Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. Я. Альпер, Г. И. Калиногорская, О сходимости интерполяционных многочленов Лагранжа в комплексной области, *Изв. вузов. Матем.*, 1969, номер 11, 13–23

https://www.mathnet.ru/ivm3591

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.81
6 декабря 2025 г., 05:31:20

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1969 МАТЕМАТИКА № 11 (90)

УДК 517.512

С. Я. Альпер, Г. И. Калиногорская

О СХОДИМОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ЛАГРАНЖА В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

В 1940 г. С. М. Лозинским [1] была доказана следующая

Теорема. *Если $f(z)$ — аналитическая функция в круге $|z|<1$, непрерывная в круге $|z|\leqslant 1$ и $L_n(f;\ z)$ — многочлен степени $\leqslant n-1$, совпадающий с $f(z)$ в точках $z_k^{(n)}=e^{2k\pi i/n}$ $(k=1,2,\dots,n)$, то при любом $p>0$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})-L_n(f;\ e^{i\theta})|^p\,d\theta=0.$$

В 1963 г. этот результат для частного случая $p=2$ был снова получен другими методами Уолшем и Шарма, а затем Дж. Кертиссом. В заметке Дж. Кертисса указанный результат (для $p=2$) обобщается также на области, ограниченные аналитическими кривыми. Подробное изложение дано в статье [2], где ставится также вопрос о возможности ослабления требования относительно границы области и перехода от L_2 к метрике L_p.

В теореме 1 настоящей работы результаты С. М. Лозинского и Дж. Кертисса обобщаются на случай любого $p>0$ и области, ограниченной достаточно гладкой кривой. Обобщаются также другие результаты С. М. Лозинского и Дж. Кертисса.

Изложим сначала некоторые вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть $f(x)$ непрерывна на сегменте $[0,\ 1]$ и имеет первую производную, удовлетворяющую условию Липшица на $[0,\ 1]$:*

$$|f'(x')-f'(x'')|\leqslant K|x'-x''|^{\alpha},\quad 0<\alpha\leqslant 1.$$

Тогда

$$\left|\int_0^1 f(x)\,dx-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right|\leqslant K_1/n^{1+\alpha},\tag{1}$$

где постоянная K_1 не зависит от n.

Доказательство. Из равенства

$$I_n=\int_0^1 f(x)\,dx-\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\frac{1}{n}=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left[f(x)-f\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]dx$$

с помощью теоремы о конечном приращении следует

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left[f'(\xi_k)-f'\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\right]\left(x-\frac{2k-1}{2n}\right)dx,$$

где $(k-1)/n<\xi_k<k/n$. Отсюда имеем

$$|I_n|\leqslant K\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|\xi_k-\frac{2k-1}{2n}\right|^{\alpha}\left|x-\frac{2k-1}{2n}\right|dx\leqslant$$

$$\leqslant K\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2n)^{\alpha}}\int_{(k-1)/n}^{k/n}\left|x-\frac{2k-1}{2n}\right|dx<K_1/n^{1+\alpha}.$$

Эта лемма, аналогичная некоторым известным результатам [3] об оценке отклонения интегральных сумм от интеграла, была доказана Э. М. Сааком, но не опубликована.

Если функция $g(t)$ удовлетворяет условию леммы 1 на сегменте $[0, 2\pi]$ и имеет период 2π, то справедливо неравенство

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(t)\,dt-\sum_{k=1}^{n}g\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\frac{1}{n}\right|\leqslant K_2/n^{1+\alpha}, \tag{2}$$

которое получается из (1), если положить $t=2\pi x+\pi/n$, $g(t)=f(x)$.

Пусть D — ограниченная односвязная область с гладкой жордановой границей Γ и функция $z=\psi(w)$ однолистно отображает область $|w|>1$ на область G, дополнительную к D, так, что $\psi(\infty)=\infty$; разложение $\psi(w)$ в окрестности точки $w=\infty$ имеет вид

$$\psi(w)=dw+d_0+d_1/w+d_2/w^2+\ldots, \tag{3}$$

где можно считать $d>0$. Условимся говорить, что область D принадлежит классу Λ''_α, если $\psi'(w)$ непрерывна в $|w|\geqslant 1$ и отлична от нуля на $|w|=1$, а $\psi''(w)$ непрерывна в $|w|\geqslant 1$ и на окружности $w|=1$ удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha, 0<\alpha\leqslant 1$.

