М. И. Дьяченко, Константы Лебега ядер Дирихле монотонного типа и сходимость кратных тригонометрических рядов,

Матем. заметки, 1988, том 44, выпуск 6, 758–769

https://www.mathnet.ru/mzm4199

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 44, № 6 (1988)

КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ЯДЕР ДИРИХЛЕ МОНОТОННОГО ТИПА И СХОДИМОСТЬ КРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

М. И. Дьяченко

§ 1. Введение. Приведем некоторые обозначения. Пусть m — натуральное число, а $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — m-мерные векторы. Тогда

$$xy = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j, \quad |x| = \sum_{j=1}^{m} |x_j|, \quad \|x\| = \left(\sum_{j=1}^{m} x_j^2\right)^{1/2},$$

$$\Pi(x) = \prod_{j=1}^{m} x_j \text{ и } \mathrm{d}x = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{d}x_j.$$

Скажем, что $x \leqslant y$, если $x_j \leqslant y_j$ при $1 \leqslant j \leqslant m$. Если a — число, то положим $x \pm a = (x_1 \pm a, \ldots, x_m \pm a)$. Скажем, что $x = a$ $(x \geqslant a)$, если $x - a = 0$ $(x - a \geqslant 0)$. Через $[a]$ обозначим целую часть числа a. Если $1 \leqslant j \leqslant m$, то положим $x(\hat{j}) = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m)$. Пусть $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} = \{u_{k_1,\ldots,k_m}\}_{k_1=1,\ldots,k_m=1}^{\infty,\ldots,\infty}$ — некоторый набор чисел, а m-мерные целочисленные векторы $l \geqslant n \geqslant 1$. Тогда

$$\sum_{k=n}^{l} u_k = \sum_{k_1=n_1}^{l_1} \ldots \sum_{k_m=n_m}^{l_m} u_{k_1,\ldots,k_m}.$$

Положим $T = [-\pi, \pi]$ и $\mathbf{R}_+^m = \{x \in \mathbf{R}^m : x > 0\}$. Если $1 \leqslant p < \infty$, 2π-периодическая функция $f(x) \in L_p(T^m)$ и измеримое $E \subseteq T^m$, то

$$\|f(x)\|_{p,E} = (2\pi)^{-m} \left(\int_E |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{p^{-1}} \text{ и } \|f(x)\|_p = \|f(x)\|_{p,T^m}.$$

Определение 1. Пусть U — ограниченнное целочисленное множество в $\mathbf{R}_+^m$. Тогда скажем, что U есть *целочисленное множество монотонного типа в* $\mathbf{R}_+^m$, или, для краткости, $U \in M(\mathbf{R}_+^m)$, если из того, что $k \in U$, а целочисленный вектор $l \in \mathbf{R}_+^m$ и $l \leqslant k$, вытекает, что $l \in U$.

Через $|U|$ ниже будет обозначаться число точек целочисленного множества U. Если V — ограниченное множество в $\mathbf{R}^m$, то положим ядро Дирихле

$$D_V(x) = \sum\nolimits_{k \in V} \exp(ikx).$$

В случае, когда $U \in M(\mathbf{R}_+^m)$, скажем, что $D_U(x)$ есть ядро Дирихле монотонного типа.

Ряд авторов решал следующую задачу. Пусть K — некоторое множество в $\mathbf{R}^m$, число $\rho > 1$ и

$$K_\rho = \{x \in \mathbf{R}^m: \quad x\rho^{-1} \in K\}.$$

Требуется оценить порядок роста $\| D_{K_\rho}(x)\|_1$ при $\rho \to \infty$. Нас будет прежде всего интересовать результат В. А. Юдина (см. [1]).

ТЕОРЕМА А. *Если $m \geqslant 2$ и K — замкнутое уравновешенное множество в $\mathbf{R}^m$ с ограниченной верхней поверхностной мерой в смысле Минковского, то* $\| D_{K_\rho}(x)\|_1 = O(\rho^{\frac{1}{2}(m-1)})$ *при* $\rho \to \infty$.

В § 3 нами будет получена оценка несколько иного характера.

ТЕОРЕМА 1. *Если $D_U(x)$ — ядро Дирихле монотонного типа, то*

$$\| D_U(x)\|_1 \leqslant 2\pi m! \, |U|^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln |U| + 1).$$

Вопрос об окончательности теоремы 1 остается открытым. В § 4 теорема 1 будет использована для изучения рядов вида

$$\sum\nolimits_{k=1}^{\infty} a_k \exp(ikx), \tag{1}$$

где

$$a_k \leqslant a_n \text{ при } n \leqslant k \text{ и } a_k \to 0 \text{ при } |k| \to \infty. \tag{2}$$

Ниже, если мы будем говорить: «Дан ряд вида (1)», выполнение условий (2) будет подразумеваться. Свойства таких рядов для $m = 2$ рассматривались в статье [2].

