ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1966 МАТЕМАТИКА № 4 (53)

УДК 517. 917

В. И. Жуковский

К УСЛОВНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ДВОЙНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

1. Постановка задачи

А. М. Ляпунов ([1], п. 24) указал на возможность существования в критических случаях условной устойчивости, то есть устойчивости невозмущенного движения для возмущений, подчиненных условиям вида $f=0$ или $f>0$, где f есть некоторая функция возмущений ([1], п. 1). В критическом случае двойного нулевого корня, которому отвечает непростой элементарный делитель, кроме достаточных условий устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения, Ляпунов привел ряд критериев условной устойчивости [2], [3].

Вопрос нахождения функций f в остальных критических случаях остается открытым. Ниже сформулирован принцип сведения [4] в случае условной устойчивости и найден вид функций f в критическом случае, когда система уравнений возмущенного движения автономна и характеристическое уравнение линейной системы первого приближения имеет двойной нулевой корень, которому отвечают простые элементарные делители характеристической матрицы, а все остальные корни (если порядок системы больше двух) с отрицательными вещественными частями. Достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости в этом критическом случае получены в работах [4], [5].

2. Принцип сведения в случае условной устойчивости

Рассмотрим систему уравнений r-го порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i^{(m)}(t, x_1, \ldots, x_r) + \ldots + X_i^{(N)}(t, x_1, \ldots, x_r) + \varphi_i(t, x_1, \ldots, x_r)$$

$$(i=1, 2, \ldots, r), \tag{2.1}$$

определенную в области

$$t \geqslant 0, \ |x_i| \leqslant H \ (H = \text{const} > 0). \tag{2.2}$$

Здесь $X_i^{(l)}$ — формы l-го порядка переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, коэффициенты которых являются непрерывными и ограниченными функциями времени, а φ_i обозначают совокупность всех членов порядка выше чем N. Обозначим через G область в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$, замыкание которой содержит точку покоя. (В п. 3 область G определится соотношением $f(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_r(0)) > 0$.) Пусть система (2.1) допускает решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_r = 0$.

Определение. Тривиальное решение системы (2.1) называется устойчивым для начальных возмущений $x_i(0) \in G$ ([1], п. 1) и вне зависимости от вида членов порядка выше чем N ([6], § 90) если для всякого положительного ε, как бы мало оно ни было, существует такое положительное число $\delta(\varepsilon, A)$, зависящее только от ε и A, что для всех решений уравнения (2.1), начальные значения которых выбраны согласно условиям $|x_i(0)| \leqslant \delta(\varepsilon, A)$; $x_i(0) \in G$, выполняются при всех $t \geqslant 0$ неравенства $|x_i(t)| < \varepsilon$ при всяком выборе функций $\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_r)$, удовлетворяющих в области (2.2) условиям

$$|\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_r| < A\{|x_1| + |x_2| + \dots + |x_r|\}^{N+1},$$

где A — некоторое целое положительное число.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения $(n+k)$-го порядка следующего вида:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta}{dt} &= Q(t)\eta + R(t)u + \Xi(t, \eta, u), \\ \frac{du}{dt} &= P(t)u + U(t, \eta, u), \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$Q(t) = \| q_{ij}(t) \|, \quad R(t) = \| r_{i\gamma}(t) \|, \quad P(t) = \| p_{\alpha\gamma}(t) \|,$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_k \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \Xi = \begin{pmatrix} \Psi_1(t, \eta, u) \\ \Psi_2(t, \eta, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \Psi_k(t, \eta, u) \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1(t, \eta, u) \\ U_2(t, \eta, u) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_n(t, \eta, u) \end{pmatrix}$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, k; \ \alpha, \gamma = 1, 2, \dots, n),$$

Ψ_i и U_α — ряды по степеням η_j и u_α, начинающиеся с членов не ниже второго порядка и сходящиеся в области $t \geqslant 0$, $|\eta_i| \leqslant H$, $|u_k| \leqslant H$, коэффициенты $r_{i\gamma}(t)$, $q_{ij}(t)$, $p_{\alpha\gamma}(t)$ — непрерывные и ограниченные функции времени t. Коэффициенты $p_{\alpha\gamma}(t)$ таковы, что для системы $\frac{du}{dt} = P(t)u$ выполнены требования критериев асимптотической устойчивости ([6], § 88).

