Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Д. Х. Муштари, А. Н. Шерстнев, О способах введения топологии в случайных метрических пространствах,
Изв. вузов. Матем., 1966, номер 6, 99–106

https://www.mathnet.ru/ivm2777

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.91
12 декабря 2025 г., 14:53:17

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1966 МАТЕМАТИКА № 6 (55)

УДК 519.54

Д. Х. Муштари, А. Н. Шерстнев

О СПОСОБАХ ВВЕДЕНИЯ ТОПОЛОГИИ В СЛУЧАЙНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В настоящей заметке сопоставляются некоторые способы решения вопроса о естественной топологии в случайных метрических пространствах. Существует точка зрения [7], согласно которой естественной рамкой для изучения случайных метрических пространств считаются надлежащим образом обобщенные топологические структуры, подобно тому как обычные топологические структуры являются естественной рамкой для изучения метрических пространств. Здесь мы не будем касаться этого подхода.

Напомним для удобства нужные нам определения (детально ознакомиться с рассматриваемыми понятиями можно в статьях [3], [5]). Пусть B — множество всех функций ξ, определенных на вещественной прямой R и представимых в виде $1-F$, где F — функция распределения (непрерывная слева) некоторой *неотрицательной* случайной величины. Элементы множества B будем называть *вероятностными функциями*. В частности, всякая вероятностная функция ξ обладает свойствами: $\xi(0)=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\xi(x)=0$. Определим в множестве B структуру порядка отношением: $\xi(x)\leqslant\eta(x)$ для любого $x\in R$. Упорядоченное таким образом множество B имеет наименьший элемент Δ, который обладает свойством $\Delta(x)=0$ для любого $x>0$. Закон композиции μ, определяющий в упорядоченном множестве B структуру коммутативной *упорядоченной* полугруппы, будем называть *функцией треугольника*, если Δ — нейтральный элемент относительно этого закона. Отметим следующие примеры функций треугольника [3]:

$$\left.\begin{aligned}\mu_0(\xi,\ \eta)(x)&=\inf_{t\in I}\max\{\xi(tx),\ \eta((1-t)x)\},\\ \mu_1(\xi,\ \eta)(x)&=\inf_{t\in I}\min\{\xi(tx)+\eta((1-t)x),1\},\end{aligned}\right.\quad (\xi,\ \eta)\in B\times B,\ x\in R,$$

где $I=[0,\ 1]$. В дальнейшем под выражением $\mu(\xi_1,\ \xi_2,\ldots,\xi_n)$ будем понимать композицию вероятностных функций $\xi_1,\ldots,\xi_n$, определенную законом μ.

1. Определение. *Будем говорить, что в множестве $S=\{p,\ q,\ r,\ldots\}$ определена структура случайного квазиметрического пространства (или случайной квазиметрики), если задано отобра-*

жение $(p, q) \to pq$ *множества* $S \times S$ *в* B, *удовлетворяющее следующим условиям для всех* p, q, r *из* S:

(CM_I) $pq = \Delta$ *тогда и только тогда, когда* $q = p$,

(CM_{II}) $pq = qp$.

2. Определение. *Случайная квазиметрика называется случайной метрикой (или случайным метрическим пространством), если задана функция треугольника* μ, *причем для всех* p, q, r *из* S

(CM_{III}) $pq \leqslant \mu(pr, rq)$.

Будем называть *пространствами Менгера* случайные метрические пространства, в которых функции треугольника μ задаются соотношениями ([3], теорема 1):

$$\mu(\xi, \eta)(x) = \inf_{t \in I} \xi(tx)\, T\eta((1-t)x), \quad (\xi, \eta) \in B \times B, \quad x \in R,$$

где T — некоторая *t-функция*, то есть закон композиции, определяющий на отрезке I структуру коммутативной упорядоченной (по величине) полугруппы, причем 0 — нейтральный элемент относительно этого закона и $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0,\, \delta \downarrow 0} (u + \varepsilon)\, T(v + \delta) = uTv$, $(u, v) \in I \times I$. В частности, указанные выше функции треугольника μ_0 и μ_1 допускают подобное представление, если в качестве t-функций взять соответственно $\max(u, v)$ и $\min(u + v, 1)$.