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $1 < p < \infty$. Тогда ряд вида (1) $A \in R_p$, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^p (\Pi(k))^{p-2} < \infty. \tag{3}$$

При $m = 1$, как было показано Г. Харди и Дж. Литтльвудом (см. [3, с. 657]), если $1 < p < \infty$, то ряд вида (1) $A \in R_p$ тогда и только тогда, когда он является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in L_p(T)$. Для $m = 2$ нами (см. [2]) доказано, что при $1 < p < \infty$ ряд Фурье функции $f(x) \in L_p(T^2)$, имеющий вид (1), принадлежит R_p. Это утверждение справедливо и для $m > 2$. Доказательство для случая $m > 2$ отличается от имеющегося в [2] лишь техническими деталями и здесь приводиться не будет. Из многомерного аналога другой теоремы Харди и Литтльвуда следует, что если $2 \leqslant p < \infty$ и

$$\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p (\Pi(k))^{p-2} < \infty, \tag{4}$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \exp(ikx) \tag{5}$$

является рядом Фурье функции $f(x) \in L_p(T^m)$. Тем более это справедливо для рядов вида (1). Известно, что если $p < 2$, то из выполнения (4), вообще говоря, не следует даже, что (5) является рядом Фурье. Однако справедлива

ТЕОРЕМА 2. *Если $p > \frac{2m}{m+1}$ и ряд вида (1) $A \in R_p$, то A является рядом Фурье некоторой функции $f(x) \in L(T^m)$ и сходится по Прингсхейму почти всюду на T^m. В то же время существует ряд вида (1) $A \in R_p$ при любом $p \in \left(1, \frac{2m}{m+1}\right)$, который не является рядом Фурье и расходится по кубам на множестве положительной меры.*

В статье [2] были получены утверждение о сходимости почти всюду и пример, усиливающий пример теоремы 2 для $m = 2$. Случай $m > 2$ потребовал привлечения совершенно иных соображений для доказательства.

З а м е ч а н и е 1. Неизвестно, существует ли ряд Фурье вида (1), расходящийся по Прингсхейму на множестве положительной меры.

§ 2. Вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 1. *Пусть m — натуральное число, $C \geqslant 1$, а $Y(m, C) = \{k \in \mathbf{R}_+^m$: k — целочисленный вектор и $1 \leqslant$*

$\leqslant \Pi(k) \leqslant C\}$. *Тогда*

$$|Y(m, C)| \leqslant C(\ln C + 1)^{m-1}. \tag{6}$$

Неравенство (6) проверяется индукцией по m. Оценки такого типа хорошо известны в теории чисел. Так, в книге А. А. Карацубы (см. [4, с. 60]) приведено неравенство

$$|Y(m, C)| \leqslant C\frac{(\ln C + m - 1)^{m-1}}{(m-1)!}. \tag{7}$$

Для достаточно больших C из неравенства (7) вытекает оценка (6)

ЛЕММА 2. *Пусть* $\alpha > 1$, $\beta > 0$ *и числа* $\{\lambda_j\}_{j=1}^r$ *таковы, что* $\lambda_j \geqslant r^\beta$ *при* $1 \leqslant j \leqslant r$. *Тогда*

$$\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j^\alpha\right)^{\beta+1} \geqslant \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j\right)^{\alpha\beta+1}.$$

В самом деле, имеем

$$\sum_{j=1}^r \lambda_j^\alpha \geqslant r^{\alpha\beta+1},$$

откуда по неравенству Гёльдера

$$\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j\right)^{\alpha\beta+1} \leqslant r^{(\alpha\beta+1)(1-1/\alpha)}\left(\sum_{j=1}^r \lambda_j^\alpha\right)^{1/\alpha(\alpha\beta+1)} \leqslant \left(\sum_{j=1}^r \lambda_j^\alpha\right)^{\beta+1}.$$

Введем следующее обозначение. Если натуральное $m \geqslant 2$ и $U \in M(\mathbf{R}_+^m)$, то при $1 \leqslant j \leqslant m$ определим множества $\Gamma(U, j) = \{k(\hat{j}) : \exists N_j$, для которого $(k_1, \ldots, k_{j-1}, N_j, k_{j+1}, \ldots, k_m) \in U$ и $N_j \geqslant \max_{r\neq j} k_r\}$. Заметим, что $\Gamma(U, j) \in M(\mathbf{R}_+^{m-1})$ для всех j.

