Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. Sh. Dorfman, B. V. Davydenko, Conjugate Heat Exchange for Flows past Elliptic Cylinders,
TVT, 1980, Volume 18, Issue 2, 334–340

https://www.mathnet.ru/eng/tvt10095

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.83
June 18, 2025, 14:50:13

ТЕПЛОФИЗИКА ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУР
Том 18 1980 № 2

УДК 536.24

СОПРЯЖЕННЫЙ ТЕПЛООБМЕН ПРИ ОБТЕКАНИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЦИЛИНДРОВ

Дорфман А. Ш., Давыденко Б. В.

Рассмотрена сопряженная задача теплообмена между эллиптическим цилиндром и обтекающей его жидкостью. Задача сводится к решению двумерного уравнения теплопроводности с граничным условием в виде обобщенного уравнения теплоотдачи. В результате решения определены температурные поля эллиптического цилиндра и плотности отводимого в жидкость теплового потока. Рассмотрено влияние геометрических характеристик тела и соотношения теплопроводности жидкости и твердого тела на процесс теплообмена. Проводится также сравнение полученных результатов с результатами решения той же задачи в обычной, несопряженной постановке.

Известные в литературе решения сопряженных задач относятся либо к безградиентным, либо к автомодельным обтеканиям. Это связано с тем, что расчет сопряженного теплообмена при произвольно изменяющемся вдоль обтекаемого тела градиенте давления оказывается существенно более сложным. В частности, для случая произвольного градиента давления до последнего времени не были построены функции влияния необогреваемого участка, что не позволяло воспользоваться часто применяемым при решении сопряженных задач (например, [1—5]) методом суперпозиции.

В работе [6] построены функции влияния общего вида. В данной работе они используются для изучения сопряженного теплообмена при обтекании эллиптических цилиндров. При этом сопряженная задача рассматривается в полной постановке без упрощений, возможных, когда обтекаемое тело считается тонким.

1. Постановка сопряженной задачи. Сведение к эквивалентной задаче теплопроводности. Эллиптический цилиндр (рис. 1) с внутренними источниками тепла обтекается несжимаемой жидкостью, скорость и температура которой U_∞ и T_∞ соответственно. Предполагается, что теплофизические характеристики заданы и не зависят от температуры. Требуется вычислить распределение температуры, плотности теплового потока и коэффициента теплоотдачи вдоль поверхности эллиптического цилиндра, а также температурное поле внутри цилиндра.

Рассматриваемая задача описывается системой уравнений, состоящей из уравнений пограничного слоя для жидкости и соответствующих граничных условий, уравнения теплопроводности для тела и условий сопряжения на поверхности тела.

В [6] путем анализа решения уравнений пограничного слоя и использования метода суперпозиции показано, что в общем случае, для безотрывного градиентного обтекания, плотность теплового потока на поверхности произвольного неизотермического тела может быть определена следующим выражением:

$$q_c=\frac{\lambda \mathrm{Nu}.T_\infty}{L}\left[\int_0^\Phi f\left(\frac{\xi}{\Phi}\right)\frac{dt_c}{d\xi}d\xi+t_c(0)\right], \qquad (1)$$

которое аналогично известному выражению для безградиентного обтекания. Здесь $t_c=(T_c-T_\infty)/T_\infty$ — безразмерный температурный напор; q_c — плотность теплового потока; Nu_* — число Нуссельта на изотермической поверхности; λ — коэффициент теплопроводности; L — характерный размер тела

$$\Phi=\int_0^S U dS, \tag{2}$$

где Φ — переменная Гертлера; U — скорость во внешнем течении вне пограничного слоя; S — координата, отсчитываемая вдоль контура тела.

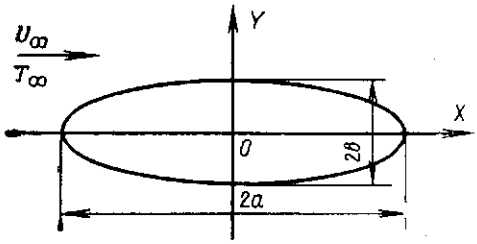

Рис. 1. Поперечное сечение эллиптического цилиндра

Входящая в (1) функция влияния необогреваемого участка

$$f(\xi/\Phi)=\mathrm{Nu}_\xi/\mathrm{Nu}_*$$

определяет изменение числа Нуссельта Nu_ξ за точкой $\Phi=\xi$, в которой температура поверхности, необогреваемой до этой точки, изменяется скачком. В [6] показано, что в общем случае градиентного обтекания функция влияния может быть представлена в виде

$$f(\xi/\Phi)=[1-(\xi/\Phi)^{c_1}]^{-c_2}, \tag{3}$$

аналогичном обычно используемому для безградиентных течений. Показатели c_1 и c_2 оказываются зависимыми от числа Pr и почти не зависящими от градиента давления. Соответствующие зависимости приведены в [6].