Такое условие выполняется при $0<\alpha<1$ в силу известной теоремы Келлога, если в уравнении $z=z(s)=x(s)+iy(s)$ кривой Γ, где s — длина дуги, отсчитываемая от некоторой точки кривой, $z'(s)$ и $z''(s)$ непрерывны, а $z''(s)$ удовлетворяет по переменной s условию Липшица с показателем α.

Для области класса Λ''_α выполняются неравенства

$$0<m\leqslant|\psi'(w)|\leqslant M,\quad |w|\geqslant 1, \tag{4}$$

а также

$$0<m_1\leqslant\left|\frac{\psi(\tau)-\psi(w)}{\tau-w}\right|\leqslant M_1,\quad |w|\geqslant 1,\quad |\tau|\geqslant 1. \tag{5}$$

Лемма 2. *Если область D принадлежит классу Λ''_α, то функция*

$$\Omega(w,\tau)=1/(w-\tau)-\psi'(\tau)/[\psi(w)-\psi(\tau)] \tag{6}$$

при фиксированном w, $|w|=1$, аналитическая в области $|\tau|>1$, будет непрерывна в $|\tau|\geqslant 1$ и на $|\tau|=1$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α по переменной τ:

$$|\Omega(w,e^{i\theta_1})-\Omega(w,e^{i\theta_2})|\leqslant K_0|\theta_1-\theta_2|^{\alpha}. \tag{7}$$

Доказательство. Для производной $\Omega'_\tau(w, \tau)$ получим выражение

$$\Omega'_\tau(w, \tau) = \{[\psi(w) - \psi(\tau) - (w-\tau)\psi'(\tau)][\psi(w) - \psi(\tau) + (w-\tau)\psi'(\tau)] - \\ - \psi''(\tau)(w-\tau)^2[\psi(w) - \psi(\tau)]\} : \{(w-\tau)^2[\psi(w) - \psi(\tau)]^2\}.$$

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$\psi(w) = \psi(\tau) + \psi'(\tau)(w-\tau) + \int_\tau^w \psi''(t)(w-t)\,dt =$$

$$= \psi(\tau) + \psi'(\tau)(w-\tau) + \psi''(\tau)\frac{(w-\tau)^2}{2} + \int_\tau^w [\psi''(t) - \psi''(\tau)](w-t)\,dt; \qquad (8)$$

интегрирование здесь ведется по прямой, соединяющей точку τ ($|\tau| > 1$) с точкой w, $|w| = 1$, если прямая не пересекает окружность $|w| = 1$, в противном случае следует интегрировать по отрезку этой прямой, лежащему вне круга, и по дуге окружности. На основании теоремы Харди и Литтльвуда ([4], гл. 9) имеем $|\psi''(t) - \psi''(\tau)| \leqslant K_5|t-\tau|^\alpha$, $|t| \geqslant 1$, $|\tau| \geqslant 1$, и, следовательно,

$$\left|\int_\tau^w [\psi''(t) - \psi''(\tau)](w-t)\,dt\right| \leqslant K_6|w-\tau|^{2+\alpha}.$$

Из (8) получим

$$\psi(w) - \psi(\tau) = \psi'(\tau)(w-\tau) + O(|w-\tau|^2) \qquad (9)$$

и

$$\psi(w) - \psi(\tau) - \psi'(\tau)(w-\tau) = \psi''(\tau)\frac{(w-\tau)^2}{2} + O(|w-\tau|^{2+\alpha}). \qquad (10)$$

Из выражения для производной $\Omega'_\tau(w, \tau)$ с помощью соотношений (9) и (10) мы получим при некотором $R_0 > 1$ для $1 < |\tau| \leqslant R_0$ оценку $|\Omega'_\tau(w, \tau)| \leqslant K_7/(|\tau| - 1)^{1-\alpha}$ с постоянной K_7, не зависящей от w. С помощью другой теоремы Харди и Литтльвуда ([4], гл. 9) получаем искомую оценку (7)[1].

Замечание. Из формул (5) и (9) следует оценка

$$|\Omega(w, \tau)| \leqslant B_0 \qquad (11)$$

для всех w и τ, $|w| = |\tau| = 1$, где B_0 — постоянная, зависящая только от области.

Пусть здесь и в дальнейшем $z_k = z_k^{(n)} = \psi(w_k^{(n)})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где $w_k^{(n)} = e^{2k\pi i/n}$. Положим дальше $\omega_n(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k^{(n)})$, $\pi_n(w) = \omega_n(z)/(w^n - 1)\,d^n$, где $z = \psi(w)$ и $d > 0$ — постоянная из разложения (3).