ЛЕММА 3. *При* $m \geqslant 2$ *и* $1 \leqslant j \leqslant m$ *имеет место оценка*

$$|\Gamma(U, j)| \leqslant ((m-1)!)^{2(m-1)\cdot m^{-1}} \cdot |U|^{(m-1)\cdot m^{-1}}.$$

Доказательство. Докажем лемму при помощи метода индукции. При $m = 2$, если $\Gamma(U, 1) = \{1, \ldots, k_2\}$, то точка $(k_2, k_2) \in U$, а тогда $|U| \geqslant k_2^2 = |\Gamma(U, 1)|^2$. Аналогично оценивается $|\Gamma(U, 2)|$.

Пусть $m > 2$ и наша лемма уже доказана в пространствах размерности не больше $m - 1$. Фиксируем j и рассмотрим множества

$$\Gamma(U, j, r) = \\ = \{k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j) : |\{n(\hat{j}) \in \Gamma(U, j) : n_r = \\ = k_r\}| \geqslant k_r^{m-2}\}$$

при $1 \leqslant r \leqslant m,\ r \neq j,$

$$\Gamma(U, j, r)_\nu = \{n(\hat{j}) \in \Gamma(U, j, r) \colon n_r = \nu\}$$

при $1 \leqslant \nu \leqslant \nu_0 = \nu_0(U, j, r)$ и

$$S(U, j, r)_\nu = \{k \in U \colon k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j, r)_\nu\}.$$

Докажем вначале, что

$$\Gamma(U, j) = \bigcup\nolimits_{r \neq j} \Gamma(U, j, r). \tag{8}$$

Пусть $k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j)$. Тогда положим $s_0 \neq j$ таким, что

$$\min\nolimits_{s \neq j} k_s = k_{s_0}.$$

Так как $\Gamma(U, j) \in M(\mathbf{R}_+^{m-1})$, множество

$$A = \{l(\hat{j}) \colon l_{s_0} = k_{s_0}, \quad 1 \leqslant l_s \leqslant k_s,$$

при $s \neq j,\ s_0\} \subset \Gamma(U, j)$ и

$$|A| = \prod\nolimits_{s \neq j, s_0} k_s \geqslant k_{s_0}^{m-2},$$

откуда $k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j, s_0)$, и формула (8) доказана.

Далее, при фиксированном $\nu \in [1, \nu_0]$ множество $S(U, j, r)_\nu$, рассматриваемое как $(m-1)$-мерное, принадлежит $M(\mathbf{R}_+^{m-1})$ и

$$\Gamma(S(U, j, r)_\nu,\ j) = \Gamma(U, j, r)_\nu.$$

Кроме того, так как

$$\Gamma(U, j, r) \in M(\mathbf{R}_+^{m-1}),$$

имеем

$$|\Gamma(U, j, r)_\nu| \geqslant |\Gamma(U, j, r)_{\nu_0}| \geqslant \nu_0^{m-2}$$

при $1 \leqslant \nu \leqslant \nu_0$. Поэтому, применяя предположение индукции и лемму 2 для $\alpha = (m-1)(m-2)^{-1}$ и $\beta = m-2$, мы получим, что при любом r

$$|\Gamma(U, j, r)| = \sum\nolimits_{\nu=1}^{\nu_0} |\Gamma(U, j, r)_\nu| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum\nolimits_{\nu=1}^{\nu_0} |\Gamma(U, j, r)_\nu|^{(m-1)(m-2)^{-1}}\right)^{(m-1)\cdot m^{-1}} \leqslant$$

$$\leqslant ((m-2)!)^{2(m-1)\cdot m^{-1}} \left(\sum\nolimits_{\nu=1}^{\nu_0} |S(U, j, r)_\nu|\right)^{(m-1)\cdot m^{-1}} \leqslant$$

$$\leqslant ((m-2)!)^{2(m-1)\cdot m^{-1}} |U|^{(m-1)\cdot m^{-1}}.$$

Учитывая (8), окончательно получаем, что

$$|\Gamma(U, j)| \leqslant ((m-1)!)^{2(m-1)\cdot m^{-1}} \cdot |U|^{(m-1)\cdot m^{-1}}.$$

Что и требовалось доказать.

ЛЕММА 4. *Если $m \geqslant 2$, $1 < p < \infty$ и m-мерная последовательность чисел $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* (2) *и* (3), *то*

$$a_k \leqslant \varepsilon_k\,(\Pi\,(k))^{p^{-1}-1},$$

где последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (2).

