



Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. B. Givental', Sturm's theorem for hyperelliptic integrals,
Algebra i Analiz, 1989, Volume 1, Issue 5, 95–102

<https://www.mathnet.ru/eng/aa43>

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<https://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.168

May 17, 2025, 12:36:02



А. Б. Гивенталь

ТЕОРЕМА ШТУРМА ДЛЯ ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛОВ

Изучается система линейных дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют периоды гиперэллиптических интегралов. Показано, что эта система гамильтонова и указан геометрический смысл гамильтониана. Для вещественных гиперэллиптических кривых рода g с g овалами доказано, что гамильтониан положительно определен, а сама система обладает свойством Штурма: движущиеся в силу системы лагранжевы плоскости нетрансверсальны неподвижным не более $2g$ раз.

В однопараметрическом семействе вещественных гиперэллиптических кривых рода g с уравнением

$$y^2 = x^{2g+1} + \lambda_1 x^{2g-1} + \dots + \lambda_{2g-1} x + t \quad (1)$$

выберем непрерывное семейство овалов Γ_t и положим

$$I_k(t) = \oint_{\Gamma_t} x^{2g-k} \frac{dx}{y}, \quad k = 1, \dots, 2g. \quad (2)$$

Вектор $I = (I_1, \dots, I_{2g})$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений Гаусса–Манина

$$\dot{I} = A(t)I, \quad (3)$$

не зависящей от выбора овалов, так как дифференциальные 1-формы $x^{2g-k} dx/y$ образуют базис в когомологиях проколотой гиперэллиптической кривой.

Теорема 1. а) Система уравнений Гаусса–Манина гамильтонова в подходящей симплектической структуре фазового пространства.

Ключевые слова: гиперэллиптические кривые, уравнения Гаусса–Манина.

б) На интервале изменения параметра t , где гиперэллиптические кривые имеют $g+1$ вещественных компонент, система Гаусса–Манина имеет знакоопределенный квадратичный гамильтониан и обладает свойством Штурма: любое меняющееся в силу системы лагранжево пространство становится нетрансверсальным любому неподвижному лагранжеву пространству не более $2g$ раз.

Приводимое ниже доказательство включает геометрическое описание симплектической структуры и гамильтониана (теорема 2), а во второй части (свойство Штурма) опирается на билинейные неравенства Римана.

Симплектическая структура. Положим $\lambda_{2g} = t$ и рассмотрим семейство (1) комплексных гиперэллиптических кривых

$$V_\lambda : y^2 = P_\lambda(x), \quad \lambda \in \mathbb{C}^{2g}.$$

Введем в пространстве параметров симплектическую структуру следующим образом (ср. [1]). *Отображение периодов* сопоставляет точке λ вне дискриминанта $\Delta \subset \mathbb{C}^{2g}$ класс когомологий $[ydx] \in H^1(V_\lambda, \mathbb{C})$. В расслоении когомологий определена плоская *связность Гаусса–Манина* – циклы можно переносить на соседние кривые по непрерывности. Это позволяет рассматривать отображение периодов как многозначное отображение

$$(\mathbb{C}^{2g} \setminus \Delta) \rightarrow H^1(V_{\lambda_0}, \mathbb{C})$$

в пространство когомологий отмеченной кривой V_{λ_0} . В [1] показано, что отображение периодов – локальный биголоморфизм. Мы переносим в $\mathbb{C}^{2g} \setminus \Delta$ симплектическую структуру пространства $H^1(V_{\lambda_0}, \mathbb{C})$, двойственную индексу пересечения циклов, и называем ее *формой пересечений*. Она корректно определена, так как индекс пересечения сохраняется при монодромии циклов, и голоморфно продолжается на дискриминант, как показано в [1], до симплектической структуры во всём пространстве \mathbb{C}^{2g} .