Лемма 3. *Если область D принадлежит классу Λ''_α, то справедлива оценка для всех натуральных n*

$$|\pi_n(w)/\pi_n(w_k^{(n)}) - 1| < A_1/n^\alpha, \quad |w| = 1, \qquad (12)$$

[1] Теоремы Харди и Литтльвуда использованы здесь в форме, которая получается преобразованием $z = 1/\zeta$ из соответствующих результатов, изложенных в [4].

где $\pi_n(w_k^{(n)}) = \pi_n(w_k) = \lim\limits_{w \to w_k} \pi_n(w)$ *и постоянная* A_1 *не зависит от* n *и* w.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(\theta) = \ln \frac{\psi(w) - \psi(e^{i\theta})}{(w - e^{i\theta})\, d}, \quad |w| = 1,$$

и заметим, что функция $F'(\theta) = ie^{i\theta}\Omega(w, e^{i\theta})$ удовлетворяет согласно лемме 2 условию Липшица с показателем α. С помощью оценки (2) мы получим

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta)\, d\theta - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right| \leqslant A_2 / n^{1+\alpha}, \tag{13}$$

где A_2 — постоянная. Применяя теорему о вычетах к области $|\tau| > 1$ и учитывая равенство $\psi'(\infty) = d$, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \ln \frac{\psi(w) - \psi(\tau)}{(w - \tau)\, d} \frac{d\tau}{\tau} = 0.$$

Неравенство (13) можно теперь записать в виде

$$\left| \sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right| \leqslant A_2 / n^{\alpha}.$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{n} F\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{z - z_k}{(w - w_k)\, d} = \ln \pi_n(w),$$

получим $|\ln \pi_n(w)| = |-\ln \pi_n(w)| \leqslant A_2/n^{\alpha}$, $|w| = 1$. Если $|\ln \zeta| \leqslant c < 1$, то $|\zeta - 1| < c(e - 1)$, поэтому при всех n, начиная с некоторого, будем иметь $|\pi_n(w) - 1| < A_3/n^{\alpha}$, $|1/\pi_n(w) - 1| < A_3/n^{\alpha}$. Из тождества $\pi_n(w)/\pi_n(w_k) - 1 = [\pi_n(w) - 1][1/\pi_n(w_k) - 1] + [\pi_n(w) - 1] + [1/\pi_n(w_k) - 1]$ вытекает теперь искомая оценка (12).

Лемма 4. *Пусть область* D *принадлежит классу* $\Lambda_\alpha^{''}$ *и функция* $f(z)$, *аналитическая в* D *и непрерывная на* Γ, *имеет ограниченное изменение на* Γ. *Тогда функция*

$$\varphi_1(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{f[\psi(\tau)]}{\tau - w}\, d\tau, \tag{14}$$

аналитическая в $|w| < 1$, *будет непрерывной в* $|w| \leqslant 1$ *и абсолютно непрерывной на окружности* $|w| = 1$.

Доказательство. Для точек $z \in \Gamma$ функция $f(z) = f[z(s)]$ имеет ограниченное изменение относительно переменной длины дуги s кривой Γ, поэтому согласно теореме Ф. Рисса и М. Рисса ([5], гл. III) эта функция абсолютно непрерывна на Γ. Отсюда следует, что $f'(z) \in E_1$ в области D. Это значит, что $f'(z)$ представима интегралом Коши по кривой Γ, и в силу теоремы И. И. Привалова ([5], гл. III) получаем почти для всех $z \in \Gamma$ равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f'(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2} f'(z),$$

где интеграл понимается в смысле главного значения. Полагая $\zeta = \psi(\tau)$, получим почти для всех w на $|w| = 1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{f[\psi(\tau)]}{\psi(\tau) - \psi(w)} \psi'(\tau)\, d\tau = \frac{1}{2} f'[\psi(w)], \tag{15}$$

где интеграл рассматривается также в смысле главного значения. Из суммируемости $f'(\zeta)$ на Γ и неравенства (11) следует, что интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega(w, \tau) f'[\psi(\tau)]\, d\tau$$

абсолютно сходится, поэтому интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{f'[\psi(\tau)]}{\tau - w}\, d\tau \tag{16}$$

существует в смысле главного значения почти для всех w на $|w| = 1$. Для функции $\varphi_1(w)$ с помощью интегрирования по частям будем иметь

$$\varphi_1'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{f'[\psi(\tau)]\, \psi'(\tau)}{\tau - w}\, d\tau, \quad |w| < 1. \tag{17}$$

