Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

E. A. Trushkova, Global control improvement algorithms, *Avtomat. i Telemekh.*, 2011, Issue 6, 151–159

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.84
February 16, 2025, 04:42:16

Автоматика и телемеханика, № 6, 2011

© 2011 г. **Е.А. ТРУШКОВА, канд. физ.-мат. наук**
(Институт программных систем имени А.К. Айламазяна РАН, Переславль-Залесский)

АЛГОРИТМЫ ГЛОБАЛЬНОГО ПОИСКА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ[1]

В рамках теории В.Ф. Кротова сформулирован подход к нелокальному улучшению на основе достаточных условий оптимальности и улучшения. Предлагаются конструктивные методы задания разрешающей функции, реализующие упомянутый общий подход Кротова для произвольных систем посредством линейных уравнений в частных производных и их дискретных аналогов – линейных рекуррентных соотношений. Приводятся примеры.

1. Введение

Различные итерационные методы улучшения управляемых процессов – обширная область исследований и разработок в теории оптимального управления, нацеленных на эффективное решение практических задач. Исторически развитие этих методов началось одновременно с созданием современной теории оптимального управления.

Метод глобального последовательного улучшения управления был предложен и получил дальнейшее развитие в [1–4] и ряде других работ. Этот метод обладает рядом преимуществ перед широко применяемыми методами локального улучшения процессов (например, отсутствием настроечных коэффициентов, меньшей зависимостью от начального приближения, реализацией посредством единственной пары прогонок и др.). Однако в большинстве алгоритмов использовалась наиболее простая, линейная функция, разрешающая основные соотношения метода глобального улучшения Кротова.

В данной работе развивается вариант глобального метода улучшения процессов, который сводит известные соотношения метода к более простым, а именно: в случае нелинейных управляемых процессов – к решению задачи Коши для линейного уравнения в частных производных, а в случае дискретных управляемых процессов – к решению линейных рекуррентных соотношений. Подобная модификация метода позволяет вести поиск разрешающей функции не только в линейном виде. Рассматриваются важные частные случаи и приводятся примеры.

2. Глобальное улучшение для непрерывных систем

Рассмотрим непрерывную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad t \in [t_I, t_F],\\ &x(t_I) = x_I, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U(t,x) \subset R^p, \qquad (1)\\ &J(x,u) = F\left(x(t_F)\right) \to \min. \end{aligned}$$

Задача улучшения ставится следующим образом: пусть известен допустимый элемент задачи (1) $\left(x^I(t), u^I(t)\right)$, требуется найти допустимый элемент задачи (1) $\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right)$, такой что $F\left(x^{II}(t_F)\right) < F\left(x^I(t_F)\right)$.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект №09-01-00170).

Для любой функции $\varphi(t,x)$ запишем конструкции, фигурирующие в достаточных условиях оптимальности [5, 6]:

$$L(x,u;\varphi) = G(x(t_F)) - \int_{t_I}^{t_F} R(t,x,u)dt - \varphi(t_I, x(t_I)),$$

где

$$G(\xi) = F(\xi) + \varphi(t_F, \xi),$$
$$R(t,x,u) = \varphi_x^T(t,x) f(t,x,u) + \varphi_t(t,x).$$

Заметим, что $L(x,u;\varphi) = J(x,u)$ на любой допустимой паре (x,u).

Основной алгоритм глобального улучшения [1, 2]:

0. Имеем начальный допустимый процесс $\left(x^I(t), u^I(t)\right)$.

1. Ищем $\varphi^0(t,x)$ из соотношений

$$R\left(t, x^I(t), u^I(t)\right) = \min_{x(t)} R\left(t, x(t), u^I(t)\right), \tag{2}$$

$$G\left(x^I(t_F)\right) = \max_x G(x). \tag{3}$$

2. Строим функцию

$$\widetilde{u}(t,x) = \arg \max_{u\in U(t,x^I(t))} R\left(t,x,u;\varphi^0\right). \tag{4}$$

3. Решая задачу Коши

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \widetilde{u}(t, x(t))\right), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс $\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right)$.

Алгоритм гарантирует неухудшение функционала, т.е. выполнение неравенства $J\left(x^I(t), u^I(t)\right) - J\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right) \geqslant 0$ [1].