Так как (1) получено в результате решения уравнений пограничного слоя и справедливо при любом распределении температуры поверхности раздела, то при использовании равенств (1) и (3) для решения сопряженной задачи остается найти такое решение уравнения теплопроводности, которое бы в соответствии с условиями сопряжения обращалось на поверхности раздела в (1). Другими словами, использование равенства (1) сводит сопряженную задачу к задаче теплопроводности с граничным условием (1).

2. Решение задачи. Построим решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-\frac{q_v}{\lambda_T}=0.$$

В соответствии со сказанным выше будем считать, что на поверхности задано распределение плотности тепловых потоков, определяемое равенством (1). Принимая во внимание также симметрию рассматриваемой задачи, будем иметь следующие граничные условия:

$$-\lambda_T\frac{\partial T}{\partial n}\Big|_c=q_c,\quad \frac{\partial T}{\partial y}\Big|_{y=0}=0.$$

Здесь λ_T — коэффициент теплопроводности тела; q_v — мощность внут-

ренних источников тепла; n — нормаль к поверхности; индекс c относится к поверхности раздела.

Задачу удобно решать в эллиптических координатах u, v, связанных с декартовыми соотношениями

$$x=c\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\qquad y=c\,\mathrm{sh}\,u\sin v,$$

где $c=\sqrt{a^2-b^2}$; a и b — длины большой и малой полуосей эллипса соответственно.

Уравнение теплопроводности примет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial v^2}=Q_v(\mathrm{sh}^2 u+\sin^2 v). \tag{4}$$

Поскольку полуэллипс в эллиптических координатах переходит в прямоугольник, одна из сторон которого соответствует поверхности полуэллипса, а три других — оси симметрии, то вместо первого граничного условия имеем

$$\text{а)}\ \left.\frac{\partial t}{\partial v}\right|_{u=l}=-\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2 v}\,\frac{q_c a}{\lambda_T T_\infty},$$

а вместо второго — следующих три условия:

$$\text{б)}\ \left.\frac{\partial t}{\partial u}\right|_{u=0}=0,\qquad \text{в)}\ \left.\frac{\partial t}{\partial v}\right|_{v=0}=0,\qquad \text{г)}\ \left.\frac{\partial t}{\partial v}\right|_{v=\pi}=0.$$

Здесь $Q_v=q_v c^2/\lambda_T T_\infty$ — безразмерная мощность внутренних источников тепла; $l={}^1/_2\ln[(a+b)/(a-b)]$ — соответствующее поверхности эллипса значение координаты u, которое постоянно.

Решение уравнения (4) с граничными условиями б)—г), полученное методом разделения переменных, имеет вид

$$t=\frac{Q_v}{8}(\mathrm{ch}\,2u+\cos 2v)+N_0+\sum_{k=1}^{\infty}N_k\,\mathrm{ch}\,ku\cos kv. \tag{5}$$

Постоянные $N_0,\ldots,N_k$ необходимо определить из граничного условия а), в котором q_c определено равенством (1). Учитывая, что величина скорости потенциального течения около эллиптического цилиндра выражается соотношением

$$U=U_\infty(a+b)\sin v/\sqrt{a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v},$$

а дифференциал длины дуги эллипса представляется равенством $dS=\sqrt{a^2\sin^2 v+b^2\cos^2 v}$, из (2) получаем выражение для переменной Гертлера

$$\Phi=\left(1+\frac{b}{a}\right)(1-\cos v).$$

Здесь Φ отнесена к $U_\infty a$, где U_∞ — скорость невозмущенного потока. Перейдем в равенстве (1) от Φ к v. Тогда вместо переменной интегрирования ξ необходимо будет перейти к новой переменной ε, такой, что

$$\xi=(1+b/a)(1-\cos\varepsilon).$$

Равенство (1) при этом примет вид

$$q_c=\frac{\lambda\mathrm{Nu}.T_\infty}{a}\left[\int_0^v f\left[\frac{\xi(\varepsilon)}{\Phi(v)}\right]\frac{dt_c}{d\varepsilon}\,d\varepsilon+t_c(0)\right]$$