Дифференциал отображения периодов отождествляет касательное расслоение к $\mathbb{C}^{2g} \setminus \Delta$ с расслоением когомологий $H^1(V_\lambda, \mathbb{C})$. При таком отождествлении

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_k} \mapsto \nabla_k [ydx] = \left[x^{2g-k} \frac{dx}{2y} \right].$$

Поэтому система уравнений Гаусса–Манина описывает движение ковекторов на $\mathbb{C}^{2g} \setminus \Delta$ при их параллельном перенесении вдоль прямой, параллельной оси t , с помощью связности Гаусса–Манина в гомологиях. Отсюда уже следует гамильтоновость системы (3). Действительно, при параллельном перенесении циклов их индекс пересечения сохраняется. Поэтому остается лишь проверить, что симплектическая структура – одна и та же во всех кокасательных пространствах к \mathbb{C}^{2g} , приложенных в точках одной прямой, параллельной оси t . Другими словами, пусть Ω – обратная матрица формы пересечений в координатах $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g} = t)$ на \mathbb{C}^{2g} . Ее элементы – полиномы от λ .

Предложение 1. Ω не зависит от t .

Доказательство состоит в подсчете квазиоднородных степеней. Положим $\deg x = 1$. Тогда $\deg \lambda_k = k+1$, и тензор Пуассона $\sum \Omega_{kl}(\lambda) (\partial/\partial \lambda_k) \wedge (\partial/\partial \lambda_l)$ имеет степень $\deg = -2g-3$. Так как $\deg \lambda_k \leq 2g+1$, то $\deg \Omega_{kl} \leq 2g-2 < \deg t$.

Итак, первое утверждение теоремы 1 доказано.

Гамильтониан. Рассмотрим семейство комплексных корней многочленов $P_\lambda(x) = x^{2g+1} + \lambda_1 x^{2g-1} + \dots + \lambda_{2g}$:

$$\mathcal{Z}_\lambda: P_\lambda(x) = 0, \lambda \in \mathbb{C}^{2g}$$

и повторим для него предыдущие конструкции, начиная с отображения периодов

$$(\mathbb{C}^{2g} \setminus \Delta) \ni \lambda \mapsto [x] \in \tilde{H}^0(\mathcal{Z}_\lambda, \mathbb{C}).$$

Это отображение периодов обратно к отображению Виета — проекции $\tilde{H}^0(\mathcal{Z}_{\lambda^0}, \mathbb{C})$ в пространство \mathbb{C}^{2g} орбит по действию группы перестановок корней. Форма пересечений на $\mathbb{C}^{2g} \setminus \Delta$ в этом случае симметрична и совпадает с прямым образом инвариантного скалярного произведения. Записанная как псевдориманова метрика $\Sigma S_{kl}(\lambda) (\partial/\partial\lambda_k) (\partial/\partial\lambda_l)$ на кокасательном расслоении к $\mathbb{C}^{2g} \setminus \Delta$, форма пересечений аналитически продолжается на дискриминант Δ и вырождается в точности на Δ . Связность Гаусса–Манина, перенесенная на (ко)касательное расслоение к $\mathbb{C}^{2g} \setminus \Delta$ с помощью отображения периодов (мы будем называть ее *симметрической* связностью в отличие от рассмотренной ранее *симплектической*), совпадает с геодезической связностью этой псевдоримановой метрики. Матрицу $S = (S_{kl})$ можно интерпретировать в терминах операции *сворачивания* симметрических полиномов [2]: $S_{kl}(\lambda)$ есть выражение через элементарные симметрические функции $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2g})$ скалярного произведения градиентов $(\nabla\lambda_k, \nabla\lambda_l)$. Подсчет квазиоднородных степеней (как в предложении 1) убеждает, что S зависит от t неоднородно-линейно.

Теорема 2. Система уравнений Гаусса–Манина (3) эквивалентна

$$\dot{S} = (\text{const}) \Omega I. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е. Ненулевая постоянная в (4) не зависит от λ и определяется нормировкой отображения периодов $(\text{const}) [ydx]$ или симплектической структуры. Мы будем далее нормировать Ω таким образом, чтобы $\text{const} = 1$.