Рассмотрим „укороченную" систему

$$\frac{d\eta}{dt} = Q(t)\eta + \Xi(t, \eta, 0). \tag{2.4}$$

Теорема. *Допустим, что тривиальное решение „укороченной" системы (2.4) устойчиво и ли асимптотически устойчиво для начальных возмущений $\eta_i(0) \in G$ и вне зависимости от вида членов порядка выше N. Тогда, если разложение функций $U_\alpha(t, \eta, 0)$ начинается членами порядка не ниже $N+1$, то тривиальное решение системы (2.3) соответственно устойчиво или асимптотически устойчиво для начальных возмущений $\eta_i(0) \in G$.*

Доказательство теорем аналогично доказательству, приведенному И. Г. Малкиным ([6], § 91). Если область G содержит точку покоя (а значит и ее ε-окрестность), то получаем известную теорему ([6], § 91).

3. Критический случай двух нулевых корней

Пусть автономная система дифференциальных уравнений возмущенного движения имеет голоморфную правую часть, и характеристическое уравнение линейной системы первого приближения имеет два нулевых корня, которым отвечают простые элементарные делители характеристической матрицы, и n корней с отрицательными вещественными частями.

Преобразованиями, предложенными в работах Г. В. Каменкова ([4], п. 7) или И. Г. Малкина ([6], § 93), исходную систему можно привести к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X^{(m)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots + X^{(N)}(x, y) + X(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\
\frac{dy}{dt} &= Y^{(m)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots + Y^{(N)}(x, y) + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n), \\
\frac{dx_s}{dt} &= p_{s1}x_1 + p_{s2}x_2 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n) \\
&\qquad (s = 1, 2, \ldots, n),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где 1) $X^{(l)}(x, y)$, $Y^{(l)}(x, y)$—формы l-го порядка относительно переменных x и y ($l = m, m+1, \ldots, N$; $m \geqslant 2$); 2) разложение по x и y голоморфных функций X, Y, X_s начинается с членов не ниже $(N+1)$-го порядка и существуют такие положительные постоянные A, B и K_s ($s = 1, 2, \ldots, n$), что $|X| < A(|x| + |y|)^{N+1}$, $|Y| < B(|x| + |y|)^{N+1}$, $|X_s| < K_s(|x| + |y|)^{N+1}$ в области (2.2); 3) матрица, составленная из элементов p_{ij}, постоянная, устойчивая.

Из сформулированной выше теоремы следует: если тривиальное решение системы

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= X^{(m)}(x, y) + X^{(m+1)}(x, y) + \ldots + X^{(N)}(x, y), \\
\frac{dy}{dt} &= Y^{(m)}(x, y) + Y^{(m+1)}(x, y) + \ldots + Y^{(N)}(x, y)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

устойчиво вне зависимости от членов порядка выше чем N и при $x(0) \in G$, $y(0) \in G$, то нулевое решение системы (3.1) устойчиво для начальных возмущений $x(0) \in G$ и $y(0) \in G$.

