V. S. Shulman, K. R. Davidson. Nest Algebras. Longman Sci. and Techn. Pitman Research Notes Math. 1988, 411 p.,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 3, 236–255

https://www.mathnet.ru/eng/aa194

РЕЦЕНЗИИ

K.R.Davidson. Nest Algebras.

Longman Sci. and Techn.

Pitman Research Notes Math. 1988. 411 p.

Гнездовой алгеброй называется алгебра всех операторов, оставляющих инвариантными элементы некоторого линейно упорядоченного семейства подпространств - „гнезда" (или „цепочки"), если пространство конечномерно, то это просто алгебра всех верхнетреугольных блок-матриц (при фиксированном разбиении базиса на блоки). К гнездовым алгебрам приводят, как будет видно из дальнейшего, различные направления функционального анализа - собственно теория операторных алгебр, где отказ от самосопряженности меняет класс фундаментальных объектов, выдвигая на первый план гнездовые и близкие к ним (субдиагональные, треугольные) алгебры, теория инвариантных подпространств (задача триангуляции семейства операторов), геометрия гильбертова пространства (задача классификации гнезд как „упорядоченных базисов") „некоммутативная теория функций", в которой операторы из гнездовых или субдиагональных алгебр играют роль аналогов аналитических функций (точнее, аналитических элементов функциональных алгебр), интегральные уравнения (спектральная теория уравнений Вольтерры, факторизационные методы в уравнениях Винера-Хопфа), случайные процессы (факторизация операторов преобразования). Первые глубокие результаты о гнездовых алгебрах были получены в начале 60-х годов М.Г.Крейном и его учениками, а также Рингроузом (см. монографии [27, 29]). После десятилетнего затишья начался новый период „бури и натиска" - в работах Арвесона, Андерсена, Ларсона, Лэнса, Дэвидсона создаются новые методы и решаются старые задачи. Итоги этого периода подведены в монографии Дэвидсона „Гнездовые алгебры", в дальнейшем для краткости обозначаемой „NA".

Забегая вперед и характеризуя книгу в целом, подчеркнем, во-первых, обилие блестящих результатов, многие из которых принадлежат ее автору, во-вторых, тщательно продуманную последовательность изложения и, в-третьих, мастерское включение обширного вспомогательного материала из смежных областей функционального анализа (W^*-алгебры, теория меры, теория структур, спектральная теория, теория функций, когомологии, алгебраическая K-теория, гармонический анализ, дилатации, вполне положительные отображения, инвариантные средние, геометрия банаховых пространств), причем некоторые из полученных в книге результатов вносят определенный вклад и в развитие этих смежных областей, или по крайней мере позволяют по-новому на них взглянуть. Отметим также, что, не дублируя содержание книги [29], „NA" включает некоторые ее главы в новую перспективу и содержит более простые доказательства ряда полученных в ней результатов.

Ниже мы обсудим часть рассмотренных в „NA" тем, надеясь не только дать представление о содержании книги, но и изложить результаты других публикаций, а также некоторые новые соображения (включая решение одного из поставленных в ней вопросов). Дополнительную информацию можно найти в обзорах [12,30]. Группировка тем по разделам и их порядок отличаются от принятых в „NA" (в частности, начнем мы с самого главного, подобно Булгаковскому герою, начавшему описание известных событий с того, как кот садился в трамвай).

Будем использовать стандартные обозначения: $\mathfrak{B}(H)$ - алгебра всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве H; $\mathcal{K}$, $\mathfrak{S}^1$, $\mathfrak{S}^2$ - идеалы компактных операторов, ядерных операторов, операторов Гильберта-Шмидта; $\mathcal{P}(H)$ - решетка всех замкнутых подпространств; $P(N)$ - ортогональный проектор на подпространство $N\subset H$ (иногда вместо $P(N)$ пишем N); $\sigma(T)$ - спектр оператора $T\in\mathfrak{B}(H)$, $\|T\|$ - его норма, $\|T\|_e$ - существенная норма, т.е. норма соответствующего элемента фактор-алгебры $\mathfrak{B}(H)/\mathcal{K}$; $\mathrm{lat}\ \mathcal{E}$ - решетка инвариантных подпространств семейства операторов $\mathcal{E}$; $\mathrm{alg}\ \mathcal{L}$ - алгебра всех операторов, оставляющих инвариантными все подпространства из семейства $\mathcal{L}\subset\mathcal{P}(H)$; гнездовые алгебры, следуя „NA", будем обозначать $\tau(\mathcal{N})$ вместо $\mathrm{alg}\ \mathcal{N}$. Решетки вида $\mathrm{lat}\ \mathcal{E}$ и алгебры вида $\mathrm{alg}\ \mathcal{L}$ называются *рефлексивными*. Решетка подпространств (полная подрешетка в $\mathcal{P}(H)$, содержащая 0 и 1) называется *коммутативной* (CSL), если коммутируют проекторы. Алгебры вида $\mathrm{alg}\ \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ - CSL, называются *CSL-алгебрами*. Пространство нормальных состояний на $\mathfrak{B}(H)$, т.е. положительных *-слабо непрерывных функционалов единичной нормы, обозначается $\Omega(H)$. Радикал произвольной банаховой алгебры $\mathcal{A}$ мы будем обозначать $\mathrm{rad}\ \mathcal{A}$. Символами H^p, обозначаются *пространства Харди* на единичной окружности (с мерой Лебега), т.е. подпространства в $L^p(1\le p\le\infty)$, состоящие из функций, коэффициенты Фурье которых с отрицательными номерами равны нулю.