С л е д с т в и е 1. Квадратичный гамильтониан системы Гаусса–Манина имеет матрицу

$$H = \Omega^* S^{-1} \Omega.$$

С л е д с т в и е 2. В вещественной области изменения параметра λ , где многочлен P_λ имеет $2g+1$ различных вещественных корней, гамильтониан положительно определен.

Действительно, индекс пересечения в $\tilde{H}_0(\mathcal{Z}_\lambda, \mathbb{R})$ положительно определен.

Поля, касающиеся дискриминанта. Уравнение (4) описывает симплектическую связность Гаусса–Манина. Аналогичное уравнение для симметрической связности имеет, как будет доказано ниже, похожий вид:

$$S\dot{J} = \left(\Omega - \frac{1}{2}\dot{S}\right)J. \quad (5)$$

Одновременно появление в (4, 5) симметрической и симплектической форм пересечений S, Ω объясняется тем, что оба уравнения могут быть выведены единым вычислением — дифференцированием отображений периодов $[ydx]$ и $[x]$ вдоль базиса векторных полей, касающихся дискриминанта. В качестве такого базиса можно взять, с одной стороны, поля $\sum S_{kl} \partial/\partial \lambda_l$. Это связано с тем, что градиенты элементарных симметрических функций $\nabla \lambda_k, k=1, \dots, 2g$, образуют базис $C[\lambda]$ -модуля симметрических векторных полей в $H^0(\mathcal{X}_\lambda, C)$ (см. [2, 1]). Другой базис можно получить следующей процедурой. Поделим полином $x^{k-1}P_\lambda(x)$ на P'_λ :

$$x^{k-1}P_\lambda(x) = h^k(x, \lambda)P'_\lambda(x) + \sum \Lambda_l^k(\lambda)x^{2g-l}.$$

Тогда $W^k = \sum \Lambda_l^k \partial/\partial \lambda_l, k=1, \dots, 2g$, — искомый базис. Более того, $h^k \partial/\partial x + W^k$ — инфинитезимальный автоморфизм семейства \mathcal{X}_λ , а

$$\frac{1}{2}x^{k-1}y \frac{\partial}{\partial y} + h^k \frac{\partial}{\partial x} + W^k \quad (6)$$

— инфинитезимальный автоморфизм семейства V_λ (см. [1, 2]). Такое поднятие полей до автоморфизмов семейства позволяет дифференцировать отображение периодов двумя способами — формально и явно — и получить дифференциальное уравнение (3).

Пример: эллиптические кривые. Положим $F = x^3 + \lambda x + t - y^2$. Тогда

$$F = \left[\frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{3} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2\lambda}{3} \frac{\partial}{\partial \lambda} + t \frac{\partial}{\partial t} \right] F,$$

$$xF = \left[\frac{xy}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2\lambda}{9} \right) \frac{\partial}{\partial x} + t \frac{\partial}{\partial \lambda} - \frac{2\lambda^2}{9} \frac{\partial}{\partial t} \right] F.$$

Так как $\frac{\partial}{\partial \lambda} [ydx] = [xdx/2y] = \frac{\partial}{\partial t} [xydx]$, то

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{3} & t \\ t & -\frac{2\lambda^2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xydx \\ ydx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{y}{2} dx - \frac{x}{3} dy \\ \frac{xy}{2} dx - \left(\frac{x^2}{3} + \frac{2\lambda}{9} \right) dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{7}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} xydx \\ ydx \end{bmatrix}$$

Дифференцируя один раз по t , получаем

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{3} & t \\ t & -\frac{2\lambda^2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{xdx}{y} \\ \frac{dx}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{xdx}{y} \\ \frac{dx}{y} \end{bmatrix}$$

Аналогично, дифференцируя $[x]$ при $y=0$, находим

$$\begin{bmatrix} \frac{2\lambda}{3} & t \\ t & -\frac{2\lambda^2}{9} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ P' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{6} - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ P' \end{bmatrix}.$$

