)^2 - \left(\mathrm{k}_i \mathrm{u}_i - \mathrm{h}_i \mathrm{v}_i\right)^2.$$

Составляющие первой степени: $\nu = 1$, $L_1 = 8$

$$P_{1,1}^{(ij)} = -\left(\frac{1}{4} D_{ij}^{(1)} + D_{ij}^{(2)}\right)\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{1,2}^{(ij)} = C_{ij}^{(1)};$$

$$P_{1,3}^{(ij)} = \frac{1}{4} C_{ij}^{(1)} - \frac{3}{4} C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{1,4}^{(ij)}=\frac{3}{2}C_{ij}^{(2)};\quad P_{1,5}^{(ij)}=\left(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(1)}+\left(-\frac{7}{4}+2\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{1,6}^{(ij)}=\left(\frac{5}{16}D_{ij}^{(1)}+\frac{13}{8}D_{ij}^{(2)}+\frac{3}{2}D_{ij}^{(3)}\right)\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{1,7}^{(ij)}=-\left(\frac{3}{16}C_{ij}^{(1)}+\frac{3}{4}C_{ij}^{(2)}\right)\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{1,8}^{(ij)}=-\left[\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{16}\alpha_{ij}\right)D_{ij}^{(1)}+\left(\frac{9}{16}+\alpha_{ij}\right)D_{ij}^{(2)}+\left(\frac{1}{4}+\alpha_{ij}\right)D_{ij}^{(3)}\right]\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$Q_{1,1}^{(ij)}=\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j+\mathrm{k}_i\mathrm{k}_j;\ Q_{1,2}^{(ij)}=\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j;$$

$$Q_{1,3}^{(ij)}=\left(\mathrm{u}_i^2+\mathrm{v}_i^2\right)\left(\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j\right);$$

$$Q_{1,4}^{(ij)}=\left(\mathrm{h}_i^2+\mathrm{k}_i^2\right)\left(\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j+\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j\right);$$

$$Q_{1,5}^{(ij)}=\left(\mathrm{h}_i^2-\mathrm{k}_i^2\right)\left(\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j-\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j\right)+2\mathrm{h}_i\mathrm{k}_i\left(\mathrm{u}_i\mathrm{v}_j+\mathrm{v}_i\mathrm{u}_j\right);$$

$$Q_{1,6}^{(ij)}=\left(\mathrm{u}_i^2+\mathrm{v}_i^2\right)\left(\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j+\mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\right);$$

$$Q_{1,7}^{(ij)}=\left(\mathrm{u}_i^2-\mathrm{v}_i^2\right)\left(\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j-\mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\right)+2\mathrm{u}_i\mathrm{v}_i\left(\mathrm{h}_i\mathrm{k}_j+\mathrm{k}_i\mathrm{h}_j\right);$$

$$Q_{1,8}^{(ij)}=\left(\mathrm{h}_i^2+\mathrm{k}_i^2\right)\left(\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j+\mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\right).$$

Составляющие второй степени: $\nu=2,\quad L_2=15$

$$P_{2,1}^{(ij)}=\left(-\frac{3}{8}-\frac{21}{16}\alpha_{ij}+\frac{21}{16}\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(1)}+\left(-1-\frac{133}{16}\alpha_{ij}+\frac{133}{16}\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{9}{8}-14\alpha_{ij}+14\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(3)}+\frac{7}{4}\left(1-2\alpha_{ij}\right)^2D_{ij}^{(4)};$$

$$P_{2,2}^{(ij)}=\left(\frac{3}{8}+\frac{9}{16}\alpha_{ij}-\frac{9}{16}\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(1)}+\left(\frac{3}{2}+\frac{57}{16}\alpha_{ij}-\frac{57}{16}\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(2)}+$$

$$+\left(\frac{3}{8}+6\alpha_{ij}-6\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(3)}-\frac{3}{4}\left(1-2\alpha_{ij}\right)^2D_{ij}^{(4)};$$

$$P_{2,3}^{(ij)}=\left(\frac{1}{8}+\frac{7}{16}\alpha_{ij}-\frac{3}{16}\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(1)}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{39}{16}\alpha_{ij}-\frac{19}{16}\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(2)}+$$