Рассмотрим частный случай. А именно, будем искать функцию $\varphi^0(t,x)$ в предположении, что

$$R\left(t, x(t), u^I(t)\right) = 0, \quad t \in [t_I, t_F), \tag{5}$$

$$G(x) = -\varphi(t_I, x_I). \tag{6}$$

Тогда соотношения (2), (3) перепишутся в виде

$$\varphi_x^T(t,x) f\left(t, x, u^I(t)\right) + \varphi_t(t,x) = 0, \tag{7}$$

$$F(x) + \varphi(t_F, x) = 0. \tag{8}$$

Алгоритм глобального улучшения:

0. Имеем начальный допустимый процесс $\left(x^I(t), u^I(t)\right)$.

1. Ищем $\varphi^0(t,x)$ из соотношений (7), (8) как решение задачи Коши для уравнения в частных производных.

2. Строим функцию

$$\widetilde{u}(t,x) = \arg \max_{u\in U(t,x^I(t))} \left(\varphi_x^{0\,T}(t,x) f(t,x,u) + \varphi_t^0(t,x)\right). \tag{9}$$

3. Решая задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), \widetilde{u}(t, x(t))\right), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс $\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right)$.

Т е о р е м а 1. *Вышеописанный алгоритм глобального улучшения гарантирует неухудшение функционала, т.е. выполнение неравенства* $J\left(x^I(t), u^I(t)\right) - J\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right) \geqslant 0$. *Если же для функции* φ^0, *разрешающей соотношения* (7), (8), *условие* $R\left(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0\right) = \max\limits_{u \in U(t, x^I(t))} R\left(t, x^I(t), u; \varphi^0\right)$ $\forall t \neq T$ *не выполняется, то будет верно строгое неравенство* $J\left(x^I(t), u^I(t)\right) - J\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right) > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\begin{aligned}
&J\left(x^I(t), u^I(t)\right) - J\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right) = \\
&= L\left(x^I(t), u^I(t); \varphi^0\right) - L\left(x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0\right) = \\
&= G\left(x^I(t_F)\right) - G(x^{II}(t_F)) + \\
&+ \int\limits_{t_I}^{t_F} \left(R\left(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0\right) - R\left(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0\right)\right) dt = \\
&= G\left(x^I(t_F)\right) - G(x^{II}(t_F)) + \\
&+ \int\limits_{t_I}^{t_F} \left(R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R\left(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0\right)\right) dt + \\
&+ \int\limits_{t_I}^{t_F} \left(R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)\right) dt = \\
&= \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,
\end{aligned}$$

где

$$\Delta_1 = G\left(x^I(t_F)\right) - G(x^{II}(t_F)) = 0 \quad \text{в силу (6)},$$

$$\Delta_2 = \int\limits_{t_I}^{t_F} \left(R(t, x^{II}(t), u^{II}(t); \varphi^0) - R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0)\right) dt \geqslant 0 \quad \text{в силу (9)},$$

а при невыполнении условия $R\left(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0\right) = \max\limits_{u \in U(t, x^I(t))} R\left(t, x^I(t), u; \varphi^0\right)$ $\forall t \neq T$ в силу (9) верно $\Delta_2 > 0$,

$$\Delta_3 = \int\limits_{t_I}^{t_F} \left(R(t, x^{II}(t), u^I(t); \varphi^0) - R(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0)\right) dt \geqslant 0 \quad \text{в силу (5)}.$$

Укажем частные случаи постановки задачи оптимального управления (1), когда задача Коши для уравнения в частных производных (7), (8) уже сама является задачей Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Случай 1. Если в постановке задачи (1)

$$f(t, x, u) = A(t, u)x + B(t, u), \quad F(x) = \eta^T x,$$

то решение задачи Коши для уравнения в частных производных (7), (8) можно найти в виде $\varphi^0(t,x) = \nu(t) + \psi^T(t)x$, где $\nu(t)$, $\psi(t)$ являются решением задачи Коши для системы $n+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot\psi(t) = -A^T\left(t, u^I(t)\right)\psi(t), \quad \psi(t_F) = -\eta,\\
&\dot\nu(t) = -B^T\left(t, u^I(t)\right)\psi(t), \quad \nu(t_F) = 0.
\end{aligned}$$