Мораль этого примера такова. Дифференцированием отображения периодов вдоль базиса полей, касающихся Δ , можно получить уравнения для параллельного перенесения ковекторов вдоль прямой, параллельной оси t , с помощью симплектической и симметрической связностей Гаусса–Манина соответственно:

$$A(t)\dot{I} = BI, \quad A(t)\dot{J} = (B - \frac{1}{2}\dot{A})J,$$

где A зависит от t неоднородно-линейно, а B не зависит от t . Доказательство использует формулу $\nabla_{\partial/\partial\lambda_k}[\omega] = \nabla_{\partial/\partial t}[x^{2g-k}\omega]$, наличие в (6) лишнего слагаемого $(1/2)x^{k-1}y\partial/\partial u$ и то обстоятельство, что t входит в W^k линейно – с членом $t\partial/\partial\lambda_{2g-k+1}$.

Теперь уместно вспомнить, что геодезическая связность сохраняет риманову метрику. В частности,

$$0 = (SJ, J)^\bullet = (2S\dot{J}, J) + (\dot{S}J, J).$$

Поэтому справедливо

Предложение 2. Если $A = S$, то B кососимметрична: $(BJ, J) = 0$.

Уравнение $S\dot{I} = BI$ с симметричной S и кососимметричной B переписывается в гамильтоновой форме $B\dot{I} + (B^*S^{-1}B)I = 0$. Поэтому симплектическое уравнение Гаусса–Манина сохраняет две симплектические структуры: B и Ω . Доказательство теоремы 2 завершает

Предложение 3. $B = (\text{const})\Omega$.

Доказательство. В его основе геометрический факт – единственность инвариантной при монодромии билинейной формы на $H_1^*(V_\lambda, \mathbb{C})$. Отсюда следует, что const – голоморфная функция на \mathbb{C}^{2g} , к тому же – квазиоднородная. Сравнение квазиоднородных степеней B и Ω показывает теперь, что эта функция – константа.

Следствие 3. Симплектическая форма пересечений выражается через симметрическую:

$$\Omega_{kl} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{2g} (S_{li} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{k1} - S_{ki} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} S_{l1}).$$

Доказательство: матрица B выражается через S с помощью формул Кристоффеля для коэффициентов геодезической связности. Пусть $v_k = \sum S_{ki} \partial/\partial \lambda_i$. Тогда $[v_l, v_k] = \sum a_{lk}^i v_i$. Из формул Кристоффеля выводится, что $\Omega_{kl} = a_{lk}^{2g}/2$. Поле v_{2g} содержит член $t\partial/\partial \lambda_1$. Коэффициент при таком члене в коммутаторе $[v_l, v_k]$ и есть a_{lk}^{2g} .

Замечание. Матрица (S_{kl}) найдена в [1] методом, указанным в [2]. Иной, нежели выше, способ вычисления матрицы (Ω_{kl}) приведен в [3], § 15.

Многомерная теория Штурма. Классические теоремы Штурма описывают свойства нулей решений уравнений Штурма—Лиувилля. Как показано, например, в [4], эти теоремы имеют симплектическую природу и допускают многомерные обобщения на линейные неавтономные гамильтоновы системы

$$\Omega \dot{z} + H(t)z = 0, \quad z \in \mathbb{R}^{2g}.$$

В этих обобщениях вместо нулей решений речь идет о моментах нетрансверсальности движущегося в силу системы лагранжева пространства к неподвижному лагранжеву пространству, на котором квадратичный гамильтониан H положительно определен при всех t . Приведем две формулировки из [4].

1) Если гамильтониан положителен на лагранжевых пространствах α и β , то числа ν_α, ν_β моментов нетрансверсальности к α и к β любого движущегося в силу системы лагранжева пространства различаются не более чем на число степеней свободы: $|\nu_\alpha - \nu_\beta| \leq g$.

2) Если гамильтониан положителен на лагранжевом пространстве α , то числа ν_1 и ν_2 моментов нетрансверсальности к α любых двух движущихся в силу системы лагранжевых пространств отличаются не более чем на число степеней свободы: $|\nu_1 - \nu_2| \leq g$.