Доказательство. Положим вектор

$$\left[\frac{k}{2}\right]+1=\left(\left[\frac{k_1}{2}\right]+1,\ldots,\left[\frac{k_m}{2}\right]+1\right),$$

$$\varepsilon_k^p=2^{mp}\cdot\sum\nolimits_{n=[k/2]+1}^{\infty}a_n^p\,(\Pi\,(n))^{p-2}\geqslant 2^{mp}\sum\nolimits_{n=[k/2]+1}^{k}a_n^p(\Pi\,(n))^{p-2}\geqslant$$

$$\geqslant a_k^p\cdot\prod_{r=1}^{m}\Big(2^p\sum\nolimits_{n_r=[k_r/2]+1}^{k_r}n_r^{p-2}\Big)\geqslant a_k^p\,(\Pi\,(k))^{p-1},$$

а это эквивалентно утверждению леммы.

ТЕОРЕМА Б (К. Сокол-Соколовский, см. [5, с. 94]). *Если $m \geqslant 2$, $1 < p < \infty$ и функция $f\,(x) \in L_p\,(T^m)$, то ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму в метрике $L_p\,(T^m)$.*

ЛЕММА 5. *Пусть $m \geqslant 2$, $1 \leqslant \nu < m$, а числа $\beta_r \downarrow 0$ и*

$$\beta_r=O\,(r^{-1/4(m-1)}\,(\ln r)^{2m})$$

при $r \to \infty$. Тогда кубичные частичные суммы ν-кра...ого ряда

$$\sum\nolimits_{r=1}^{\infty}\beta_r\sum\nolimits_{\|k\|^2=r}\exp\,(ikx)$$

равномерно ограничены в метрике $L\,(T^\nu)$.

Доказательство. Пусть $p = {}^3/_2$. Тогда, воспользовавшись теоремой А, получим, что при $\nu > 1$ (при $\nu = 1$ лемма очевидна)

$$\Big\|\sum\nolimits_{1\leqslant\|k\|^2\leqslant r}\exp\,(ikx)\Big\|_p=\|\,\varphi_r\,(x)\,\|_p\leqslant\|\,\varphi_r\,(x)\,\|_1^{1/3}\cdot\|\,\varphi_r\,(x)\,\|_2^{2/3}\leqslant$$

$$\leqslant C_1 r^{1/4(\nu-1)\cdot 1/3+1/4\nu\cdot 2/3}=C_1 r^{1/4\nu-1/12},$$

где C_1 — некоторая постоянная. Отсюда

$$\Big\|\sum\nolimits_{r=j}^{q}\beta_r\sum\nolimits_{\|k\|^2=r}\exp\,(ikx)\Big\|_p\leqslant\sum\nolimits_{r=j}^{q-1}(\beta_r-\beta_{r+1})\cdot$$

$$\cdot\|\,\varphi_r\,(x)-\varphi_{j-1}\,(x)\,\|_p+\beta_q\,\|\,\varphi_q\,(x)-\varphi_{j-1}\,(x)\,\|_p\leqslant$$

$$\leqslant 2C_1\left(\sum\nolimits_{r=j}^{q-1}(\beta_r-\beta_{r+1})\,r^{1/4\nu-1/12}+\beta_q\cdot q^{1/4\nu-1/12}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2C_1\,(\beta_j j^{1/4\nu-1/12}+\sum\nolimits_{r=j+1}^{\infty}\beta_r\,(r^{1/4\nu-1/12}-(r-1)^{1/4\nu-1/12}))\leqslant$$

$$\leqslant C_2\,(j^{1/4(\nu+1-m)-1/12}\,(\ln j)^{2m}+\sum\nolimits_{r=j+1}^{\infty}r^{1/4(\nu+1-m)-1-1/12}\,(\ln r)^{2m})\to 0$$

при $j \to \infty$, где C_2 — некоторая постоянная. Поэтому наш ряд есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_{3/2}(T^\nu)$ и по теореме Б кубичные частичные суммы этого ряда равномерно ограничены в метрике $L_{3/2}(T^\nu)$, а значит, и в метрике $L(T^\nu)$. Лемма 5 доказана.