$$+\left(-\frac{7}{8}+3\alpha_{ij}-2\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(3)}-\frac{1}{4}\left(1-2\alpha_{ij}\right)^2D_{ij}^{(4)};$$

$$P_{2,4}^{(ij)} = \left(-\frac{1}{8} + \frac{5}{16}\alpha_{ij} - \frac{9}{16}\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(1)} + \left(\frac{37}{16}\alpha_{ij} - \frac{57}{16}\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(2)} +$$

$$+\left(-\frac{5}{8} + 5\alpha_{ij} - 6\alpha_{ij}^2\right)D_{ij}^{(3)} - \frac{3}{4}\left(1 - 2\alpha_{ij}\right)^2 D_{ij}^{(4)};$$

$$P_{2,5}^{(ij)} = \left(-\frac{3}{2} - \frac{15}{4}\alpha_{ij} + \frac{15}{4}\alpha_{ij}^2\right)C_{ij}^{(1)} + \left(-\frac{7}{2} - 20\alpha_{ij} + 20\alpha_{ij}^2\right)C_{ij}^{(2)} + 5\left(1 - 2\alpha_{ij}\right)^2 C_{ij}^{(3)};$$

$$P_{2,6}^{(ij)} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\alpha_{ij} + \frac{3}{4}\alpha_{ij}^2\right)C_{ij}^{(1)} + \left(-\frac{3}{2} + 4\alpha_{ij}^2\right)C_{ij}^{(2)} + \left(1 - 2\alpha_{ij}\right)^2 C_{ij}^{(3)};$$

$$P_{2,7}^{(ij)} = -\left(\frac{1}{4}D_{ij}^{(1)} + \frac{11}{8}D_{ij}^{(2)} + \frac{3}{2}D_{ij}^{(3)}\right)\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{2,8}^{(ij)} = \left(\frac{1}{2}D_{ij}^{(1)} + \frac{19}{8}D_{ij}^{(2)} + \frac{3}{2}D_{ij}^{(3)}\right)\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{2,9}^{(ij)} = -\left(D_{ij}^{(1)} + \frac{41}{8}D_{ij}^{(2)} + \frac{9}{2}D_{ij}^{(3)}\right)\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{2,10}^{(ij)} = \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{4}\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(1)} + \left(\frac{1}{8} - \alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{2,11}^{(ij)} = \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{4}\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(1)} + \left(-\frac{13}{8} + \alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{2,12}^{(ij)} = -\frac{1}{8}C_{ij}^{(1)} + \frac{9}{8}C_{ij}^{(2)}; \quad P_{2,13}^{(ij)} = \frac{1}{8}C_{ij}^{(1)} + \frac{3}{8}C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{2,14}^{(ij)} = \left(\frac{3}{2} - \alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(1)} + \left(\frac{7}{2} - 4\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(2)}; \quad P_{2,15}^{(ij)} = -\frac{1}{2}C_{ij}^{(1)} + \frac{3}{2}C_{ij}^{(2)};$$

$$Q_{2,1}^{(ij)} = \mathrm{h}_i^2\mathrm{h}_j^2 + \mathrm{k}_i^2\mathrm{k}_j^2; \quad Q_{2,2}^{(ij)} = \mathrm{h}_i^2\mathrm{k}_j^2 + \mathrm{h}_j^2\mathrm{k}_i^2;$$

$$Q_{2,3}^{(ij)} = \mathrm{h}_j^2\mathrm{u}_i^2 + \mathrm{k}_j^2\mathrm{v}_i^2; \quad Q_{2,4}^{(ij)} = \mathrm{h}_j^2\mathrm{v}_i^2 + \mathrm{k}_j^2\mathrm{u}_i^2;$$

$$Q_{2,5}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j\mathrm{k}_i\mathrm{k}_j; \quad Q_{2,6}^{(ij)} = \mathrm{h}_j\mathrm{k}_j\mathrm{u}_i\mathrm{v}_i;$$