Такое же соотношение справедливо для функции $\varphi_2(w)$, представляющей интеграл типа Коши (14) в области $|w| > 1$. Интеграл справа в (17) существует почти для всех w, $|w| = 1$, в смысле главного значения. Это получается, если разбить интеграл в (17) на два слагаемых с помощью равенства $\psi'(\tau) = \psi'(w) + [\psi'(\tau) - \psi'(w)]$ и использовать существование интеграла (16) в смысле главного значения. Поэтому в силу теоремы И. И. Привалова $\varphi_1'(w) - \varphi_2'(w) = f'[\psi(w)]\psi'(w)$, $|w| = 1$, и

$$\varphi_2'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{f'[\psi(\tau)]\, \psi'(\tau)}{\tau - w}\, d\tau - \frac{1}{2} f'[\psi(w)]\, \psi'(w)$$

почти для всех w, $|w| = 1$. С помощью соотношения (15) получим

$$\varphi_2'(w) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \Omega(\tau, w) f'[\psi(\tau)]\, \psi'(\tau)\, d\tau.$$

Из этого равенства и (11) следует ограниченность $\varphi_2'(w)$ на $|w| = 1$, а значит и суммируемость $\varphi_1'(w)$ на $|w| = 1$. Из представимости $\varphi_1(w)$ интегралом типа Коши и известной теоремы В. И. Смирнова ([5], гл. II) следует, что $\varphi_1'(w)$ принадлежит классу H_1 в круге $|w| < 1$, а значит $\varphi_1(w)$ абсолютно непрерывна на $|w| = 1$.

Приведем известное неравенство Марцинкевича и Зигмунда ([6], т. II, с. 49).

Лемма 5. *Если $P(w) = c_0 + c_1 w + \ldots + c_{n-1} w^{n-1}$ — произвольный многочлен степени $\leqslant n - 1$, то для любого $p > 1$*

$$\left\{ \int\limits_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^p\, d\theta \right\}^{1/p} \leqslant B_p \left\{ \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} |P(w_k)|^p \right\}^{1/p},$$

где $w_k = w_k^{(n)} = e^{2k\pi i/n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots)$ и постоянная B_p зависит только от p.

На этой лемме основано доказательство теоремы С. М. Лозинского, приведенной в начале статьи.

Приведем, наконец, еще одно известное неравенство, которое легко вытекает из леммы Гронуэлла ([7], гл. 1, § 6).

Лемма 6. *Если* $w_k = w_k^{(n)} = e^{2k\pi i/n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *то при* $|w| \leqslant 1$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{w^n - 1}{w - w_k}\right| \leqslant A_4 \ln n, \quad n = 2, 3, \ldots,$$

где A_4 — *абсолютная постоянная.*

Перейдем теперь к изложению основных результатов.

Теорема 1. *Пусть область* D *принадлежит классу* Λ''_{α}, $0 < \alpha \leqslant 1$, *и* $f(z)$ — *аналитическая в* D *функция, непрерывная в* $\overline{D}$, *а* $L_n(f;\ z)$ — *интерполяционный многочлен Лагранжа степени* $\leqslant n-1$, *совпадающий с* $f(z)$ *в точках* $z_k = z_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *тогда при любом* $p > 0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Gamma}|f(z) - L_n(f;\ z)|^p\,|dz| = 0. \tag{18}$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $p > 1$, так как при $p \leqslant 1$ результат вытекает с помощью неравенства Гёльдера из предыдущего случая. По произвольному $\varepsilon > 0$ можно найти такой многочлен $f_1(z)$, что $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ и

$$|f_2(z)| < \varepsilon, \quad z \in \overline{D}. \tag{19}$$

Для всех n, бо́льших степени многочлена $f_1(z)$, имеем $L_n(f_1;\ z) = f_1(z)$, следовательно, для $z \in \Gamma$

$$f(z) - L_n(f;\ z) = f_2(z) - L_n(f_2;\ z). \tag{20}$$

Для функции $\omega_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - z_k)$ имеем

$$\omega_n'(z_k) = \lim_{z\to z_k}\left[\frac{\omega_n(z)}{w^n - 1}\,\frac{w^n - w_k^n}{w - w_k}\,\frac{w - w_k}{\psi(w) - \psi(w_k)}\right] =$$

$$= \frac{n w_k^{n-1}}{\psi'(w_k)}\lim_{w\to w_k}\frac{\omega_n(z)}{w^n - 1} = \frac{n d^n \pi_n(w_k)}{w_k \psi'(w_k)}$$