ТЕОРЕМА В (К. И. Бабенко [6, с. 58—63]). *При* $m \geqslant 2$ *m-мерный ряд*

$$\sum\nolimits_{q=1}^{\infty}{}' q^{-1/8(m-1)} \sum\nolimits'_{\|k\|^2=q} \exp(ikx) = \sum\nolimits'_{k\neq 0} \| k \|^{-1/4(m-1)} \exp(ikx)$$

является рядом Фурье функции $f(x) \in L_p(T^m)$ *при* $1 < p < 4m/(3m+1)$, *а*

$$\varliminf_{\nu\to\infty} \nu^{-1/4(m-1)} \Big\| \sum\nolimits'_{1\leqslant\|k\|<\nu} \| k \|^{-1/4(m-1)} \exp(ikx) + \\ + \frac{1}{2}\nu^{-1/4(m-1)} \sum\nolimits'_{\|k\|=\nu} \exp(ikx) \Big\|_{1,E} \geqslant C_3 \int_E \| x \|^{-1/2(m+1)}\, dx$$

для произвольного измеримого $E \subseteq T^m$, *где постоянная* $C_3 > 0$.

ТЕОРЕМА Г (Л. В. Жижиашвили [7]). *Если* $m \geqslant 2$, *число* $\alpha > 0$ *и функция* $f(x) \in \mathrm{Lip}(\alpha, 1, T^m)$, *то ее ряд Фурье сходится по Прингсхейму почти всюду на* T^m.

ТЕОРЕМА Д ([8, с. 98 и 174]). *Если вектор* $M \geqslant 1$ *и* $P_M(x) = \sum_{k=1}^{M} b_k \exp(ikx)$, *то при любом* $h = (0, \ldots, 0, h_j, 0, \ldots, 0)$

$$\| P_M(x+h) - P_M(x) \|_1 \leqslant M_j \mid h_j \mid \| P_M(x) \|_1.$$

§ 3. Оценка роста констант Лебега. Докажем теорему 1. Для заданного U рассмотрим множества $\Gamma(U, j)$ (см. лемму 3),

$$V(U, j) = \{k \in U\colon k(\hat{j}) \in \Gamma(U, j)\}$$

при $1 \leqslant j \leqslant m$, $\Phi(U, 1) = V(U, 1)$ и

$$\Phi(U, j) = V(U, j) \setminus \bigcup\nolimits_{r=1}^{j-1} V(U, r)$$

при $2 \leqslant j \leqslant m$. Ясно, что если $k \in U$ и

$$k_{j_0} = \max\nolimits_{1\leqslant r\leqslant m} k_r,$$

то

$$k \in V(U, j_0).$$

Поэтому $U = \bigcup_{j=1}^{m} V(U, j) = \bigsqcup_{j=1}^{m} \Phi(U, j)$.

Далее, так как U и $\Gamma(U, j)$ при любом j являются множествами монотонного типа, то таковыми же будут и все $V(U, j)$. Итак, во-первых,

$$D_U(x) = \sum_{j=1}^{m} D_{\Phi(U,j)}(x), \tag{9}$$

а во-вторых,

$$D_{\Phi(U,j)}(x) = \sum_{k(\hat{j})\in\Gamma(U,j)} \exp(ik(\hat{j})\,x(\hat{j})) \sum_{r=\nu_1+1}^{\nu_2} \exp(irx_j),$$

где $\nu_q = \nu_q(k(\hat{j}))$ при $q = 1, 2$ — некоторые натуральные числа, причем $\nu_1 \leqslant \nu_2$ при любом $k(\hat{j})$ (если $\nu_1 = \nu_2$, считаем соответствующую сумму равной нулю). Отсюда (см. лемму 3)

$$\| D_{\Phi(U,j)}(x) \|_1 = (2\pi)^{-m} \int_T \left(\int_{T^{m-1}} \left| \sum_{k(\hat{j})\in\Gamma(U,j)} \exp(ik(\hat{j})\,x(\hat{j})) \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot \frac{\exp(ix_j)}{1-\exp(ix_j)} (\exp(i\nu_1 x_j) - \exp(i\nu_2 x_j)) \right| dx(\hat{j}) \right) dx_j \leqslant$$
$$\leqslant \int_T \frac{(2\pi)^{1/2(1-m)}}{2\,|x_j|} \left(\int_{T^{m-1}} \left| \sum_{k(\hat{j})\in\Gamma(U,j)} \exp(ik(\hat{j})\,x(\hat{j})) \cdot \right.\right.$$
$$\left.\left. \cdot (1 - \exp(i(\nu_2 - \nu_1)x_j)) \right|^2 dx(\hat{j}) \right)^{1/2} dx_j \leqslant \frac{1}{2} \int_T |x_j|^{-1} \cdot$$
$$\cdot \left(\sum_{k(\hat{j})\in\Gamma(U,j)} |1 - \exp(i(\nu_2 - \nu_1)x_j)|^2 \right)^{1/2} dx_j \leqslant 2\pi \cdot$$
$$\cdot \left(\sqrt{|\Gamma(U,j)|}\, \ln|U| + \int_0^{|U|^{-1}} \left(\sum_{k(\hat{j})\in\Gamma(U,j)} |\nu_2 - \nu_1|^2 \right)^{1/2} dx_j \leqslant \right.$$
$$\leqslant 2\pi \left(\sqrt{|\Gamma(U,j)|}\, \ln|U| + |U|^{-1} \sqrt{|U|} \left(\sum_{k(\hat{j})\in\Gamma(U,j)} \nu_2 \right)^{1/2} \leqslant \right.$$
$$\leqslant 2\pi \left(\sqrt{|\Gamma(U,j)|}\, \ln|U| + 1 \right) \leqslant$$
$$\leqslant 2\pi\,(m-1)!\,|U|^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln|U| + 1).$$