3. Пример[1]. Пусть Q — метрическое пространство с функцией расстояния d, Ω — некоторое множество, $\mathfrak{A}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества Ω и m — вероятностная мера на $\mathfrak{A}$. Пусть $S = \{p, q, r, \ldots\}$ — семейство отображений множества Ω в Q таких, что для любых $(p, q) \in S \times S$, $x \in R$,

$$A_{pq}^{x} = \{\omega \in \Omega:\ d(p(\omega), q(\omega)) \geqslant x\} \in \mathfrak{A}.$$

Отношение „$m\{A_{pq}^{x}\} = 0$, если $x > 0$“ является отношением эквивалентности в S. Пусть $\dot{S} = \{\dot{p}, \dot{q}, \dot{r}, \ldots\}$ — фактор-множество множества S по этому отношению эквивалентности. Отображение $(\dot{p}, \dot{q}) \to \dot{p}\dot{q}$, определенное соотношением $\dot{p}\dot{q}(x) = m\{A_{pq}^{x}\}$, $(p, q) \in (\dot{p}, \dot{q})$, $x \in R$, является отображением множества $\dot{S} \times \dot{S}$ в B. Очевидно, это отображение определяет в $\dot{S}$ случайную квазиметрику. В силу неравенства треугольника для функции расстояния d имеем для всех p, q, r из S

$$A_{pq}^{x} \subset A_{pr}^{tx} \cup A_{rq}^{(1-t)x}, \quad t \in I, \quad x \in R.$$

Отсюда

$$\dot{p}\dot{q}(x) \leqslant \inf_{t \in I} [1,\ m\{A_{pr}^{tx}\} + m\{A_{rq}^{(1-t)x}\}] = \mu_1(\dot{p}\dot{r}, \dot{r}\dot{q})(x), \quad x \in R.$$

Таким образом, $\dot{S}$ — пространство Менгера с функцией треугольника μ_1. Мы будем называть его случайным метрическим пространством отображений. В частности, роль Q может играть числовая прямая R с функцией расстояния $d(x, y) = |x - y|$.

---

[1] Частным случаем конструкции примера 3 являются пространства, рассматриваемые Швайцером и Скларом в работе [8] (определение 1.1), где, в частности, исследовались вопросы подбора возможно лучших неравенств треугольника для пространств, в которых случайные величины $d(p(\omega), q(\omega))$ подвержены некоторым ограничениям. Результат примера 3, состоящий в том, что подобные пространства являются пространствами Менгера с функцией треугольника μ_1, покрывает соответствующие результаты работы [8] (теоремы 3.1, 4.1, замечание в конце $n^0 5$).

Замечание. Эти построения допускают некоторое обобщение: вместо σ-алгебры подмножеств множества Ω и вероятностной меры на ней можно взять *алгебру* множеств и заданную на этой алгебре положительную нормированную счетно-аддитивную функцию множества. Мы снова приходим к случайному метрическому пространству с функцией треугольника μ_1.

В случайных метрических пространствах близость двух точек p и q определяется вероятностной функцией pq. Если самой близкой точкой к точке p считать саму эту точку, то соответствующая вероятностная функция $pp = \Delta$ суть аналог нулевого расстояния в традиционной теории метрического пространства. Естественно считать поэтому точку q близкой к точке p, если соответствующая вероятностная функция pq близка в некотором смысле к Δ. Можно, например, под близостью вероятностных функций понимать их близость в смысле топологии $\mathfrak{T}$ на B, определяемой сходимостью: $\xi_n \to \xi$ тогда и только тогда, когда $\xi_n(x) \to \xi(x)$ в смысле топологии числовой прямой для любой точки непрерывности предельной функции ξ. В частности, базисом фильтра окрестностей точки Δ в топологии $\mathfrak{T}$ является система $\{b_{\varepsilon,\delta}\}_{\varepsilon,\delta>0}$, где $b_{\varepsilon,\delta} = \{\xi \in B : \xi(\delta) < \varepsilon\}$. В соответствии с этим окрестностями точки $p \in S$ естественно считать множества вида $N_p(\varepsilon, \delta) = \{q \in S : pq \in b_{\varepsilon,\delta}\}$. В том случае, если для всякой $p \in S$ система $\mathfrak{N}_p = \{N_p(\varepsilon, \delta)\}_{\varepsilon,\delta>0}$ удовлетворяет аксиомам базиса фильтра окрестностей точки p топологического пространства, мы приходим к топологии Швайцера — Склара [5]. Обозначим эту топологию через $\mathfrak{S}$. Было показано ([6], теорема 1), в частности, что в пространствах Менгера эта конструкция определяет структуру отделимого равномерного пространства [1]. Этот результат без труда обобщается на общие случайные метрические пространства.