Случай 2. Если в постановке задачи (1)

$$f(t,x,u) = A(t,u)x + B(t,u), \quad F(x) = \eta^T x + x^T\rho x,$$

то решение задачи Коши для уравнения в частных производных (7), (8) можно найти в виде $\varphi^0(t,x) = \nu(t) + \psi^T(t)x + x^T\sigma(t)x$, где $\nu(t)$, $\psi(t)$, $\sigma(t)$ являются решением задачи Коши для системы $n+n^2+1$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
&\dot\psi(t) = -A^T\left(t, u^I(t)\right)\psi(t) - 2\sigma(t)B\left(t, u^I(t)\right), \quad \psi(t_F) = -\eta,\\
&\dot\sigma(t) = -2\sigma(t)A\left(t, u^I(t)\right), \quad \sigma(t) = -\rho,\\
&\dot\nu(t) = -B^T\left(t, u^I(t)\right)\psi(t), \quad \nu(t_F) = 0.
\end{aligned}$$

3. Глобальное улучшение для дискретных систем

Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления

$$\begin{aligned}
&x(t+1) = f\left(t, x(t), u(t)\right), \quad t \in T = \{t_I, \ldots, t_F\},\\
&x(t_I) = x_I, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in U(t,x) \subset \mathbb{R}^p,\\
&F\left(x(t_F)\right) \to \min.
\end{aligned}$$

Задача улучшения ставится аналогично задаче улучшения для непрерывных систем.

Для любой функции $\varphi(t,x)$ запишем конструкции, фигурирующие в достаточных условиях оптимальности [5, 6]:

$$L(x,u;\varphi) = G(x(t_F)) - \sum_{t_I}^{t_F-1} R(t,x,u)dt,$$

где

$$\begin{aligned}
&G(\xi) = F(\xi) + \varphi(t_F,\xi) - \varphi(t_I,x_I),\\
&R(t,x,u) = \varphi(t+1, f(t,x,u)) - \varphi(t,x).
\end{aligned}$$

Заметим, что $L(x,u;\varphi) = F(x(t_F))$ на любой допустимой паре (x,u).

Основной алгоритм глобального улучшения:

0. Имеем начальный допустимый процесс $\left(x^I(t), u^I(t)\right)$.

1. Ищем $\varphi^0(t,x)$ из соотношений

$$\begin{aligned}
&R\left(t, x^I(t), u^I(t)\right) = \min_{x(t)} R\left(t, x(t), u^I(t)\right),\\
&t \in \{t_I, \ldots, t_F - 1\},
\end{aligned} \tag{10}$$

$$G\left(x^I(t_F)\right) = \max_x G(x). \tag{11}$$

2. Строим функцию

$$\widetilde{u}(t,x) = \arg \max_{u \in U(t,x^I(t))} R(t,x,u;\varphi^0). \tag{12}$$

3. Решая систему

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), \widetilde{u}(t,x(t))\right), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс $\left(x^1(t), u^1(t)\right)$.

Рассмотрим частный случай. А именно, будем искать функцию $\varphi^0(t,x)$ в предположении, что

$$R\left(t, x(t), u^I(t)\right) = 0, \quad t \in \{t_I, \ldots, t_F - 1\},$$
$$G(x) = -\varphi(t_I, x_I).$$

Тогда соотношения (10), (11) перепишутся в виде

$$\varphi(t,x) = \varphi\left(t+1, f\left(t, x, u^I(t)\right)\right), \quad t \in \{t_I, \ldots, t_F - 1\}, \tag{13}$$
$$\varphi(t_F, x) = -F(x). \tag{14}$$

Алгоритм глобального улучшения:

0. Имеем начальный допустимый процесс $\left(x^I(t), u^I(t)\right)$.

1. Ищем $\varphi^0(t,x)$ из соотношений (13), (14).

2. Строим функцию

$$\widetilde{u}(t,x) = \arg \max_{u \in U(t,x^I(t))} \left(\varphi^0(t+1, f(t,x,u)) - \varphi^0(t,x)\right). \tag{15}$$

3. Решая систему

$$x(t+1) = f\left(t, x(t), \widetilde{u}(t,x(t))\right), \quad x(t_I) = x_I,$$

находим улучшенный допустимый процесс $\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right)$.

Вышеописанный алгоритм глобального улучшения гарантирует неухудшение функционала, т.е. выполнение неравенства $J\left(x^I(t), u^I(t)\right) - J\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right) \geqslant 0$. Если же для функции φ^0, разрешающей соотношения (13), (14), условие $R\left(t, x^I(t), u^I(t); \varphi^0\right) = \max\limits_{u \in U(t,x^I(t))} R\left(t, x^I(t), u; \varphi^0\right)$ $\forall t \neq T$ не выполняется, то будет верно строгое неравенство $J\left(x^I(t), u^I(t)\right) - J\left(x^{II}(t), u^{II}(t)\right) > 0$. Оба последних утверждения доказываются аналогично теореме 1.