Учитывая (9), получаем утверждение теоремы 1.

§ 4. Некоторые свойства кратных тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами. Докажем положительное утверждение теоремы 2. Пусть ν — натуральное число и $1 \leqslant j \leqslant m$. Тогда определим вектор $n = n(\nu, j) = (n_1, \ldots, n_m)$, где $n_r = 0$ при $r \neq j$, а $n_j = \nu - 1$, и рассмотрим сумму

$$S_{n,M}(x) = \sum_{k=n+1}^{M} a_k \exp(ikx) = \exp(i(\nu-1)x_j) \cdot$$
$$\cdot \sum_{k=1}^{M-n} a_{k+n} \exp(ikx) = \exp(i(\nu-1)x_j) \sum_{k=1}^{M_1} d_k \exp(ikx), \tag{10}$$

где $M \geqslant n+1$. Ясно, что $d_k \geqslant d_l$ при $1 \leqslant k \leqslant l \leqslant M_1$ и (см. лемму 4)

$$d_k = a_{k+n} \leqslant \varepsilon_{k+n} (\Pi (k+n))^{p^{-1}-1} \leqslant \varepsilon_{n+1} (\Pi (k))^{p^{-1}-1}. \quad (11)$$

Положим $q = \Pi (M_1)$. Пусть $\{b_r\}_{r=1}^{q}$ — это числа $\{d_k\}_{k=1}^{M_1}$, занумерованные в порядке убывания, а при равенстве — в порядке неубывания номеров. Тогда

$$\| S_{n,M}(x) \|_1 = \left\| \sum\nolimits_{r=1}^{q-1} (b_r - b_{r+1}) D_{U_r}(x) + b_q D_{U_q}(x) \right\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \sum\nolimits_{r=1}^{q-1} (b_r - b_{r+1}) \| D_{U_r}(x) \|_1 + b_q \| D_{U_q}(x) \|_1,$$

где $D_{U_r}(x)$ — соответствующее ядро Дирихле. Множества $U_r \in M(\mathbf{R}_+^m)$, а потому (см. теорему 1)

$$\| S_{n,M}(x) \|_1 \leqslant 2\pi m! \left(\sum\nolimits_{r=1}^{q-1} (b_r - b_{r+1}) r^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln r + 1) + \right.$$
$$\left. + b_q q^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln q + 1) \right) = 2\pi m! \left(\sum\nolimits_{r=2}^{q} b_r (r^{(m-1)(2m)^{-1}} \cdot \right.$$
$$\cdot (\ln r + 1) - (r-1)^{(m-1)(2m)^{-1}} (\ln (r-1) + 1)) + b_1 \Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \sum\nolimits_{r=1}^{q} b_r r^{-(m+1)(2m)^{-1}} (\ln r + 1), \quad (12)$$

где постоянная C_4 зависит лишь от m. Обозначим через $\eta(r) = \max_{1 \leqslant \mu \leqslant r} \{\Pi(k), \text{ где } b_\mu = d_k\}$.