§.1. Классификация гнезд

Будем обозначать через $\mathcal{N}_\omega$ гнездо, построенное по фиксированному базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом: $\mathcal{N}_\omega = \{N_n\}_{n=0}^{\infty}$, где N_n = л.о. $[e_1,\dots,e_n]$, $N_0=0$, $N_\infty=H$. По базису $\{e_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ строится гнездо $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}} = \{N_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, где N_n - замкнутая линейная оболочка (з.л.о.) множества $\{e_k\}_{k=n}^{\infty}$. Еще один важный пример - *гнездо Вольтерры* $\mathcal{N}_v= \{N_t: 0\le t\le 1\}$, где N_t - подпространство в $L^2([0;1])$, состоящее из функций, равных нулю на $[0;t]$. Все эти гнезда *максимальны* (не содержатся в больших). Вообще максимальность гнезда эквивалентна отсутствию неодномерных *атомов* (подпространств вида $M\ominus N$, где N, M - элементы гнезда, между которыми нет других элементов). Гнездо без атомов называется *непрерывным* (таково $\mathcal{N}_v$), гнездо, атомы которого порождают H - *вполне атомическим* (таковы $\mathcal{N}_\omega$, $\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}$).

Два гнезда называются *порядково изоморфными*, если между ними есть биекция, сохраняющая порядок (*порядковый изоморфизм*). Все непрерывные гнезда в сепарабельном пространстве изоморфны отрезку (и могут нумероваться его точками). В то же время два вполне атомических гнезда могут не быть порядково изоморфными ($\mathcal{N}_\omega$ и $\mathcal{N}_\mathbb{Z}$) и даже равномощными (пример несчетного вполне атомического гнезда можно получить, нумеруя базис рациональными числами и рассматривая подпространство с „номерами" в $[-\infty;\ t[$ и $]-\infty; t]$, $t\in\mathbb{R}$).

Гнезда $\mathcal{N}$ и $\mathcal{M}$ называются *подобными* (*унитарно эквивалентными*), если существует обратимый (унитарный) оператор T такого, что $\mathcal{M} = T\mathcal{N}(=\{TN: N\in\mathcal{N}\})$. До 1980 г. было неизвестно, различаются ли эти понятия, т.е. могут ли подобные гнезда не быть унитарно эквивалентными. Центральное место в „NA" занимают решение этого вопроса, данное Ларсоном [21], и полная классификация гнезд относительно подобия, описываемые следующей теоремой Дэвидсона:

Т е о р е м а о п о д о б и и (ТП). *Для гнезда подобны тогда и только тогда, когда между ними существует порядковый изоморфизм, сохраняющий размерности атомов. Такой изоморфизм реализуется оператором, отличающимся от унитарного на компактный оператор сколь угодно малой нормы.*

Различие с унитарной классификацией хорошо просматривается на классе непрерывных гнезд. По ТП все они подобны. В то же время, например, гнезда $\mathcal{N}_\mathrm{v}$ и $\mathcal{N}_\mathrm{v}^{(2)} = \{N\oplus N: N\in\mathcal{N}\}$ не являются унитарно эквивалентными, так как порожденные ими W^*-алгебры имеют различные кратности. В определенном смысле кратность - единственный инвариант унитарной эквивалентности, „стираемый" подобием, - непрерывные гнезда одинаковой (постоянной) кратности унитарно эквивалентны. Однако даже для однократных гнезд не каждый порядковый изоморфизм реализуется унитарно: для существования унитарного оператора T такого, что $TN_t=M_t$ $(0\le t\le 1)$ необходима взаимная абсолютная непрерывность соответствующих спектральных мер. Существование же обратимого оператора с тем же свойством гарантируется ТП.