Пример 1. Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления

$$x(t+1) = 2x(t) + x^2(t) + 2x(t)u(t) + u^2(t), \quad t \in \{0,1,2\},$$
$$x(0) = -1,$$
$$F = x(2) \to \min.$$

Известно оптимальное решение задачи: $u_*(0) = 1$, $u_*(1) = 2$, $F_* = -4$.

Решим задачу с помощью алгоритма глобального улучшения (см. выше), задав некоторый начальный допустимый процесс.

0. Имеем начальный допустимый процесс $u^I(0) = 0$, $u^I(1) = 0$, $x^I(0) = -1$, $x^I(1) = -1$, $x^I(2) = -1$, $F(x^I(2)) = -1$.

1. Ищем $\varphi^0(t,x)$ из соотношений (13), (14):

$$\varphi^0(2,x) = -x,$$
$$\varphi^0(1,x) = \varphi^0\left(2, f(1,x,u^I(1))\right) = -2x - x^2,$$
$$\varphi^0(0,x) = \varphi^0\left(1, f(0,x,u^I(0))\right) = -2(2x+x^2) - (2x+x^2)^2.$$

2. Строим функции:

$$\widetilde{u}(1,x) = \arg\max_u \Big\{ -2x - x^2 - 2xu - u^2 + 2x + x^2 \Big\} =$$
$$= \arg\max_u \Big\{ -2xu - u^2 \Big\} = -x,$$
$$\widetilde{u}(0,x) = \arg\max_u \Big\{ -2(2x + x^2 + 2xu + u^2) -$$
$$-(2x + x^2 + 2xu + u^2)^2 + 2(2x + x^2) + (2x + x^2)^2 \Big\} =$$
$$= \arg\max_u \Big\{ -4xu - 4xu^3 - 8x^2u - 6x^2u^2 - 4x^3u - 6u^2 - u^4 \Big\}.$$

3. Находим улучшенный допустимый процесс $\big(x^{II}(t), u^{II}(t)\big)$: $x^{II}(0) = -1$, $u^{II}(0) = \arg\max_u \{-12u^2 + 4u^3 - u^4\} = 0$, $x^{II}(1) = -1$, $u^{II}(1) = 1$, $x^{II}(2) = -2$, $F(x^{II}(2)) = -2$.

4. Найденный улучшенный допустимый процесс принимаем за начальный допустимый процесс и повторяем все шаги алгоритма.

5. Имеем начальный допустимый процесс $u^I(0) = 0$, $u^I(1) = 1$, $x^I(0) = -1$, $x^I(1) = -1$, $x^I(2) = -2$, $F(x^I(2)) = -2$.

6. Ищем $\varphi^0(t,x)$ из соотношений (13), (14):

$$\varphi^0(2,x) = -x,$$
$$\varphi^0(1,x) = \varphi^0\left(2, f(1,x,u^I(1))\right) = -2x - x^2 - 2x - 1 = -x^2 - 4x - 1,$$
$$\varphi^0(0,x) = \varphi^0\left(1, f(0,x,u^I(0))\right) = -2(2x+x^2)^2 - 4(2x+x^2) - 1.$$

7. Строим функции:

$$\widetilde{u}(1,x) = \arg\max_u \Big\{ -2x - x^2 - 2xu - u^2 + x^2 + 4x + 1 \Big\} =$$
$$= \arg\max_u \Big\{ -2xu - u^2 + 2x + 1 \Big\} = -x,$$
$$\widetilde{u}(0,x) = \arg\max_u \Big\{ -(2x + x^2 + 2xu + u^2)^2 -$$
$$-4(2x + x^2 + 2xu + u^2) - 1 + (2x + x^2)^2 + 4(2x + x^2) + 1 \Big\} =$$
$$= \arg\max_u \Big\{ -6x^2u^2 - u^4 - 8x^2u - 4xu^2 - 4x^3u - 4xu^3 - 8xu - 4u^2 \Big\}.$$

8. Находим улучшенный допустимый процесс $\big(x^{II}(t), u^{II}(t)\big)$: $x^{II}(0) = -1$, $u^{II}(0) = \arg\max_u \{-u^4 + 4u^3 - 6u^2 + 4u\} = 1$, $x^{II}(1) = -2$, $u^{II}(1) = 2$, $x^{II}(2) = -4$, $F(x^{II}(2)) = -4$. Он же является оптимальным процессом в исходной задаче.