$$Q_{2,7}^{(ij)} = \left(\mathrm{h}_i\mathrm{u}_i - \mathrm{k}_i\mathrm{v}_i\right)\left(\mathrm{h}_j\mathrm{u}_j - \mathrm{k}_j\mathrm{v}_j\right); \quad Q_{2,8}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{k}_j\mathrm{u}_j\mathrm{v}_i + \mathrm{h}_j\mathrm{k}_i\mathrm{u}_i\mathrm{v}_j;$$

$$Q_{2,9}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j; \quad Q_{2,10}^{(ij)} = \mathrm{h}_i^2\mathrm{u}_j^2 + \mathrm{k}_i^2\mathrm{v}_j^2;$$

$$Q_{2,11}^{(ij)} = \mathrm{h}_i^2\mathrm{v}_j^2 + \mathrm{k}_i^2\mathrm{u}_j^2; \quad Q_{2,12}^{(ij)} = \mathrm{u}_i^2\mathrm{u}_j^2 + \mathrm{v}_i^2\mathrm{v}_j^2;$$

$$Q_{2,13}^{(ij)} = \mathrm{u}_i^2\mathrm{v}_j^2 + \mathrm{u}_j^2\mathrm{v}_i^2; \quad Q_{2,14}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{k}_i\mathrm{u}_j\mathrm{v}_j; \quad Q_{2,15}^{(ij)} = \mathrm{u}_i\mathrm{u}_j\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j.$$

Составляющие третьей степени: $\nu = 3, \quad L_3 = 8$

$$P_{3,1}^{(ij)} = \left[\frac{1}{16}\left(3\alpha_{ij} - 5\right)D_{ij}^{(1)} + \left(\alpha_{ij} - \frac{25}{16}\right)D_{ij}^{(2)} + \left(\alpha_{ij} - \frac{5}{4}\right)D_{ij}^{(3)}\right]\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{3,2}^{(ij)} = \left[\frac{1}{8}D_{ij}^{(1)} + \frac{11}{16}D_{ij}^{(2)} + \frac{3}{4}D_{ij}^{(3)}\right]\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{3,3}^{(ij)} = \left[\frac{1}{2}D_{ij}^{(1)} + \frac{41}{16}D_{ij}^{(2)} + \frac{9}{4}D_{ij}^{(3)}\right]\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$P_{3,4}^{(ij)} = -\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(1)} + \left(\frac{7}{4} - 2\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{3,5}^{(ij)} = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(1)} + \left(\frac{5}{4} + 2\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{3,6}^{(ij)} = \frac{1}{4}C_{ij}^{(1)} - \frac{3}{4}C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{3,7}^{(ij)} = -\left(\frac{1}{2} + \alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(1)} + \left(\frac{1}{2} - 4\alpha_{ij}\right)C_{ij}^{(2)};$$

$$P_{3,8}^{(ij)} = -\left(\frac{3}{8}C_{ij}^{(1)} + \frac{3}{2}C_{ij}^{(2)}\right)\sqrt{\zeta_{ij}};$$

$$Q_{3,1}^{(ij)} = \left(\mathrm{h}_j^2 + \mathrm{k}_j^2\right)\left(\mathrm{h}_i\mathrm{h}_j + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\right); \quad Q_{3,2}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j\mathrm{u}_j^2 + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\mathrm{v}_j^2;$$

$$Q_{3,3}^{(ij)} = \mathrm{h}_i\mathrm{h}_j\mathrm{v}_j^2 + \mathrm{k}_i\mathrm{k}_j\mathrm{u}_j^2; \quad Q_{3,4}^{(ij)} = \mathrm{h}_j^2\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{k}_j^2\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j;$$

$$Q_{3,5}^{(ij)} = \mathrm{k}_j^2\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{h}_j^2\mathrm{v}_i\mathrm{v}_j; \quad Q_{3,6}^{(ij)} = \left(\mathrm{u}_j^2 + \mathrm{v}_j^2\right)\left(\mathrm{u}_i\mathrm{u}_j + \mathrm{v}_i\mathrm{v}_j\right);$$

$$Q_{3,7}^{(ij)} = \mathrm{h}_j\mathrm{k}_j\left(\mathrm{u}_i\mathrm{v}_j + \mathrm{u}_j\mathrm{v}_i\right); \quad Q_{3,8}^{(ij)} = \mathrm{u}_j\mathrm{v}_j\left(\mathrm{h}_i\mathrm{k}_j + \mathrm{h}_j\mathrm{k}_i\right).$$