Для вычисления входящей сюда производной обратимся к (5). Положив в нем $u=l$, получим выражение для температурного напора, дифференци-

руя которое найдем

$$\frac{dt_c}{d\varepsilon}=-\frac{Q_v}{4}\sin 2\varepsilon-\sum_{k=1}^{\infty} kN_k \operatorname{ch} kl \sin k\varepsilon.$$

Соответственно для $t_c(0)$ из (5), а для функции влияния из (3) получаем

$$t_c(0)=\frac{Q_v}{8}(\operatorname{ch} 2l+1)+N_0+\sum_{k=1}^{k} N_k \operatorname{ch} kl,$$

$$f\left[\frac{\xi(\varepsilon)}{\Phi(v)}\right]=\left[1-\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{1-\cos v}\right)^{c_1}\right]^{-c_2}.$$

Подставляя эти результаты в (1), после небольших преобразований будем иметь следующее выражение для плотности теплового потока, вхо-

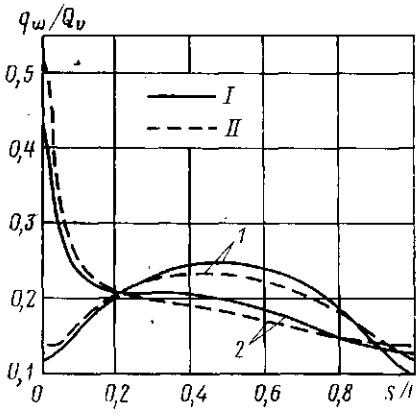

Рис. 2

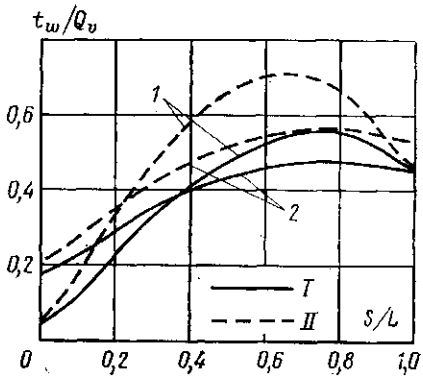

Рис. 3

Рис. 2. Распределение плотности теплового потока по поверхности эллиптического цилиндра при $A=4$: Pr=1: *1* — $\Lambda=0{,}1$; *2* — $\Lambda=1{,}0$; *I* — сопряженная задача, *II* — несопряженная задача

Рис. 3. Изменение температуры поверхности эллиптического цилиндра при $A=4$; Pr=1: *1* — $\Lambda=0{,}1$; *2* — $\Lambda=1{,}0$; *I* — сопряженная задача, *II* — несопряженная задача

дящего в правую часть граничного условия а):

$$q_c=\frac{\lambda T_\infty}{a}\mathrm{Nu}\cdot\left[\frac{Q_v}{4}(\operatorname{ch}^2 l-J_2)+N_0+\sum_{k=1}^{\infty} N_k \operatorname{ch} kl(1-kJ_k)\right],$$

$$J_k=\int_0^v\left[1-\left(\frac{1-\cos\varepsilon}{1-\cos v}\right)^{c_1}\right]^{-c_2}\sin k\varepsilon\, d\varepsilon.$$

Так как показатель c_2 не превосходит единицы, то интеграл J_k, имеющий особенность при $\varepsilon=v$, сходящийся. Используя равенство (5), можно также определить величину $\partial t/\partial u|_{u=l}$, входящую в левую часть граничного условия а)

$$\left.\frac{\partial t}{\partial u}\right|_{u=l}=\frac{Q_v}{4}\operatorname{sh} 2l+\sum_{k=1}^{\infty} kN_k \operatorname{sh} kl \cos kv.$$

Подставляя два последних равенства в граничное условие а) и собирая члены, содержащие неизвестные коэффициенты N_k, получим выражение

$$\frac{\Lambda}{4}\operatorname{sh} 2l+\frac{\mathrm{Nu}_{\cdot\cdot}}{4\sqrt{\mathrm{Re}}}(\operatorname{ch}^2 l-J_2)=$$

$$=-\frac{\mathrm{Nu}_{**}}{\sqrt{\mathrm{Re}}}n_0-\sum_{k=1}^{\infty}n_k\left[\frac{\mathrm{Nu}_{**}}{\sqrt{\mathrm{Re}}}\operatorname{ch}kl(1-kJ_k)+k\Lambda\operatorname{sh}kl\cos kv\right],$$

$$\Lambda=\frac{\lambda_T}{\lambda\sqrt{\mathrm{Re}}},\quad n_k=\frac{N_k}{Q_v},\quad \mathrm{Nu}_{**}=\mathrm{Nu}_*\sqrt{1-\frac{c^2}{a^2}\cos^2 v}. \tag{6}$$