Предположим, что для некоторого r число

$$\eta(r) \leqslant r (\ln r + 1)^{-m+1}.$$

Тогда по лемме 1

$$r \leqslant r (\ln r + 1)^{-m+1} (1 + \ln (r (\ln r + 1)^{-m+1}))^{m-1} < r,$$

и мы пришли к противоречию. Стало быть,

$$\eta(r) > r (\ln r + 1)^{-m+1}$$

при любом r. Отсюда (см. также (11) и (12)) получаем

$$\| S_{n,M}(x) \|_1 \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \sum\nolimits_{r=1}^{q} \varepsilon_{n+1} (r (\ln r + 1)^{-m+1})^{p^{-1}-1} \cdot r^{-(m+1)/2m} (\ln r + 1) \leqslant$$
$$\leqslant C_4 \varepsilon_{n+1} \sum\nolimits_{r=1}^{q} r^{(m+1)/2m - \delta - 1 - (m+1)/2m} (\ln r + 1)^m \leqslant C_5 \varepsilon_{n+1}, \quad (13)$$

где число $\delta > 0$, а постоянная C_5 не зависит от M и n. Так как $\varepsilon_{n+1} \to 0$ при $\nu \to \infty$ и разность между прямоугольными частичными суммами нашего ряда представляется в виде суммы (разности) не более чем m выражений вида (10), из оценки (13) заключаем, что ряд сходится по Прингсхейму в метрике $L(T^m)$. Отсюда сразу вытекает, что наш ряд есть ряд Фурье.

Докажем его сходимость. Фиксируем $j \in [1, m]$ и вектор $h = (0, \ldots, 0, h_j, 0, \ldots, 0)$. Тогда для произвольного M такого, что $q = \Pi(M) > h_j^{-1}$, аналогично проведенному выше рассуждению (см. (11)—(13), а также теорему Д) будем иметь

$$\| S_{0,M}(x+h) - S_{0,M}(x) \|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{r=1}^{q-1} (b_r - b_{r+1}) \| D_{U_r}(x+h) - D_{U_r}(x) \|_1 +$$
$$+ b_q \| D_{U_q}(x+h) - D_{U_q}(x) \|_1 \leqslant h_j \sum_{r=1}^{[h_j^{-1}]} (b_r - b_{r+1}) r \cdot$$
$$\cdot \| D_{U_r}(x) \|_1 + 2C_4 \varepsilon_1 \sum_{r=[h_j^{-1}]+1}^{\infty} r^{-\delta-1} (\ln r + 1)^m \leqslant$$
$$\leqslant C_6 \left(h_j \sum_{r=1}^{[h_j^{-1}]} r^{-\delta} (\ln r + 1)^m + \sum_{r=[h_j^{-1}]+1}^{\infty} r^{-1-\delta} (\ln r + 1)^m \right) \leqslant$$
$$\leqslant C_7 h_j^{1/2\delta}, \qquad (14)$$

где число $\delta > 0$, а постоянные C_6 и C_7 не зависят от h_j и M. Ввиду произвольности j из оценки (14) вытекает, что существующая по доказанному ранее функция $f(x) \in \mathrm{Lip}\,(^1/_2\,\delta,\ 1,\ T^m)$, и для завершения доказательства первой части теоремы 2 остается лишь применить теорему Г.

Перейдем к доказательству второй части теоремы 2. Вначале определим m-кратный ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \exp(ikx), \qquad (15)$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} 0 \quad \text{при } k = 0, \\ A_r \| k \|^{-1/4(m-1)} \quad \text{при } (2m+1)^{r-1} < \| k \| < \\ \qquad < (2m+1)^r, \quad \text{где } r = 1, 2, \ldots, \\ \frac{1}{2} (A_{r+1} + A_r)(2m+1)^{-1/4 r(m-1)} \quad \text{при } \| k \| = \\ \qquad = (2m+1)^r, \quad \text{где } r = 0, 1, \ldots, \end{cases} \qquad (16)$$

а

$$A_r = \sum_{q=r}^{\infty} q^{2m} (2m+1)^{-1/4 q(m-1)} \quad \text{при } r = 0, 1, 2, \ldots$$

Рассмотрим кубичные частичные суммы ряда (15):

$$S_r(x) = \sum_{k=-(2m+1)^r}^{(2m+1)^r} \alpha_k \exp(ikx).$$

Тогда при любом $r \geqslant 2$

$$S_r(x) - S_{r-1}(x) =$$
$$= A_{r+1} \sum_{k=-(2m+1)^r,\ k\neq 0}^{(2m+1)^r} \| k \|^{-1/4(m-1)} \exp(ikx) +$$
$$+ (A_r - A_{r+1}) \Big(\frac{1}{2} \sum_{\|k\|=(2m+1)^r} (2m+1)^{-1/4 r(m-1)} \exp(ikx) +$$
$$+ \sum_{0<\|k\|<(2m+1)^r} \| k \|^{-1/4(m-1)} \exp(ikx) \Big) -$$
$$- A_r \sum_{k=-(2m+1)^{r-1},\ k\neq 0}^{(2m+1)^{r-1}}$$
$$\| k \|^{-1/4(m-1)} \exp(ikx) =$$
$$= A_{r+1} M_r(x) + r^{2m} (2m+1)^{-1/4 r(m-1)} \sigma_r(x) - A_r M_{r-1}(x).$$