## *СОПОСТАВЛЕНИЕ С ИЗВЕСТНЫМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ*

Разложение возмущающей функции в планетной задаче с целью выразить ее через элементы кеплеровской орбиты выполнялось многими исследователями, начиная с Лагранжа. В последние годы наиболее детальный и полный вид разложения получен в уже упоминавшейся ранее работе [12]. Результаты вошли также в книгу [11]. В этих работах выполнено разложение возмущающей функции, обусловленной взаимным притяжением точечных тел (планет или спутников), движущихся вокруг центрального тела. Разложение приводится в явном виде, как функция от элементов кеплеровской орбиты. При этом используются специальные функции небесной механики: функции наклона, коэффициенты Ганзена (функции эксцентриситета) и коэффициенты Лапласа. Фактически разложение ведется по степеням малых эксцентриситетов и малых отношений больших полуосей возмущающего и возмущаемого тел.

В работе [12] дается также представление возмущающей функции в виде ряда по степеням эксцентриситетов и наклонов орбит. Разложение приводится в явном виде с точностью до 4-й степени этих малых параметров. Коэффициенты разложения выражены в конечном виде через коэффициенты Лапласа, вычисляемые с помощью рядов общего вида по степеням отношения больших полуосей орбит тел. Все формулы для возмущающей функции разделены на два варианта в зависимости от того, является ли возмущаемое тело внутренним или внешним по отношению к возмущаемому. В формулах легко выделить члены, не зависящие от средних долгот тел. Тогда эту часть разложения можно сравнить с результатами, приведенными выше. Мы сделали такое сравнение и далее рассмотрим его подробнее.

Индексами *i* и *j*, как и ранее, мы обозначаем номера возмущаемого и возмущающего спутников, соответственно. Согласно результатам работы [12], вековая часть возмущающей функции, которую (в отличие от второй из формул (1)) мы обозначим через $\overline{R}_{ij}$, выражается в виде

$$\overline{R}_{ij} = \frac{\mu_j}{a_j} \sum f_{j_0}\left(a_i / a_j\right) e_i^{j_1} e_j^{j_2} \tilde{s}_i^{j_3} \tilde{s}_j^{j_4} \cos\left(j_5 \pi_i + j_6 \pi_j + i_7 \Omega_i + j_8 \Omega_j\right), \text{ если } a_i < a_j$$

и

$$\overline{R}_{ij} = \frac{\mu_j}{a_i} \sum f_{j_0}\left(a_j / a_i\right) e_j^{j_1} e_i^{j_2} \tilde{s}_j^{j_3} \tilde{s}_i^{j_4} \cos\left(j_5 \pi_j + j_6 \pi_i + i_7 \Omega_j + j_8 \Omega_i\right), \text{ если } a_i > a_j,$$

где $\tilde{s}_i = \sin\left(I_i / 2\right)$, $\tilde{s}_j = \sin\left(I_j / 2\right)$, а суммирование ведется по всем значениям индексов $j_1$, $j_2$, $j_3$, $j_4$, $j_5$, $j_6$, $j_7$, $j_8$, для которых $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 = 0, 2, 4$ и коэффициенты отличны от нуля. В каждом слагаемом берется одна из функций $f_{j_0}(...)$ ($j_0$=1, 2, … , 26), которые выражены явно в конечном виде через коэффициенты Лапласа. В рассмотрение введены несколько видоизмененные элементы Лагранжа (индексы опущены):

$$\tilde{h} = e \sin\pi, \quad \tilde{k} = e\cos\pi, \quad \tilde{p} = \tilde{s}\sin\Omega, \quad \tilde{q} = \tilde{s}\cos\Omega, \tag{35}$$