Значение числа Нуссельта на изотермической поверхности Nu_* может быть вычислено каким-либо известным методом или взято по экспери-

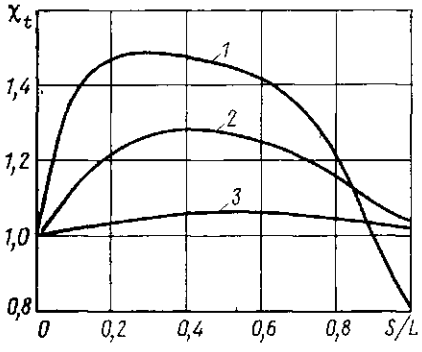

Рис. 4

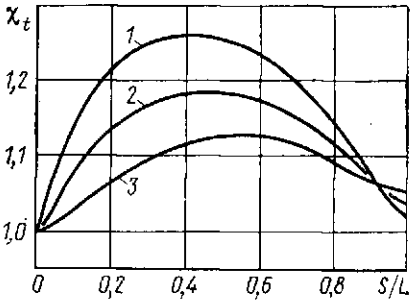

Рис. 5

Рис. 4. Зависимость коэффициента неизотермичности χ_t от продольной координаты при различных значениях параметра Λ ($A=4$; $\mathrm{Pr}=1$): *1* — $\Lambda=0{,}1$; *2* — $\Lambda=1{,}0$; *3* — $\Lambda=10$

Рис. 5. Зависимость коэффициента неизотермичности χ_t от продольной координаты при различных значениях параметра A ($\Lambda=1$; $\mathrm{Pr}=0{,}1$): *1* — $A=8$; $A=4$; $A=2$

ментальным данным. В данных расчетах использовалась формула

$$\mathrm{Nu}_*=g_0\tau_w^{1/2}/[(1+b/a)(1-\cos v)]^{1/4},$$

полученная в [7]. Необходимые значения напряжения трения определялись интегральным методом [8]. Для случая обтекания эллиптического цилиндра напряжение трения в предотрывной и отрывной областях считалось, как на пластине. Естественно, что это допущение будет выполняться тем более точно, чем тоньше цилиндр [8].

Итак, имея зависимость Nu_* от v, можно использовать равенство (6) для определения коэффициентов $n_0, \ldots, n_k$. Равенство (6) должно выполняться на всем интервале v от 0 до π. Ограничиваясь $k+1$ первыми членами ряда и приравнивая левую и правую части равенства (6) в $k+1$ точках из указанного интервала, получаем систему линейных алгебраических уравнений, позволяющих определить значения коэффициентов $n_0, n_1, \ldots, n_k$.

Численный расчет задачи проводился на БЭСМ-4. Число k принималось равным 20, что обеспечивало достаточную точность полученных результатов. Выяснялось влияние параметров Λ, $A=a/b$ и числа Pr на распределение температур в эллиптическом цилиндре и плотностей теплового потока. Некоторые результаты численного расчета приведены на рис. 2—7. Анализ полученных данных показал, что наибольшее влияние на характер зависимости q_w от длины дуги S оказывает параметр Λ. Так, при $\Lambda=1$ максимум плотности теплового потока приходится на область передней критической точки, в то время как при $\Lambda=0{,}1$ он оказывается смещенным ближе к оси OY. Это объясняется тем, что с изменением Λ меняется направление, в котором суммарное термическое сопротивление теплопроводности и теплоотдачи минимально (рис. 2).

Интерес представляет также сравнение величин t и q_w, полученных в результате решения сопряженной задачи с аналогичными величинами, рассчитанными при обычных граничных условиях третьего рода. Из рис. 3 видно, что при малых Λ ($\sim$0,1) имеет место существенное различие температур поверхности теплообмена (в отдельных точках в 1,5 раза). В то же время на величине q_w влияние сопряженности сказывается меньше. Более существенным становится отличие значений q_w с увеличением Λ (рис. 2).