и

$$\frac{\omega_n(z)}{z - z_k} = \frac{(w^n - 1)\,\pi_n(w)\,d^n}{\psi(w) - \psi(w_k)},$$

где функция $\pi_n(w)$ определена раньше. Для функции $L_n(f_2;\ z)$ справедливо представление из [2]:

$$L_n(f_2;\ z) = L_n(f_2;\ w) + B(f_2;\ w) + C(f_2;\ w), \tag{21}$$

где

$$L_n(f_2;\ w) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_2[\psi(w_k)]\,\frac{w_k(w^n - 1)}{w - w_k}, \tag{22}$$

$$B(f_2;\ w) = \frac{w^n - 1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_2[\psi(w_k)]\,w_k\left[\frac{\psi'(w_k)}{\psi(w) - \psi(w_k)} - \frac{1}{w - w_k}\right], \tag{23}$$

$$C(f_2;\, w)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f_2[\psi(w_k)]\,\frac{w_k\psi'(w_k)(w^n-1)}{\psi(w)-\psi(w_k)}\left[\frac{\pi_n(w)}{\pi_n(w_k)}-1\right]. \tag{24}$$

С помощью формул (4), (20) и (21) имеем

$$\int_\Gamma |f(z)-L_n(f,\, z)|^p\,|dz| \leqslant$$

$$\leqslant M\int_0^{2\pi} |f_2[\psi(e^{i\theta})]-L_n(f_2;\, e^{i\theta})-B(f_2;\, e^{i\theta})-C(f_2;\, e^{i\theta})|^p\, d\theta.$$

Из неравенства $(a+b)^p \leqslant 2^p(a^p+b^p)$, $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$, следует

$$\int_\Gamma |f(z)-L_n(f;\, z)|^p\,|dz| \leqslant 4^p M\left\{\int_0^{2\pi} |f_2[\psi(e^{i\theta})]|^p\, d\theta+\right.$$

$$\left.+\int_0^{2\pi} |L_n(f_2;\, e^{i\theta})|^p\, d\theta+\int_0^{2\pi} |B(f_2;\, e^{i\theta})|^p\, d\theta+\int_0^{2\pi} |C(f_2;\, e^{i\theta})|^p\, d\theta\right\}.$$

Оценим для указанных значений n каждое из слагаемых правой части неравенства. Из (19) следует

$$\int_0^{2\pi} |f_2[\psi(e^{i\theta})]|^p\, d\theta < 2\pi\varepsilon^p.$$

С помощью леммы 5 и формулы (19) получим

$$\int_0^{2\pi} |L_n(f_2;\, e^{i\theta})|^p\, d\theta \leqslant B_p^p\,\frac{2\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} |L_n(f_2;\, e^{i\theta_k})|^p < B_p^p\, 2\pi\varepsilon^p.$$

Учитывая неравенства (11) и (19), найдем, что $|B(f_2;\, w)| < 2B_0\varepsilon$, и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi} |B(f_2;\, e^{i\theta})|^p\, d\theta < 2\pi(2B_0\varepsilon)^p.$$

На основании лемм 3 и 6 и оценок (4) и (5) получим

$$|C(f_2;\, w)| \leqslant \frac{M}{m_1}\,\frac{A_1}{n^\alpha}\,\varepsilon\,\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{w^n-1}{w-w_k}\right| \leqslant \frac{A_5\varepsilon\ln n}{n^\alpha}$$

и

$$\int_0^{2\pi} |C(f_2;\, e^{i\theta})|^p\, d\theta \leqslant A_6\varepsilon^p,$$

где A_6 зависит только от области. Таким образом, для всех достаточно больших n

$$\int_\Gamma |f(z)-L_n(f;\, z)|^p\,|dz| \leqslant A_7\varepsilon^p,$$

где постоянная A_7 зависит только от области и числа p [1].

[1] Доказательство теоремы 1 существенно отличается по своему методу от доказательства, данного Кертиссом [2] для частного случая аналитической кривой Γ и $p=2$, которое основано на использовании специальных свойств многочленов Фабера.