через которые мы и выразили функцию $\overline{R}_{ij}$. В итоге получили

$$\overline{R}_{ij} = \frac{\mu_j}{a_j} \overline{R}_D\left(a_i, a_j, \tilde{h}_i, \tilde{h}_j, \tilde{k}_i, \tilde{k}_j, \tilde{p}_i, \tilde{p}_j, \tilde{q}_i, \tilde{q}_j\right), \text{ если } a_i < a_j \tag{36}$$

и

$$\overline{R}_{ij} = \frac{\mu_j}{a_i} \overline{R}_D\left(a_j, a_i, \tilde{h}_j, \tilde{h}_i, \tilde{k}_j, \tilde{k}_i, \tilde{p}_j, \tilde{p}_i, \tilde{q}_j, \tilde{q}_i\right), \text{ если } a_i > a_j, \tag{37}$$

где

$$\overline{R}_D\left(a_1, a_2, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2\right) = \sum N_{j_0} f_{j_0}\left(a_2 / a_1\right) \tilde{h}_1^{j_1} \tilde{h}_2^{j_2} \tilde{k}_1^{j_3} \tilde{k}_2^{j_4} \tilde{p}_1^{j_5} \tilde{p}_2^{j_6} \tilde{q}_1^{j_7} \tilde{q}_2^{j_8}, \tag{38}$$

а $N_{j_0}$ - целые числа. Сумма (38) содержит 153 слагаемых. В каждом слагаемом индексы $j_0$, $j_1$, $j_2$, $j_3$, $j_4$, $j_5$, $j_6$, $j_7$, $j_8$ и коэффициент $N_{j_0}$ принимают определенные значения. При этом $j_1 + j_2 + j_3 + j_4 + j_5 + j_6 + j_7 + j_8 = 0, 2, 4$.

В настоящей работе получено разложение вековой части возмущающей функции в виде (8)

$$W_i = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{J} W_{ij},$$

где $W_{ij} = \dfrac{\mu_j}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}} \sum_{\nu=0}^{3} \sum_{l=1}^{L_\nu} P_{\nu,l}^{(ij)}(a_i, a_j)\ Q_{\nu,l}^{(ij)}(\mathrm{h}_i, \mathrm{h}_j, \mathrm{k}_i, \mathrm{k}_j, \mathrm{u}_i, \mathrm{u}_j, \mathrm{v}_i, \mathrm{v}_j)$,

Это разложение можно преобразовать к элементам Лагранжа $\tilde{h},\ \tilde{k},\ \tilde{p},\ \tilde{q}$ (35)

$$W_{ij} = \frac{\mu_j}{\sqrt{a_i^2 + a_j^2}} \sum_{\nu=0}^{3} \sum_{l=1}^{L_\nu} K_{\nu,l}^{(ij)}(a_i, a_j)\ E_{\nu,l}^{(ij)}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j, \tilde{k}_i, \tilde{k}_j, \tilde{p}_i, \tilde{p}_j, \tilde{q}_i, \tilde{q}_j). \quad (39)$$

Здесь функции $E_{\nu,l}^{(ij)}(\tilde{h}_i, \tilde{h}_j, \tilde{k}_i, \tilde{k}_j, \tilde{p}_i, \tilde{p}_j, \tilde{q}_i, \tilde{q}_j)$ являются полиномами второй или четвертой степени относительно своих аргументов.

Далее полученное нами разложение было сопоставлено с тем, что предложено в работе [12]. Для этого в обеих частях нижеследующего тождества (имеющего очевидный небесно-механический смысл)