Важной характеристикой сопряженного теплообмена является коэффициент неизотермичности [7] $\chi_t = \mathrm{Nu}/\mathrm{Nu}_*$. В данном случае на величины коэффициентов χ_t наибольшее влияние оказывает параметр Λ. На рис. 4

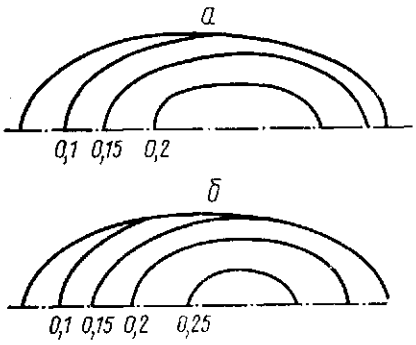

Рис. 6

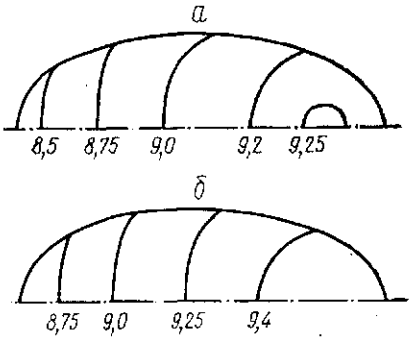

Рис. 7

Рис. 6. Поля температур эллиптического цилиндра при $A=2$; $\Lambda=0{,}1$; $\mathrm{Pr}=1{,}0$; $Q_v=-1$: *а* — сопряженная задача, *б* — несопряженная задача

Рис. 7. Поля температур эллиптического цилиндра при $A=2$; $\Lambda=10$; $\mathrm{Pr}=1{,}0$; $Q_v=-1$: *а* — сопряженная задача, *б* — несопряженная задача

представлена зависимость χ_t от продольной координаты S/L при различных значениях Λ. Как видно из графиков, при $\Lambda \geqslant 10$ коэффициенты неизотермичности мало отличаются от единицы. При меньших Λ зависимость χ_t от S становится более сложной. В области критической точки величины χ_t близки к единице. С увеличением S абсолютные значения χ_t возрастают и, достигнув максимума, начинают монотонно убывать. При этом на значительной части интервала изменения S, за исключением концевой области, меньшим параметрам Λ соответствуют бо́льшие величины коэффициентов неизотермичности. В концевой области имеет место обратная картина, когда при меньших Λ коэффициент χ_t убывает быстрее, чем при больших, и становится меньшим единицы.

Более существенное отличие χ_t от единицы наблюдается при больших A (рис. 5). Это объясняется затрудненностью перетоков тепла в направлении оси OX в случае тонких эллиптических цилиндров.

В заключение сравним распределения температур в эллиптическом цилиндре, полученные из решения задачи в сопряженной и несопряженной постановке. Из рис. 6, 7 видно, что в результате учета сопряженности получен более низкий общий температурный уровень цилиндра и что несопряженная постановка может привести к существенным неточностям в определении температур.

Приведенные результаты позволяют судить о том, в каких случаях влияние сопряженности оказывается существенным. Рассмотренные примеры относятся к случаю, когда источники тепла распределены равномерно по поперечному сечению цилиндра. Как видно из графиков, при такой схеме подвода тепла температурный напор на большей части цилиндра растет в направлении течения теплоносителя. Известно [7], что при таком характере изменения температурного напора влияние сопря-

женности существенно меньше, чем в случае, когда температурный напор падает в направлении течения теплоносителя. Несмотря на это, как видно из результатов расчета, влияние сопряженности в ряде случаев оказывается существенным. Это относится, в частности, к случаю малого относительного термического сопротивления цилиндра (малые Λ), а также к относительно тонким цилиндрам (рис. 4, 5).

Институт технической
теплофизики Академии наук УССР

Поступила в редакцию
28 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. *R. V. Viskanta, M. A. Abrams.* Intern. J. Heat Mass Transfer, *14*, № 9, 1971.
2. *И. Л. Дунин, В. В. Иванов, А. И. Кореньков.* ТВТ, *14*, № 2, 416, 1976.
3. *Ю. И. Швец, А. Ш. Дорфман, О. И. Диденко.* ДАН УССР. Сер. А, № 9, 817, 1975,
4. *U. Olsson.* Intern. J. Heat Mass Transfer, *16*, № 2, 329, 1973.
5. *M. S. Sohal, I. R. Howell.* Intern. J. Heat. Mass Transfer, *16*, № 11, 2055, 1973.
6. *А. Ш. Дорфман.* ТВТ, *11*, № 3, 561, 1973.
7. *А. Ш. Дорфман.* ТВТ, *9*, № 5, 955, 1971.
8. *Г. Шлихтинг.* Теория пограничного слоя. «Наука», 1969.