Пусть теперь в уравнении $z=z(s)$ кривой Γ s_k представляют значения дуги s, соответствующие точкам интерполяции $z_k^{(n)}=z_k=z(s_k)$ $(k=1, 2, \ldots, n)$. Рассмотрим интерполяционные многочлены

$$\bar{L}_n(f;\ z_k)=\frac{1}{l_k}\int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} f[z(s)]\,ds \quad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{25}$$

где $l_k=s_k-s_{k-1}$, $s_0=s_n$; в случае окружности $|z|=1$ такие многочлены впервые рассматривал С. М. Лозинский [1].

Мы будем рассматривать аналитические в области D функции класса E_p в смысле В. И. Смирнова [5]; такие функции имеют почти всюду на Γ угловые предельные значения, интегрируемые в степени p.

Теорема 2. *Пусть граница Γ области D принадлежит классу Λ_1'' и $f(z)$ — аналитическая функция класса E_p $(p>1)$ в области D, тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma}|f(z)-\bar{L}_n(f;\ z)|^p\,|dz|=0.$$

Доказательство. Для многочлена

$$\bar{L}_n(f;z)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{l_k}\int\limits_{s_{k-1}}^{s_k} f[z(s)]\,ds\,\frac{\omega_n(z)}{\omega_n'(z_k)(z-z_k)} \tag{26}$$

в силу оценки (4) имеем

$$\int\limits_{\Gamma}|\bar{L}_n(f;\ z)|^p\,|dz|\leqslant M\int\limits_{|w|=1}|\bar{L}_n[f;\ \psi(w)]|^p\,|dw|.$$

Воспользуемся представлением, аналогичным (21): $\bar{L}_n[f;\ \psi(w)]=\bar{L}_n(f;\ w)+\bar{B}(f;\ w)+\bar{C}(f;\ w)$, в котором слагаемые имеют соответственно вид функций в равенствах (22) — (24), с заменой величины $f_2[\psi(w_k)]$ величиной (25). С помощью неравенства $|a+b+c|^p\leqslant 3^p(|a|^p+|b|^p+|c|^p)$ получим

$$\int\limits_{\Gamma}|\bar{L}_n(f;\ z)|^p\,|dz|\leqslant 3^pM\Big[\int\limits_{|w|=1}|\bar{L}_n(f;\ w)|^p\,|dw|+$$
$$+\int\limits_{|w|=1}|\bar{B}(f;\ w)|^p\,|dw|+\int\limits_{|w|=1}|\bar{C}(f;\ w)|^p\,|dw|\Big]. \tag{27}$$

Из оценки (4) следует

$$l_k=\int\limits_{2\pi(k-1)/n}^{2\pi k/n}|\psi'(e^{i\theta})|\,d\theta\geqslant 2\pi m/n, \tag{28}$$

откуда с помощью леммы 5 и неравенства Гёльдера получим

$$\int\limits_0^{2\pi}|\bar{L}_n(f;\ e^{i\theta})|^p\,d\theta\leqslant\frac{B_p^p}{m}\int\limits_{\Gamma}|f[z(s)]|^p\,ds=A_9\|f\|^p. \tag{29}$$

Оценим теперь норму функции $\bar{B}(f;\ w)$. Из неравенств (11), (28) и неравенства Гёльдера следует

$$\int\limits_{|w|=1}|\bar{B}(f;\ w)|^p\,|dw|\leqslant\frac{2B_0^pL^{p-1}}{m^p\pi^{p-1}}\int\limits_{\Gamma}|f[z(s)]|^p\,ds=A_{10}\|f\|^p, \tag{30}$$

где L — длина кривой Γ. Используя лемму 3 при $\alpha=1$, неравенство Гёльдера и оценки (4), (5), (28), получим

$$\int\limits_{|w|=1} |\overline{C}(f;\ w)|^p\,|dw| \leqslant 2\pi L^{p-1}(MA_1/2\pi m m_1)^p \int\limits_{\Gamma} |f[z(s)]|^p\,ds = A_{11}\|f\|^p. \tag{31}$$

Из неравенств (27), (29) — (31) имеем

$$\|\overline{L}_n(f;\ z)\| \leqslant A_{12}\|f\|, \tag{32}$$

где нормы берутся в метрике L_p по кривой Γ и постоянная A_{12} зависит только от области и числа p.