4. Теорема. *Если функция треугольника μ такова, что отображение $\xi \to \mu(\xi, \xi)$ топологического пространства $(B, \mathfrak{T})$ в себя непрерывно в точке Δ, то во всяком случайном метрическом пространстве с этой функцией треугольника семейство $\mathfrak{N}_p$ является базисом фильтра окрестностей точки p в отделимом равномерном пространстве.*

Доказательство. Достаточно проверить, что семейство подмножеств произведения $S \times S$ вида $U(\varepsilon, \delta) = \{(p, q) \in S \times S : pq \in b_{\varepsilon,\delta}\}$ $(\varepsilon > 0,\ \delta > 0)$ удовлетворяет аксиомам базиса отделимой равномерной структуры ([1], гл. 2). Проверим, например, что для всяких ε, δ найдутся такие ε', δ', что

$$U(\varepsilon', \delta') \circ U(\varepsilon', \delta') \subset U(\varepsilon, \delta). \qquad (*)$$

Отметим сначала, что в силу условий теоремы отображение $(\xi, \eta) \to \mu(\xi, \eta)$ непрерывно в точке (Δ, Δ). Действительно, если $\xi_n \to \Delta$, $\eta_n \to \Delta$, то последовательность вероятностных функций ζ_n, определенных соотношением $\zeta_n(x) = \max\{\xi_n(x), \eta_n(x)\}$, $x \in R$, также сходится к вероятностной функции Δ, и, следовательно, $\mu(\zeta_n, \zeta_n) \to \Delta$. Теперь осталось воспользоваться тем, что закон композиции согласован с порядком в B: $\mu(\xi_n, \eta_n) \leqslant \mu(\zeta_n, \zeta_n)$ и поэтому $\mu(\xi_n, \eta_n) \to \Delta$.

Если теперь ε и δ фиксированы, то найдутся ε' и δ' такие, что $\mu(\xi, \eta) \in b_{\varepsilon,\delta}$ всякий раз, когда $(\xi, \eta) \in b_{\varepsilon',\delta'} \times b_{\varepsilon',\delta'}$. Пусть теперь

[1] При сопоставлении этой формулировки с теоремой 1 [6] следует помнить, что закон композиции T, соответствующий функции треугольника μ, удовлетворяет условию $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0, \delta \downarrow 0} (u + \varepsilon)\, T(v + \delta) = uTv$, $(u, v) \in I \times I$.

$(p, q) \in U(\varepsilon', \delta')$ и $(q, r) \in U(\varepsilon', \delta')$; тогда имеем в силу ($CM_{III}$): $pr(\delta) \leqslant \leqslant \mu(pq, qr)(\delta) < \varepsilon$, что доказывает (*).

5. Следствие. *В случайном метрическом пространстве отображений в числовую прямую топология $\mathfrak{S}$ определена, причём сходимость в смысле этой топологии эквивалентна сходимости соответствующих отображений по мере.*

6. Контрпример. *Покажем, что если условие непрерывности функции треугольника нарушено, то конструкция Швайцера—Склара, вообще говоря, не определяет в S топологии.*

Пусть функция треугольника μ такова, что существует последовательность $\xi_n \to \Delta$, для которой $\mu(\xi_n, \xi_n)$ не стремится к Δ (подобные функции треугольника существуют: см. ниже пример 7). Тогда существуют положительные числа ε, δ и подпоследовательность ξ_n' последовательности ξ_n такие, что $\mu(\xi_n', \xi_n') \geqslant \eta$ для всех n, где

$$\eta(x) = \begin{cases} \varepsilon, & \text{если } x \leqslant \delta, \\ 0, & \text{если } x > \delta. \end{cases}$$

Пусть $S = \{p, p_n, p_{nk}\}$, $n, k = 1, 2, \ldots$, и квазиметрика в S определена соотношениями: $pp_n = p_k p_{kn} = \xi_n'$; $p_n p_k = pp_{nk} = p_{mn} p_{mk} = \mu(\xi_n', \xi_k')$, если $n \neq k$; $pp_{nn} = \mu(\xi_n', \xi_n')$; $p_m p_{nk} = \mu(\xi_n', \xi_m', \xi_k')$, если $m \neq n$; $p_{nk} p_{ml} = \mu(\xi_n', \xi_k', \xi_m', \xi_l')$, если $n \neq m$.