По теореме В $M_r(x)$ являются кубичными частичными суммами ряда Фурье функции $f(x) \in L_{10/9}(T^m)$, а потому по теореме Б

$$\| M_r(x) \|_1 \leqslant \| M_r(x) \|_{10/9} \leqslant C_8 < \infty.$$

Тогда по той же теореме В для любого множества положительной меры $E \subseteq T^m$

$$\varlimsup_{r\to\infty} r^{-2m} \left\| S_r(x) - S_{r-1}(x) \right\|_{1,E} =$$
$$= \varlimsup_{r\to\infty} (2m+1)^{-1/4 r(m-1)} \| \sigma_r(x) \|_{1,E} \geqslant C_9 > 0,$$

где постоянная C_9 зависит лишь от m и E. Теперь отметим, что $S_r(x) = S_{r,1}(x) + S_{r,2}(x)$, где в $S_{r,1}(x)$ входят те и только те члены, у которых $k_j = 0$ хотя бы для одного j. Тогда $S_{r,1}(x)$ представляется в виде конечной линейной комбинации (с коэффициентами, не зависящими от r) сумм, оцененных в лемме 5, а значит,

$$\| S_{r,2}(x) - S_{r-1,2}(x) \|_{1,E} \geqslant \frac{1}{2} C_9 r^{2m} \tag{17}$$

для достаточно больших r. Но это означает, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' 2^m \alpha_k \prod_{j=1}^{m} \cos k_j x_j \tag{18}$$

расходится по кубам почти всюду. Если бы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}{}' \alpha_k \exp(ikx) \tag{19}$$

сходился по кубам почти всюду на T^m, то тем же свойством обладал бы и ряд (18), и мы пришли бы к противоречию. Следовательно, ряд (19) расходится по кубам на множестве положительной меры. Из аналогичных соображений следует, что для кубичных частичных сумм ряда (19) выполнена оценка (17) (с другой константой в правой части). Если предположить, что (19) является рядом Фурье, то норма его кубичной частичной суммы

$$\Big\| \sum_{k=1}^{(2m+1)^r} \alpha_k \exp(ikx) \Big\|_1 = O((\ln (2m+1)^r)^m) = O(r^m) \text{ при } r \to \infty.$$

Полученное противоречие доказывает, что (19) не является рядом Фурье. Нам осталось лишь проверить, что ряд (19) принадлежит R_p при $1 < p < 2m(m+1)^{-1}$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^p (\Pi(k))^{p-2} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{(2m+1)^{r-1} < \|k\| \leqslant (2m+1)^r,\ k \geqslant 1} \alpha_k^p (\Pi(k))^{p-2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{\infty} A_r^p (2m+1)^{-1/4p(r-1)(m-1)} \sum_{k=1}^{(2m+1)^r} (\Pi(k))^{p-2} \leqslant$$

$$\leqslant C_{10} \sum_{r=1}^{\infty} r^{2mp} (2m+1)^{-1/2rp(m-1)} (2m+1)^{rm(p-1)} =$$

$$= C_{10} \sum_{r=1}^{\infty} r^{2mp} (2m+1)^{-1/2r(m+1)(-p+2m/(m+1))} < \infty,$$

где C_{10} — некоторая постоянная. Что и требовалось доказать.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 27.11.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Юдин В. А. Поведение констант Лебега // Математические заметки. 1975. Т. 17, вып. 3. С. 401—405.
[2] Дьяченко М. И. О сходимости двойных тригонометрических рядов и рядов Фурье с монотонными коэффициентами // Мат. сб. 1986. Т. 129, вып. 1. С. 55—72.
[3] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
[4] Карацуба А. А. Основы аналитической теории чисел. М.: Наука, 1983.
[5] Жижиашвили Л. В. О некоторых вопросах из теории простых и кратных тригонометрических и ортогональных рядов //УМН. 1973. Т. 28, вып. 2. С. 65—119.
[6] Бабенко К. И. О сходимости в среднем кратных рядов Фурье и асимптотике ядра Дирихле сферических средних. Препринт № 52 ИПМ АН СССР, М., 1971.
[7] Жижиашвили Л. В. О сходимости кратных тригонометрических рядов Фурье // Сообщ. АН ГССР. 1975. Т. 80, № 1. С. 17—19.
[8] Никольский С. М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. М.: Наука, 1977.