4. Глобальное улучшение для непрерывных систем с линейным неограниченным управлением

Рассмотрим задачу улучшения начального элемента $\left(x^I(t), u^I(t)\right)$ для задачи вида

$$
\begin{aligned}
&\dot{x} = f(t,x,u) = g(t,x,u_1) + h(t,x)u_2, \quad t \in [t_I, t_F],\\
&u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^p, \quad u_1 \in \mathbf{U}(t,x) \subset \mathbb{R}^{p-1},\\
&x(t_I) = x_I, \quad F\left(x(t_F)\right) \to \inf .
\end{aligned} \tag{16}
$$

Здесь

$x(t)$ – непрерывная, кусочно-гладкая фазовая траектория,

$u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ – кусочно-непрерывное управление.

Попробуем применить глобальный метод улучшения, описанный выше. А именно, для начального допустимого процесса $\left(x^I(t), u^I(t)\right)$ найдем $\varphi^0(t,x)$ из соотношений (7), (8).

При дальнейшем построении функции согласно формуле (9), которая в данном случае запишется в виде

$$
\widetilde{u}(t,x) = \arg \max_{u_1 \in \mathbf{U}(t, x^I(t)), u_2} \left(\varphi_x^{0\,T}\left(g(t,x,u_1) + h(t,x)u_2\right) + \varphi_t^0\right),
$$

операция взятия максимума по неограниченному управлению u_2 в общем случае невозможна (возможна лишь при условии $\varphi_x^{0\,T}(t,x)h(t,x) = 0$).

Для преодоления этой сложности воспользуемся методом преобразования исходной системы к производной [6], который позволяет свести задачу улучшения начального управления для системы (16) к задаче улучшения начального управления $x^I(t)$ для производной задачи

$$
\begin{aligned}
&\dot{y} = \eta_x^{\mathrm{T}} g(t,x,u_1) + \eta_t, \quad t \in [t_I, t_F],\\
&y = \eta(t,x), \quad u_1 \in \mathbf{U}(t,x) \subset \mathbb{R}^{p-1},\\
&x(t_I) = x_I, \quad y(t_I) = \eta(t_I, x_I),\\
&\widetilde{F}\left(y(t_F)\right) = \min_{x \in Q(y(t_F))} F(x) \to \inf,\\
&\mathbf{Q}(y) = \{x \colon y = \eta(t_F, x)\}.
\end{aligned} \tag{17}
$$

Здесь

$y(t)$ – непрерывная, кусочно-гладкая фазовая траектория,

$x(t)$, $u_1(t)$ – кусочно-непрерывные управления,

$\eta(t,x) = (\eta^1, \ldots, \eta^{n-1})$ – совокупность независимых первых интегралов системы дифференциальных уравнений

$$
\frac{dx}{d\tau} = h(t,x).
$$

Теперь для решения полученной задачи улучшения управления воспользуемся алгоритмом глобального улучшения. А именно, для начального допустимого процесса $\left(y^I(t), x^I(t), u_1^I(t)\right)$ найдем $\widetilde{\varphi}^0(t,y)$ из соотношений (7), (8), которые в данном случае запишутся в виде

$$
\begin{aligned}
&\varphi_y^T\left(\eta_x^T(t, x^I(t)) g(t, x^I(t), u_1^I(t)) + \eta_t(t, x^I(t))\right) + \varphi_t = 0,\\
&\varphi(t_F, y) = \widetilde{F}(y).
\end{aligned}
$$

Т.е.

$$\widetilde{\varphi}^0(t,y)=\widetilde{F}\left(y+\int\limits_t^{t_F}\nu(\xi)d\xi\right),$$
$$\nu(t)=\eta_x^T\left(t,x^I(t)\right)g\left(t,x^I(t),u_1^I(t)\right)+\eta_t\left(t,x^I(t)\right).$$

После этого можно искать управление согласно формуле (9) и соответствующий улучшенный допустимый процесс.

Пример 2. Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x}^1=x^2u,\quad \dot{x}^2=-1-x^1u,\quad t\in[0,10],$$
$$x^1(0)=0,\quad x^2(0)=0,\quad F(x(10))=x^2(10)\to\min$$

и начальное управление $u^I(t)=1$, которому соответствует допустимый процесс $x^{1\,I}(t)=\cos t-1$, $x^{2\,I}(t)=-\sin t$.