Нетрудно проверить, что данная квазиметрика удовлетворяет неравенству треугольника (CM_{III}) с функцией треугольника μ. Таким образом, S—случайное метрическое пространство. Множество $N_p(\varepsilon, \delta)$ (где ε и δ — числа, входящие в определение η) не содержит ни одной точки p_{mn} и содержит все точки p_n, начиная с некоторого номера n_0, зависящего от ε и δ. В то же время всякое множество $N_{p_k}(\alpha, \beta)$ содержит точки вида p_{kn}, $n > n_0 = n_0(\alpha, \beta)$. Это противоречит, однако, тому, что $\mathfrak{N}_p$ — базис фильтра окрестностей точки p (нарушается аксиома (V_{IV}), [1], гл. 1, § 1, $n^0 2$).

Рассмотренный контрпример показывает, в частности, что указанный способ определения топологии не может являться универсальным для всех случайных метрических пространств хотя бы потому, что иногда он не приводит ни к какой топологии вообще. Отделимые топологии могут быть введены естественным образом в случайных квазиметрических пространствах, тем не менее, независимо от функций треугольника. Фиксируя некоторую топологию в множестве B вероятностных функций, можно, согласно общему принципу ([1], гл. 1, § 7), определить в S топологию как слабейшую из топологий, в которых некоторые отображения из S в B были бы непрерывными. Например, фиксируя в B упомянутую топологию $\mathfrak{T}$, определим на случайном квазиметрическом пространстве S топологию $\check{\mathfrak{S}}$ как слабейшую из топологий, в которых отображения $q \to pq$ непрерывны для всех $p \in S$. Стандартные рассуждения показывают, что семейство подмножеств множества S вида $U_q(p; x; \varepsilon) = \{r \in S: |pr(x) - pq(x)| < \varepsilon\}$, $p \in S$, где x — точка непрерывности функции $pq(\cdot)$, является системой образующих фильтра окрестностей точки q в топологии $\check{\mathfrak{S}}$. Так как $\mathfrak{T}$ — отделимая топология в B, то, учитывая (CM_I), получаем, что $\check{\mathfrak{S}}$ — отделимая топология.

Предлагаемая Куросаки [4] топология для случайных квазиметрических пространств по существу получена тем же методом. Отличие состоит в том, что в множестве B фиксируется другая, более сильная чем $\mathfrak{T}$, топология. Например, в ε-окрест-

ность точки $\Delta \in B$ Куросаки предлагает включать лишь вероятностные функции, обращающиеся в нуль в точках, меньших ε.

Известно, что топология пространства B, порожденная метрикой Леви $\delta(\xi, \eta) = \inf\{y : \xi(x+y) - y \leqslant \eta(x) \leqslant y + \xi(x-y), x \in R\}$, эквивалентна $\mathfrak{T}$. Отсюда нетрудно видеть, что семейство $\mathfrak{B} = \{V_p(\varepsilon)\}_{p \in S, \varepsilon > 0}$, $V_p(\varepsilon) = \{(q, r) : \delta(qp, pr) < \varepsilon\}$ является системой образующих фильтра окружений равномерной структуры в S, причем топология соответствующего равномерного пространства эквивалентна $\check{\mathfrak{S}}$.

Непосредственно ясно, что $\check{\mathfrak{S}}$ не слабее чем $\mathfrak{S}$. Следующий пример показывает, что даже если $\mathfrak{S}$ определена, она, вообще, не совпадает с топологией $\check{\mathfrak{S}}$.