В частности, справедливо такое следствие:

если на некотором интервале времени гамильтониан положителен и некоторая движущаяся лагранжева плоскость трансверсальна некоторой неподвижной, то на этом интервале времени любая движущаяся нетрансверсальна любой неподвижной не более $2g$ раз.

Утверждение б) теоремы 1 вытекает из следующего предложения.

Предложение 4. В вещественной гамильтоновой системе Гаусса—Манина (4) пространство $I_{g+1} = \dots = I_{2g} = 0$ лагранжево и существует трансверсальное ему движущееся лагранжево пространство.

Следствие 1. На интервале положительности гамильтониана системы (4) это движущееся лагранжево пространство нетрансверсально любому неподвижному не более g раз.

Следствие 2. На интервале положительности гамильтониана системы (4) любое движущееся лагранжево пространство нетрансверсально пространству $I_{g+1} = \dots = I_{2g} = 0$ не более g раз.

Мы предъядвим даже два таких движущихся пространства, о каких идет речь в предложении 4. Они имеют простой геометрический смысл — это инвариантное и антиинвариантное подпространства в гомологиях вещественной гиперэллиптической кривой относительно ее антиголоморфной инволюции. Неподвижное лагранжево пространство $I_{g+1} = \dots = I_{2g} = 0$ образовано циклами, аннулируемыми дифференциалами 1-рода. Трансверсальность этого пространства к (анти)инвариантному вытекает, как мы увидим, из слабой формы неравенств Римана — невырожденности матрицы периодов голоморфных форм на компактной римановой поверхности.

Антиголоморфная инволюция. Пусть $\sigma: V_\lambda \mapsto V_\lambda$ — инволюция комплексного сопряжения на вещественной гиперэллиптической кривой рода g . Разложим $H^1(V_\lambda, \mathbb{R})$ на инвариантную и антиинвариантную части $I \oplus A$. При отождествлении касательного пространства к пространству параметров в точке λ и $H^1(V_\lambda, \mathbb{C})$ с помощью дифференциала отображения периодов $[ydx]$ вещественное касательное пространство $T_\lambda \mathbb{R}^{2g}$ представляется 1-формами на V_λ с вещественными коэффициентами. Такие 1-формы характеризуются соотношением $\sigma^* \omega = \bar{\omega}$. Отсюда

следует, что $T_\lambda \mathbb{R}^{2g}$ переходит в подпространство $R = I \oplus iA \subset H^1(V_\lambda, \mathbb{C})$. Подпространство $\langle \partial/\partial\lambda_{g+1}, \dots, \partial/\partial\lambda_{2g} \rangle$ в $T_\lambda \mathbb{R}^{2g}$ представляется 1-формами, голоморфными на бесконечности, т. е. переходит в подпространство

$$\Lambda = R \cap H^{1,0}(V_\lambda, \mathbb{C}) \subset H^1(V_\lambda, \mathbb{C}).$$

Предложение 5 (ср. [3], § 15). Λ, I, iA — попарно трансверсальные лагранжевы пространства относительно симплектической формы пересечений в R . Более того, производящая квадратичная форма лагранжева подпространства $\Lambda \subset I \oplus iA$ знакоопределена.

Доказательство. Форма пересечений в $H^1(V_\lambda, \mathbb{R})$ антиинвариантна, так как σ меняет ориентацию V_λ . Поэтому I и A изотропны и, следовательно, лагранжевы. Форма пересечений $[\cdot, \cdot]$ в $H^1(V_\lambda, \mathbb{C})$ принимает на $R = I \oplus iA$ чисто мнимые значения (так что const в (4) — чисто мнимая константа) и после умножения на i задает на R симплектическую структуру, в которой I и iA лагранжевы. $H^{1,0}(V_\lambda, \mathbb{C})$ — лагранжево подпространство, так как для голоморфных 1-форм ω, ω' на компактной римановой поверхности имеем: $[\omega, \omega'] = \int \omega \wedge \omega' = 0$. Поэтому $\Lambda \subset R$ — тоже лагранжево. Если $[\omega] \in \Lambda \cap I$ или $\in \Lambda \cap iA$, то $[\omega, \bar{\omega}] = [\omega, \sigma^* \omega] = \pm [\omega, \omega] = 0$. Но в противоречии с этим $i[\omega, \bar{\omega}] = i \int \omega \wedge \bar{\omega} > 0$, если $\omega \neq 0$.