Здесь $h(t,x)=(x^2,-x^1)^T$, $\eta(t,x^1,x^2)=(x^1)^2+(x^2)^2$ – первый интеграл системы $\dfrac{dx}{d\tau}=h(t,x)$. Запишем производную задачу

$$\dot{y}=-2x^2,\quad y=(x^1)^2+(x^2)^2,\quad t\in[0,10],$$
$$x^1(0)=0,\quad x^2(0)=0,\quad y(0)=0,$$
$$-\sqrt{y}\leqslant x^2\leqslant\sqrt{y},$$
$$\widetilde{F}(y(10))=-\sqrt{y(10)}\to\min.$$

Таким образом, исходная задача улучшения заменяется задачей улучшения элемента $\left(x^{1\,I}(t),x^{2\,I}(t),y^I(t)\right)=\left(\cos t-1,-\sin t,4\sin^2\frac{t}{2}\right)$ для производной задачи. Воспользуемся алгоритмом глобального улучшения управления, описанным выше, т.е. будем искать $\widetilde{\varphi}^0(t,y)$ как решение задачи Коши

$$\widetilde{\varphi}_y(t,y)\left(-2x^{2\,I}(t)\right)+\widetilde{\varphi}_t(t,y)=0,\quad \widetilde{\varphi}(10,y)=\sqrt{y}.$$

А именно,

$$\widetilde{\varphi}^0(t,y)=\sqrt{y-2\int\limits_t^{10}x^{2\,I}(\xi)d\xi},$$
$$\widetilde{x}^2(t,y)=\arg\max_{|x^2|\leqslant\sqrt{y^I(t)}}\left(\widetilde{\varphi}_y^0(t,y)(-2x^2)\right)=-\sqrt{y^I(t)}.$$

Решив замкнутую систему $\dot{y}=2\sqrt{y^I(t)}$, $y(0)=0$, найдем улучшенный допустимый процесс производной задачи $y^{II}(t)=16\sin^2\dfrac{t}{4}$, $x^{2\,II}(t)=-2\sin\dfrac{t}{2}$ и соответствующий улучшенный допустимый процесс исходной задачи $x^{1\,II}(t)=4\sin^2\dfrac{t}{4}$, $x^{2\,II}(t)=$ $=-2\sin\dfrac{t}{2}$, $u^{II}(t)=-\dfrac{1}{2}$. Продолжая шаги алгоритма, получим последовательность допустимых процессов производной задачи

$$y_i(t)=4^i\sin^2\frac{t}{2^i},\quad x_i^2(t)=-2^{i-1}\sin\frac{t}{2^{i-1}}$$

и соответствующую последовательность допустимых процессов исходной задачи

$$x_i^1(t) = 2^i \sin^2 \frac{t}{2^i}, \quad x_i^2(t) = -2^{i-1} \sin \frac{t}{2^{i-1}}, \quad u_i(t) = -\frac{1}{2^{i-1}}.$$

Нетрудно видеть, что полученная последовательность улучшенных процессов сходится к оптимальному процессу исходной задачи

$$\lim_{i\to\infty} x_i^1(t) = 0, \quad \lim_{i\to\infty} x_i^2(t) = -t, \quad \lim_{i\to\infty} u_i(t) = 0, \quad \lim_{i\to\infty} F\left(x_i(10)\right) = -10.$$

5. Заключение

Предложенные алгоритмы глобального улучшения управляемых процессов обладают рядом преимуществ перед активно развиваемыми в настоящее время методами локального улучшения. Предложенные соотношения метода (13), (14) для поиска разрешающей функции весьма удобны для программной реализации метода. При этом расчет по формулам (13)–(15) может производиться с использованием аппроксимации функции $\varphi^0(t,x)$ при каждом фиксированном t (например, с помощью полиномов по методу наименьших квадратов), что даст возможность проводить анализ получаемой аппроксимации функции $\varphi^0(t,x)$ в виде аналитических выражений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кротов В.Ф., Фельдман И.Н.* Итерационный метод решения задач оптимального управления // Изв. АН СССР. Техн. киберн. 1983. № 2. С. 160–168.
2. *Krotov V.F.* Global methods in optimal control theory. New York: Marcel Dekker, 1996.
3. *Кротов В.Ф.* Об оптимизации управления квантовыми системами // Докл. РАН. 2008. Т. 423. № 3. С. 316–319.
4. *Кротов В.Ф.* Управление квантовыми системами и некоторые идеи теории оптимального управления // АиТ. 2009. № 3. С. 15–23.
5. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
6. *Гурман В.И.* Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, Физматлит, 1997.

Статья представлена к публикации членом редколлегии В.И. Гурманом.

Поступила в редакцию 16.12.2010