Предположим, что

$$\begin{aligned}
X^{(m)}(x, y) &= A_0x^m + A_1x^{m-1}y + \ldots + A_my^m, \\
Y^{(m)}(x, y) &= B_0x^m + B_1x^{m-1}y + \ldots + B_my^m.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Случай, когда разложение правых частей уравнений (3.2) начинается с различных степеней, можно трактовать как вырожденный, так как при сколь угодно малом повороте осей координат уравнения (3.2) переходят в уравнения того же типа, но разложение правых частей начинается с одинаковых степеней. Рассмотрим функцию $2V_0 = x^2 + y^2$. В силу системы (3.2)

$$\frac{dV_0}{dt} = x(X^{(m)} + X^{(m+1)} + \ldots) + y(Y^{(m)} + Y^{(m+1)} + \ldots).$$

В дальнейшем через g_i ($i = 0, 1, 2$) будем обозначать голоморфные функции, обращающиеся в нуль при $x = 0$. Тогда

$$\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{y=kx} = [a_0 + a_1k + \ldots + a_rk^r + g_0(k, x)]\,x^r,$$

где $r \geqslant m+1$, $a_j = \text{const}$, постоянную k определим ниже. Обозначим различные действительные корни уравнения $\varphi(k) = a_0 + a_1 k + \ldots + a_r k^r = 0$ через $k_1 < k_2 < \ldots < k_l$ $(l \leqslant r)$. Предположим, что функция

$$\varphi(k)\,x^r < 0 \tag{3.4}$$

при соответствующем выборе сколь угодно малого x $(x \in G)$ и $k \in (k_j,\ k_{j+1})$. Не ограничивая общности, считаем, что угол $(k_j + \alpha)\,x \leqslant y \leqslant (k_{j+1} - \alpha)\,x$ не содержит ось y-ов (α — малая положительная постоянная, которую определим ниже).

Далее рассмотрим функцию $V_1 = [y - (k_j + \alpha)\,x][y - (k_{j+1} - \alpha)\,x]$. Обозначим через

$$\Psi(k) = B_0 + (B_1 - A_0)\,k + (B_2 - A_1)\,k^2 + \ldots + (B_m - A_{m-1})\,k^m - A_m k^{m+1}.$$

Производная функции V_1 с учетом (3.2) и (3.3) имеет вид:

$$\left(\frac{dV_1}{dt}\right)_{y=(k_j+\alpha)\,x} = [k_j - k_{j+1} + 2\alpha]\left[\Psi(k) + \frac{\alpha}{1!}\,\frac{d\Psi}{dk} + \ldots + \frac{\alpha^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{d^{m+1}\Psi}{dk^{m+1}} + g_1(k,\alpha,x)\right]_{k=k_j} x^{m+1},$$

$$\left(\frac{dV_1}{dt}\right)_{y=(k_{j+1}-\alpha)\,x} = [k_{j+1} - k_j - 2\alpha]\left[\Psi(k) - \frac{\alpha}{1!}\,\frac{d\Psi}{dk} + \ldots + (-1)^{m+1}\frac{\alpha^{m+1}}{(m+1)!}\,\frac{d^{m+1}\Psi}{dk^{m+1}} + g_2(k,\alpha,x)\right]_{k=k_{j+1}} x^{m+1}.$$

Пусть

$$\Psi(k_j) = \left(\frac{d\Psi}{dk}\right)_{k_j} = \ldots = \left(\frac{d^{s-1}\Psi}{dk^{s-1}}\right)_{k_j} = \Psi(k_{j+1}) = \left(\frac{d\Psi}{dk}\right)_{k_{j+1}} = \ldots = \left(\frac{d^{q-1}\Psi}{dk^{q-1}}\right)_{k_{j+1}} = 0,$$

$$\left(\frac{d^s\Psi}{dk^s}\right)_{k_j} \neq 0, \quad \left(\frac{d^q\Psi}{dk^q}\right)_{k_{j+1}} \neq 0 \quad (s,\ q \leqslant m+1).$$