Пусть $\omega = \omega_I + \omega_A$ — разложение $[\omega] \in \Lambda$ на инвариантную и антиинвариантную части. По определению, производящая квадратичная форма $G(\omega) = i[\omega_A, \omega_I]/2$. Так как $\bar{\omega} = \omega_I - \omega_A$, то $G(\omega) = i[\omega, \bar{\omega}]/4$, откуда следует последнее утверждение предложения.

З а м е ч а н и я. 1) Напомним, что матрица периодов — это матрица косоэрмитовой формы $[\omega, \bar{\omega}]$ на $H^{1,0}(V_\lambda, \mathbb{C})$ в специальном базисе $(\omega_1, \dots, \omega_g)$. Пусть $(\alpha_1, \dots, \alpha_g, \beta_1, \dots, \beta_g)$ — базис Дарбу в $H_1(V_\lambda, \mathbb{Z})$. Потребуем, чтобы $\oint_{\alpha_i} \omega_k = \delta_{ki}$. Тогда $(\oint_{\beta_i} \omega_k)$ — матрица периодов. Пусть базис (a_1, \dots, a_g) состоит из σ -инвариантных циклов. Тогда $(\omega_1, \dots, \omega_g)$ — базис в Λ , матрица периодов чисто мнимая и пропорциональна матрице формы G в этом базисе.

2) Аналоги теорем 1, 2 справедливы для квазиоднородных миниверсальных деформаций $F_\lambda(x, y)$ простых особенностей функций двух переменных $A_\mu, D_\mu, E_6, E_7, E_8$. Рассмотренный выше случай гиперэллиптических кривых отвечает серии A_{2g} . Доказательство в сущности идентично изложенному. В качестве двух отображений периодов надлежит использовать $[ydx]$ и $[dx \wedge dy \wedge dz/d(z^2 - F_\lambda(x, y))]$ для семейства кривых $V_\lambda = F_\lambda^{-1}(0)$ и семейства поверхностей $\mathcal{X}_\lambda = \{z^2 = F_\lambda(x, y)\}$ соответственно. Возможно, теорема 2 обобщается на миниверсальные деформации непростых особенностей с помощью теории примитивных отображений периодов К. Сайто [5].

3) Предыдущие результаты получены при попытке эффективно оценить число нулей гиперэллиптических интегралов. Эта задача тесно связана с предложенным В. И. Арнольдом ослабленным вариантом 16-й проблемы Гильберта — оценкой числа предельных циклов, рождающихся при неконсервативном возмущении полиномиальной гамильтоновой системы на плоскости. Наша попытка провалилась из-за отсутствия прямой связи между осцилляциями лагранжевых плоскостей и отдельных решений в линейных гамильтоновых системах.

Автор благодарен В. И. Арнольду, А. Н. Варченко и В. М. Харламову за многочисленные полезные беседы.

Список литературы

- [1] Варченко А. Н., Гивенталь А. Б. Отображение периодов и форма пересечений // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, вып. 2. С. 7–20.
- [2] Гивенталь А. Б. Сворачивание инвариантов групп, порожденных отражениями и связанных с простыми особенностями функций // Функцион. анализ и его прил. 1980. Т. 14, вып. 2. С. 4–14.
- [3] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. Т. 2. М.: Наука, 1984.
- [4] Арнольд В. И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия // Функцион. анализ и его прил. 1985. Т. 19, вып. 4. С. 1–10.
- [5] Saito K. Primitive forms for a universal unfolding of a function with an isolated critical point // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 1982. Vol. 28. P. 775–792.

Институт химической физики АН СССР
117977, Москва, ГСП-1, ул. Косыгина, 4

Поступило 1 декабря 1988 г.