Пусть теперь $P(z)$ — некоторый многочлен; докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{L}_n(P;\ z) = P(z)$ равномерно по $z \in \overline{D}$. Для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} |\overline{L}_n(P;\ z) - L_n(P;\ z)| = 0 \tag{33}$$

равномерно для $z \in \overline{D}$. Из оценки для точек дуги между s_{k-1} и s_k

$$|P[z(s)] - P(z_k)| = \left|\int\limits_{z_k}^{z} P'(z)\,dz\right| \leqslant l_k \max_{z\in\Gamma} |P'(z)|$$

и неравенств (4) имеем для $z \in \Gamma$

$$|\overline{L}_n(P;\ z) - L_n(P;\ z)| \leqslant \frac{2M\pi}{n} \max_{z\in\Gamma} |P'(z)| \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\omega_n(z)}{(z-z_k)\,\omega_n'(z_k)}\right|.$$

В работе [8] доказано, что для области D при условиях, менее ограничительных, чем в этой теореме, справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\omega_n(z)}{(z-z_k)\,\omega_n'(z_k)}\right| \leqslant A' \ln n,\quad z \in \overline{D}.$$

Отсюда уже следует соотношение (33), равномерное относительно $z \in \overline{D}$. Если $f(z) \in E_p$, то согласно теореме М. В. Келдыша [9] существует такой многочлен $P(z)$, что $\|f-P\| < \varepsilon$, где норма берется в метрике L_p по кривой Γ. Тогда с помощью оценки (32) имеем в метрике L_p на Γ: $\|f-\overline{L}_n(f;\ z)\| \leqslant \|f-P\| + \|P-\overline{L}_n(P;\ z)\| + \|\overline{L}_n(P;\ z) - \overline{L}_n(f;\ z)\| < \varepsilon + o(1) + A_{12}\varepsilon$, этим доказательство теоремы завершается.

Для случая, когда D — круг $|z|<1$, теорема была доказана С. М. Лозинским [1].

Теорема 3. *Пусть область D принадлежит классу Λ_α'' $(0<\alpha\leqslant 1)$ и $f(z)$ — аналитическая в D функция, непрерывная в замкнутой области $\overline{D}$, имеющая ограниченное изменение на Γ, тогда интерполяционные многочлены Лагранжа $L_n(f;\ z)$ степени $\leqslant n-1$, совпадающие с $f(z)$ в точках $z_k = z_k^{(n)}$ $(k=1,\ 2,\ldots,\ n)$, сходятся равномерно к $f(z)$ в $\overline{D}$.*

Доказательство. По произвольному $\varepsilon>0$ выберем многочлен $f_1(z)$ и функцию $f_2(z)$ так же, как в начале доказательства теоремы 1, тогда справедливо равенство (20). Пусть $\varphi_1(w)$ и $\varphi_2(w)$ —

функции, аналитические соответственно в областях $|w|<1$ и $|w|>1$, определенные интегралом типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\frac{f_2[\psi(\tau)]}{\tau-w}\,d\tau. \tag{34}$$

Согласно лемме 4 функция $\varphi_1(w)$ непрерывна в круге $|w|\leqslant 1$ и имеет ограниченное изменение на окружности $|w|=1$. Мы имеем в силу формулы Сохоцкого соотношение $f_2[\psi(w)]=\varphi_1(w)-\varphi_2(w)$. Из существования особого интеграла (34) в смысле главного значения на $|w|=1$ и формулы

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f_2(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta=\frac{1}{2}f_2(z),$$

где интеграл взят в смысле главного значения для $z\in\Gamma$, после замены переменной $\zeta=\psi(\tau)$ получаем представление

$$\varphi_2(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\tau|=1}\left[\frac{1}{\tau-w}-\frac{\psi'(\tau)}{\psi(\tau)-\psi(w)}\right]f_2[\psi(\tau)]\,d\tau. \tag{35}$$

Из соотношений (20) и (21) имеем $f(z)-L_n(f;\,z)=f_2[\psi(w)]-$ $-L_n(f_2;\,w)-B(f_2;\,w)-C(f_2;\,w)$, отсюда

$$|f(z)-L_n(f;\,z)|\leqslant|\varphi_1(w)-L_n(\varphi_1;\,w)|+|\varphi_2(w)|+|L_n(\varphi_2;\,w)|+$$
$$+|B(f_2;\,w)|+|C(f_2;\,w)|. \tag{36}$$