7. Пример. Рассмотрим в качестве S множество $N = \{1, 2, \ldots\}$ натуральных чисел. Обозначим $\xi_0 = \Delta$; $\xi_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Зададим квазиметрику в N соотношением $mn = \xi_{|m-n|}$. Непосредственно проверяется, что N является случайным метрическим пространством с функцией треугольника μ:

$$\mu(\eta, \zeta) = \begin{cases} \eta, & \text{если } \zeta = \Delta, \\ \zeta, & \text{если } \eta = \Delta, \\ \mu_0(\eta, \zeta, \xi_1) & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (\eta, \zeta) \in B \times B,$$

Ясно, что топология $\mathfrak{S}$ определена и открытые множества в этой топологии суть все подмножества N, каждое из которых содержит все точки N, кроме конечного их числа. В то же время топология $\check{\mathfrak{S}}$ является дискретной: $U_m\left(m+1;\ 1;\ \frac{1}{6}\right) \cap U_m\left(m-1;\ 1;\ \frac{1}{6}\right) = \{m\}$, если $m > 1$; $U_1\left(2;\ 1;\ \frac{1}{6}\right) \cap U_1\left(4;\ 1;\ \frac{1}{6}\right) = \{1\}$.

Таким образом, два различных подхода к понятию близости, рассмотренные выше, приводят, вообще, к различным топологиям в случайных метрических пространствах, даже если в множестве B значений случайной метрики фиксирована одна и та же естественная топология $\mathfrak{T}$. Отметим в связи с этим, что в традиционной теории метрического пространства оба эти подхода приводят к одной и той же топологии. Действительно, при первом подходе следует считать точку Q метрического пространства „близкой" к P, если значение метрической функции $d(P, Q)$ близко, в смысле тополо ии числовой прямой, к нулю — расстоянию точки P до нее самой. В соответствии с этим фундаментальной системой окрестностей точки P следует считать множества вида $n_P(\varepsilon) = \{Q : d(P, Q) < \varepsilon\}$. Система $\{n_P(\varepsilon)\}_{\varepsilon > 0}$ удовлетворяет всем аксиомам базиса фильтра окрестностей топологического пространства, и мы приходим к обычной топологии метрического пространства. Точно такая же система окрестностей получается, если рассматривать в метрическом пространстве слабейшую из топологий, в которых отображения $Q \to d(P, Q)$ метрического пространства в числовую прямую непрерывны для всех точек P.

Следующее утверждение показывает, что наличие в случайном метрическом пространстве достаточно хорошего неравенства треугольника влечет совпадение топологий $\mathfrak{S}$ и $\check{\mathfrak{S}}$.

8. Теорема. *Если случайное метрическое пространство S обладает функцией треугольника μ, для которой отображения $\xi \to \mu(\xi, \eta)$ пространства $(B, \mathfrak{T})$ в себя непрерывны в точке Δ при всех μ, то топологии $\mathfrak{S}$ и $\check{\mathfrak{S}}$ в S совпадают.*

Отметим предварительно некоторые вспомогательные утверждения.

9. Лемма. *Для произвольной сходящейся последовательности ξ_n в пространстве $(B, \mathfrak{T})$ существует монотонно невозрастающая последовательность η_n вероятностных функций, которая мажорирует последовательность ξ_n (то есть $\xi_n \leqslant \eta_n$, $n = 1, 2, \ldots$) и сходится к тому же пределу.*

Действительно, искомую последовательность можно определить соотношением $\eta_n(x) = \inf\limits_{y<x} \sup\limits_{m \geqslant n} \xi_m(y)$, $x \in R$.

10. Лемма. *Если функция треугольника μ такова, что отображения $\xi \to \mu(\xi, \eta)$ пространства $(B, \mathfrak{T})$ в себя непрерывны в точке Δ при всех η, то отображение $\xi \to \mu(\xi, \xi)$ непрерывно в точке Δ.*

Доказательство. Пусть $\xi_n \to \Delta$, и рассмотрим последовательность η_n, отвечающую требованиям леммы 9. Поскольку $\mu(\xi_n, \xi_n) \leqslant \mu(\eta_n, \eta_n)$, то достаточно проверить, что $\mu(\eta_n, \eta_n) \to \Delta$. Последовательность $\mu(\eta_n, \eta_n)$ монотонно невозрастающая, и поэтому соответствующая предельная функция η_0 является элементом множества B. Используя условие леммы и учитывая, что $\eta_n \to \Delta$, получаем соотношение $\eta_0 = \lim\limits_{p \to \infty} \mu(\eta_{n+p}, \eta_{n+p}) \leqslant \lim\limits_{p \to \infty} \mu(\eta_{n+p}, \eta_n) = \eta_n$; $n = 1, 2, \ldots$, из которого следует немедленно, что $\eta_0 = \Delta$.