Выберем постоянные α и $h > 0$ настолько малыми, чтобы

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dV_0}{dt}\right)_{y=kx} = \operatorname{sign}\,[\varphi(k)\,x^r],$$

$$\operatorname{sing}\left(\frac{dV_1}{dt}\right)_{y=(k_j+\alpha)\,x} = \operatorname{sign}\left[(k_j - k_{j+1})\left(\frac{d^s\Psi}{dk^s}\right)_{k_j} x^{m+1}\right],$$

$$\operatorname{sign}\left(\frac{dV_1}{dt}\right)_{y=(k_{j+1}-\alpha)\,x} = \operatorname{sign}\left[(k_{j+1} - k_j)\,(-1)^q\left(\frac{d^q\Psi}{dk^q}\right)_{k_{j+1}} x^{m+1}\right]$$

при $|x| \leqslant h$, $k \in [k_j + \alpha,\ k_{j+1} - \alpha]$ $(k_{j+1} - k_j > 2\alpha)$. Если имеют место условия

$$\left(\frac{d^s\Psi}{dk^s}\right)_{k_j} x^{m+1} > 0, \quad \left(\frac{d^q\Psi}{dk^q}\right)_{k_{j+1}} (-1)^q x^{m+1} < 0 \tag{3.5}$$

при $x \in G$, то в пересечении областей $|x| \leqslant h$, $x \in G$, $(k_j + \alpha)\,x \leqslant y \leqslant (k_{j+1} - \alpha)\,x$ выполнены требования теоремы П. А. Кузьмина об устойчивости [7], следовательно, тривиальное решение системы (3.2), а значит и (3.1), при выполнении (3.4) и (3.5), обладает условной устойчивостью. Невозмущенное движение системы (3.2) устойчиво для начальных возмущений, подчиненных условиям $|x(0)| \leqslant h$, $x(0) \in G$, $(k_j + \alpha)x(0) \leqslant y(0) \leqslant (k_{j+1} - \alpha)x(0)$ вне зависимости от членов порядка выше чем r.

К разобранному в п. 3 критическому случаю приводятся критический случай одного нулевого и пары чисто мнимых корней ([4], гл. II или [6], § 96), критический случай двух пар чисто мнимых корней ([4], гл. III или [6], § 95) и соответствующие критические случаи для систем уравнений с периодическими коэффициентами ([4], п. 35 или [6], § 96).

Автор благодарит Г. В. Каменкова за обсуждение результатов работы и замечания.

г. Москва

Поступило
8 II 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М. — Л., 1950.

2. А. М. Ляпунов. *Исследование одного из особенных случаев задачи об* устойчивости движения Собр. соч., т II. Изд. АН СССР, М.—Л., 1956.

3. А. М. Ляпунов. Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения. Изд. Ленингр. ун-та, 1963.

4. Г. В. Каменков. Об устойчивости движения. Тр. Казанск. авиац. ин-та, № 9, 1939.

5. И. Г. Малкин. Некоторые вопросы теории устойчивости движения в смысле Ляпунова. Тр. Казанск. авиац. ин-та, № 7, 1937.

6. И. Г. Малкин. Теория устойчивости движения. „Наука", М., 1966.

7. П. А Кузьмин. К теории устойчивости движения. ПММ, т. XVIII, вып. 1, стр 125—127, 1954.

И. И. ЕНДОВИЦКИЙ. УСЛОВИЯ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В работе исследуется вопрос об ограниченности и неограниченности решений качественными методами. Формулируются необходимые и достаточные условия с использованием единственной предельной точки последовательностей, связанных с расстояниями между нулями решений. Выясняется зависимость предельной точки от параметра, входящего в периодический коэффициент уравнения. (Работа поступила в журнал „Математика" 7. II. 1966.)

Е. П. ПЕСКОВ. ОБ ОДНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В работе исследуется интегро-дифференциальное уравнение $x = Ahx$ (A—линейный интегральный оператор, h — оператор Немыцкого) в пространстве $\mathfrak{X}^{(n)}$ ($\mathfrak{X}^{(n)}$ — пространство n раз сильно непрерывно дифференцируемых вектор-функций $x(t)$ со значениями в некотором банаховом пространстве E). Доказываются теоремы существования и единственности решения. (Работа поступила в журнал „Математика" 26. V. 1965.)