$$W_{ij} \equiv \overline{R}_{ij}$$

с использованием формул (36)-(39) мы приравняли коэффициенты при одинаковых комбинациях степеней элементов $\tilde{h}_i, \tilde{h}_j, \tilde{k}_i, \tilde{k}_j, \tilde{p}_i, \tilde{p}_j, \tilde{q}_i, \tilde{q}_j$. Таким образом были получены тождественные соотношения между функциями $K_{\nu,l}^{(ij)}(a_i, a_j)$ с одной стороны и $N_{j_0} f_{j_0}(a_i / a_j)$, $N_{j_0} f_{j_0}(a_j / a_i)$ - с другой. Число таких различных тождеств (с учетом равенства некоторых из коэффициентов) определяется суммой верхних пределов $L_0 + L_1 + L_2 + L_3$ суммирования по $l$ в формуле (36). Мы осуществили численную проверку выполнения всех этих 36 тождеств для пары самых массивных и самых далеких из главных спутников Урана: Титании ($a_i$ = 436253.070 км) и Оберона ($a_j$ = 583485.691 км). Заметим, что для этой пары единый параметр степенных разложений (33) имеет максимальную величину $\zeta_{ij} = 0.919$. Выполненные на различных этапах работы вычисления позволили корректировать процесс получения формул, выявить ошибки и убедиться в правильности наших окончательных выкладок.

## *ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ*

В данной работе предложен нетрадиционный подход к аналитическому нахождению вековой части возмущающей функции взаимного притяжения. Специфика найденного представления состоит в его симметрии относительно больших полуосей орбит возмущаемого и возмущающего тела. Буквенный вид полученного разложения по степеням малых параметров (эксцентриситетов и наклонений орбит взаимодействующих тел) допускает его использование не только для системы главных спутников Урана, которые в первую очередь интересуют авторов, но и спутников других планет-гигантов, а также и самих планет Солнечной системы. Конечно, для корректного анализа орбитальной эволюции в вековую часть возмущающей функции, вообще говоря, необходимо добавить и резонансные слагаемые, оказывающие в ряде случаев заметное влияние.

Заметим, что в случае ограниченной задачи, когда $m_i \to 0$, подобное выражение вековой части возмущающей функции, учитывающее лишь линейные слагаемые относительно малых параметров $e_j$, $s_j$ использовалось для анализа эволюции почти круговых астероидных орбит с малыми наклонениями к плоскости эклиптики [4].

# *ЛИТЕРАТУРА*


1. Антонов В.А., Никифоров И.И., Холшевников К.В. Элементы теории гравитационного потенциала и некоторые случаи его явного выражения. СПб. СПбГУ. 2008. 208 с.
2. Вашковьяк М.А. Численно-аналитический метод исследования эволюции астероидных орбит // Космические исследования. 1985. Т.23. С. 335-346.
3. Вашковьяк М.А. Исследование эволюции некоторых астероидных орбит // Космические исследования. 1986. Т.24. С. 323-336.
4. Вашковьяк М.А. Метод вычисления вековых возмущений астероидных орбит // Космические исследования. 1986. Т.24. С. 513-526.
5. Вашковьяк М.А., Вашковьяк С.Н. Силовая функция слабоэллиптического гауссова кольца и её обобщение на почти компланарную систему колец. // Астрономический вестник, 2012. Т 46. № 1. С. 72-80.
6. Гордеева Ю.Ф. Учёт влияния концентрированных масс в полуаналитическом методе расчета движения искусственных спутников Луны. В сб. «Определение движения космических аппаратов». М. Наука. 1975. С. 43.
7. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М. ФМ. 1963. 288 с.
8. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М. Мир. 2007. 512 с.
9. Ласкар Ж., Джекобсон Р. (Laskar J., Jacobson R.). GUST86 - an analytical ephemeris of the Uranian satellites. // Astronomy and Astrophysics. 1987. V. 188, № 1. P. 212-224.
10. Леней В. (Lainey V.). A new dynamical model for the Uranian satellites. 2008. Planetary and Space Science. V. 56. № 14. P. 1766-1772.
11. Мюррей К., Дермотт С. (Murray Carl D., Dermott Stanley F.) Динамика Солнечной системы. М. Физматлит, 2009, 588 с.
12. Эллис, Мюррей (Keren M. Ellis, Carl D. Murray). The Disturbing Function in Solar System Dynamics. // Icarus, 2000. V.147. P. 129–144.
13. Vashkovjak M.A. On the stability of circular ‘asteroid’ orbits in an N-planetary system // Cel. Mech. 1976. V.13. P. 313-324.