11. Лемма. *Пусть S — случайное метрическое пространство, и $p_n \to p$ в топологии $\mathfrak{S}$. Для всякой точки $q \in S$ последовательность $\{p_n q\}$ вероятностных функций содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой вероятностной функции.*

Доказательство. (а) По определению топологии $\mathfrak{S}$ отношение „$p_n \to p$ в топологии $\mathfrak{S}$“ влечет $\lim\limits_{n \to \infty} p_n p = \Delta$.

(б) Отсюда следует, в частности, что существует вероятностная функция ξ такая, что $p_n p \leqslant \xi$ при любом n. В силу (CM_{III}) получаем: $p_n q \leqslant \mu(\xi, pq)$ при любом n.

(в) Если $\zeta(x)$ — непрерывная слева функция, определенная на R, и некоторая мажорируемая последовательность $\xi_n \in B$ сходится к ζ в каждой точке непрерывности последней, то $\zeta \in B$.

(г) В силу (б) и (в) всякая сходящаяся подпоследовательность $\{p_{n_k} q\}$ последовательности $\{p_n q\}$ — существование такой подпоследовательности гарантируется известной теоремой ([2], стр. 234) — сходится к некоторой вероятностной функции.

8. Доказательство теоремы. В силу леммы 10 топология $\mathfrak{S}$ определена в S. Поэтому достаточно проверить, что для любой $q \in S$ соотношение $\lim\limits_{n \to \infty} p_n q = pq$ выполняется всякий раз, когда $p_n \to p$ в топологии $\mathfrak{S}$. Пусть $\{p_{n_k} q\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная сходящаяся к некоторой вероятностной функции подпоследовательность последовательности $\{p_n q\}$. Существование таких подпоследовательностей вытекает из леммы 11. Рассмотрим последовательности ξ_k и η_k, определенные требованиями леммы 9 для последовательностей $p_{n_k} p$ и $p_{n_k} q$ соответственно. Имеем тогда

$$pq \leqslant \mu(pp_{n_{k+l}}, p_{n_{k+l}} q) \leqslant \mu(\xi_{k+l}, \eta_{k+l}) \leqslant \mu(\xi_{k+l}, \eta_k).$$

Используя условие теоремы, получаем отсюда

$$pq \leqslant \lim_{k \to \infty} \lim_{l \to \infty} \mu(\xi_{k+l}, \eta_k) = \lim_{k \to \infty} \eta_k = \lim_{k \to \infty} p_{n_k} q.$$

В силу произвольности подпоследовательности $\{p_{n_k} q\}$, получаем

$pq(x) \leqslant \liminf_n p_n q(x)$, $x \in R$. С другой стороны, снова используя условие теоремы, имеем

$$pq(x) = \limsup_n \mu(p_n p, pq)(x) \geqslant \limsup_n p_n q(x),$$

где x — произвольная точка непрерывности функции pq. Эти соотношения завершают доказательство теоремы.

12. Следствие. *Во всяком пространстве Менгера топологии* $\mathfrak{S}$ *и* $\overset{\vee}{\mathfrak{S}}$ *эквивалентны.*

Для проверки этого утверждения достаточно заметить, что отображение $(u, v) \to uTv$ непрерывно в точках вида $(u, 0)$. Действительно, если $u_n \to u$, $v_n \to 0$, то

$$\liminf_n u_n T v_n \geqslant \liminf_n u_n = u = \lim_n [\max(u_n, u)]\, T v_n \geqslant \limsup_n u_n T v_n.$$

13. Следствие. *В случайном метрическом пространстве отображений топологии* $\mathfrak{S}$ *и* $\overset{\vee}{\mathfrak{S}}$ *эквивалентны.*