Сумма $|B(f_2;w)|+|C(f_2;w)|$ не превосходит $Q\varepsilon$ при всех $n>n_0=$ $=n_0(\varepsilon)$ на $|w|=1$ в силу оценок в доказательстве теоремы 1, где постоянная Q зависит только от области. Из формулы (35) и оценки (11) имеем $|\varphi_2(w)|\leqslant B_0\varepsilon$. Согласно теореме Кертисса [2] для функции $\varphi_1(w)$, аналитической в круге $|w|<1$, непрерывной в $|w|\leqslant 1$ и имеющей ограниченное изменение на окружности $|w|=1$, интерполяционные многочлены Лагранжа $L_n(\varphi_1;\,w)$ сходятся равномерно к $\varphi_1(w)$ на $|w|=1$, поэтому $|\varphi_1(w)-L_n(\varphi_1;\,w)|<\varepsilon$, как только $n>n_1$. Остается оценить величину $L_n(\varphi_2;\,w)$. Так как функция $\varphi_2(w)=\sum\limits_{s=1}^{\infty}\gamma_{-s}w^{-s}$ непрерывна в области $|w|\geqslant 1$ и имеет ограниченное изменение на $|w|=1$, то по известной теореме Харди и Литтльвуда ([6], т. 1, с. 452—455) ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty}|\gamma_{-s}|$ сходится. Представляя многочлены Лагранжа $L_n(\varphi_2;\,w)$ в виде

$$L_n(\varphi_2;\,w)=\sum_{j=0}^{n-1}\Lambda_j^{(n)}w^j$$

и выражая коэффициенты $\Lambda_j^{(n)}$ через числа γ_{-s}, как это сделано в [2], мы придем к оценке для $|w|=1$

$$|L_n(\varphi_2;\,w)|\leqslant\left|\sum_{s=1}^{n}\gamma_{-s}w^{-s}\right|+\sum_{s=n+1}^{\infty}|\gamma_{-s}|.$$

Отсюда следует для всех достаточно больших n неравенство $|L_n(\varphi_2; w)| < (B_0 + 2)\varepsilon$, и доказательство завершается.

В частном случае, когда Γ — аналитическая кривая, эта теорема была доказана в [2].

г. Ростов-на-Дону

Поступило
9 IV 1968

ЛИТЕРАТУРА

1. Лозинский С. М. Ueber Interpolation. Матем. сб., т. 8 (50) : 1, 1940, с. 57—67.
2. Curtiss J. H. Convergence of complex Lagrange interpolation polynomials on the locus of the interpolation points. Duke Math. J., v. 32, № 2, 1965, p. 187—204.
3. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, отд. 2, гл. 1. М.—Л., ОНТИ, 1937.
4. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.—Л., ГИТТЛ, 1952.
5. Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.—Л, ГИТТЛ, 1950.
6. Зигмунд А. Тригонометрические ряды. М., „Мир“, 1965.
7. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. М., „Наука“, 1964.
8. Альпер С. Я. О сходимости интерполяционных полиномов Лагранжа в комплексной области. УМН, т. 11, вып. 5, 1956, с. 44—50.
9. Келдыш М. В. Об одном классе экстремальных полиномов. ДАН СССР, т. 4, 1936, с. 163—166.

И. Г. ГАЛЯУТДИНОВ. ПРОМЕЖУТОЧНЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ПЮИЗЕ И ЗАДАЧА КОШИ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматривается задача Коши: $P(D_t, D_x)u \equiv D_t^p u(x, t) + a_1(D_x) D_t^{p-1} u(x, t) + \dots + a_p(D_x) u(x, t) = 0$, $D_t^k u(x, 0) = \varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, p-1$. В том случае, когда полином $P(\lambda, s)$ разлагается на множители, получено необходимое и достаточное условие существования аналитического по t решения этой задачи. Достаточная часть этого результата переносится и на случай многомерной переменной x. Когда переменная x одномерна, рассмотрен также случай нераспадающихся уравнений и получено достаточное условие существования аналитического по t решения соответствующей задачи Коши. (Работа поступила в журнал „Математика“ 2. X. 1968.)

М. М. ГОЛЬДЕНБЕРГ, Н. Ф. СЕСЕКИН. О ГРУППАХ С ИНВАРИАНТНЫМИ НЕИЗОЛИРОВАННЫМИ ПОДГРУППАМИ

(аннотация статьи, принятой к печати)

Рассматриваются группы, в которых каждая подгруппа либо изолирована, либо инвариантна. Доказывается, что если группа указанного типа обладает отличным от единицы элементом непростого порядка, то она либо абелева, либо гамильтонова, либо прямое произведение абелевой p-группы типа p на p-группу с локально циклическим центром и коммутантом порядка p. Для конечных групп с циклическим центром и коммутантом порядка p найдены образующие и определяющие соотношения. (Работа поступила в журнал „Математика“ 7. V. 1969.)