14. Контрпример. Покажем, что если условие теоремы нарушено, то топологии $\mathfrak{S}$ и $\overset{\vee}{\mathfrak{S}}$, вообще говоря, неэквивалентны. Допустим, что существуют $\eta \in B$ и последовательность $\xi_n \to \Delta$ такие, что $\mu(\xi_n, \eta)$ не стремится к η. Рассмотрим множество $S = \{p, q, p_1, p_2, \ldots\}$, и случайную метрику на этом множестве определим соотношениями: $pq = \eta$; $p_n p = \xi_n$; $p_n q = \mu(\xi_n, \eta)$; $p_n p_m = \mu(\xi_n, \xi_m)$, если $m \neq n$. Нетрудно видеть, что S — случайное метрическое пространство с функцией треугольника μ. Очевидно, $p_n \to p$ в топологии $\mathfrak{S}$, если последняя определена. В то же время $p_n q$ не стремится к pq.

Для корректности построений данного контрпримера следует еще отметить существование функций треугольника с упомянутым здесь свойством. Положим для произвольных ξ, η из B:

$$\mu(\xi, \eta)(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } \xi(x) \geqslant \frac{1}{2} \text{ и } \eta(y) > 0 \text{ для всякого } y < x, \\ & \text{либо } \eta(x) \geqslant \frac{1}{2} \text{ и } \xi(y) > 0 \text{ для всякого } y < x, \\ \max[\xi(x), \eta(x)] & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что μ — функция треугольника и удовлетворяет условиям теоремы 4. В то же время для вероятностных функций, определенных соотношениями

$$\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x > 1, \end{cases} \qquad \xi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{если } 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если } x > 1, \end{cases}$$

имеем $\xi_n \to \Delta$, $\mu(\eta, \xi_n)$ не стремится к η.

В традиционной теории метрического пространства функция расстояния d является непрерывной в естественной топологии. Для случайных метрик также имеет место аналогичный результат.

15. Теорема. *Если последовательности точек p_n и q_n случайного метрического пространства S сходятся соответственно к точкам p и q в топологии* $\overset{\vee}{\mathfrak{S}}$, *то* $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} p_n q_m = pq$ *в топологии* $\mathfrak{T}$.

Доказательство. Последовательности $\{p_n p\}$, $\{q_m q\}$ обладают некоторыми мажорантами. В силу $(\mathrm{CM}_{\mathrm{III}})$ $p_n q_m \leqslant \mu(p_n p, pq, q q_m)$, и, следовательно, множество $\{p_n q_m\}_{n,m=1}^{\infty}$ также имеет мажоранту в B. Поэтому, в силу пунктов (в) и (г) доказательства леммы 11, после-

довательность $\{p_n q_m\}$ содержит сходящиеся подпоследовательности. Пусть $\{p_{n_k} q_{m_l}\}$ — произвольная сходящаяся подпоследовательность подобного рода. Поскольку топология $\mathfrak{T}$ регулярна, то, по определению топологии $\check{\mathfrak{S}}$ и по известной теореме о двойном пределе ([1], гл. 1, § 8, предложение 8), получим, что $\lim\limits_{\substack{k\to\infty\\ l\to\infty}} p_{n_k} q_{m_l} = pq$. В силу произвольности сходящейся последовательности получаем окончательно, что $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}} p_n q_m = pq$.

г. Казань

Поступило
15 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Бурбаки. Общая топология. Физматгиз, М., 1958.
2. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей. Физматгиз, М., 1961.
3. А. Н. Шерстнев. О вероятностном обобщении метрических пространств. Учен. зап. Казанск. ун-та, т. 124, кн. 2, стр. 3—11, 1964.
4. I. Kurosaki. A note on statistical metric spaces. Proc. Japan Acad., v. 40, 6, p. 396—399, 1964.
5. B. Schweizer, A. Sklar. Statistical metric spaces. Pacif. J. Math., v. 10, p. 313—334, 1960.
6. B. Schweizer, A. Sklar, E. Thorp. The metrization of statistical metrics. Pacif. J. Math., v. 10, p. 673—675, 1960.
7. E. Thorp. Generalized topologies for statistical metric spaces. Fundam. math., t. 51, f. 1, 9—21, 1962.
8. B. Schweizer, A. Sklar. Statistical metric spaces arising from sets of random variables in Euclidean n-spaces. Теория вероятностей и ее применения, т. 7, стр. 456—465, 1962.