Несущественность препятствия кратности имеет особое значение для теории инвариантных подпространств, одной из основных задач которой является изучение возможности *триангуляции* операторов, т.е. нахождения максимального гнезда, состоящего из инвариантных подпространств. Для компактных операторов такая возможность гарантируется теоремой фон Неймана-Ароншайна-Смита о существовании инвариантных подпространств у любого компактного оператора. Кажется, однако, что максимальное гнездо тем „максимальнее", чем меньше его кратность ($\mathcal{N}_\mathrm{v}^{(2)}$ „толще", чем $\mathcal{N}_\mathrm{v}$), в связи с чем в ряде работ, начиная с [27,29], ставилась задача нахождения инвариантных гнезд кратности 1. ТП выявляет „неинвариантность" этой задачи: взяв оператор с единственным максимальным гнездом инвариантных подпространств (например, оператор интегрирования), можно построить подобный ему оператор с единственным максимальным гнездом любой кратности.

Фундаментальную роль в решении проблемы подобия сыграла теорема Андерсена [1] *об аппроксимативной унитарной эквивалентности* любых непрерывных гнезд. Гнезда N и M называются аппроксимативно унитарно эквивалентными, если существуют порядковый изоморфизм $\theta: N \longrightarrow M$ и последовательность унитарных операторов U_n таких, что операторы $P(U_n N) - P(\theta(N))$ при всех $n \in \mathbb{N}$ компактны и при $n \longrightarrow \infty$ $\sup_{N \in \mathcal{N}} \| P(U_n N) - P(\theta(N)) \| \longrightarrow 0$. Из ТП видно, что подобные гнезда аппроксимативно унитарно эквивалентны; верно и обратное - схема доказательства приведена в п. 2.

Данное в „NA" доказательство теоремы Андерсена короче и нагляднее оригинального. К сожалению, в книге не нашло отражения доказательство Арвесона [2], основанное на общем результате, среди других следствий которого - „*некоммутативная теорема Вейля-фон Неймана*", доказанная Войкулеску [28] и ставшая одним из сильнейших инструментов операторной теории (она используется и в „NA" при рассмотрении унитарных орбит гнездовых алгебр).

Основным объектом в [2] являются представления локально компактных $*$-полугрупп. Примеры: 1) отрезок $[0;1]$ с обычной топологией, умножением $t,s \longmapsto \min\{t;s\}$ и инволюцией $t^*=t$; представления такой полугруппы имеют вид $t \longmapsto P_t$, где $\{P_t : 0 \le t \le 1\}$ - непрерывное гнездо (проекторов); 2) локально компактная группа G с инволюцией $x^*=x^{-1}$; ее представления - это сильно непрерывные унитарные представления группы G; 3) счетное плотное подмножество C^*-алгебры, замкнутое относительно умножения и инволюции; топология дискретна, умножение и инволюция обычны, представления соответствуют представлениям C^*-алгебры. Представление U полугруппы X называется *подчиненным* представлению V, если для любого нормального состояния $\varphi \in \Omega(H_U)$ функция $x \longmapsto \varphi(U(x))$ является равномерным на компактах пределом последовательности функций $x \longmapsto (V(x)\xi_n, \xi_n)$, где $\xi_n \longrightarrow 0$ слабо. Представления U и V называются аппроксимативно унитарно эквивалентными, если для некоторой последовательности унитарных операторов T_n функции $x \longmapsto T_n(x) - V(x)T_n$ компактнозначны, непрерывны и равномерно на компактах стремятся к нулю при $n \longrightarrow \infty$. Общий результат, о котором говорилось выше, состоит в том, что условие взаимной подчиненности представлений (и их „размножений") влечет аппроксимативную унитарную эквивалентность. В примере 3) это приводит к теореме Войкулеску: два представления C^*-алгебры, образы которых не содержат компактных операторов, аппроксимативно унитарно эквивалентны, если их ядра совпадают (взаимная подчиненность обеспечивается теоремой Глимма о плотности векторных состояний в пространстве состояний C^*-алгебры, не содержащей компактных операторов). Чтобы вывести отсюда классическую теорему Вейля-фон Неймана о реализуемости нормальных операторов компактными возмущениями диагональных, нужно рассмотреть C^*-алгебру, порожденную нормальным оператором A (можно считать, что A не имеет собственных значений), и заметить, что всякое счетное плотное подмножество $\Lambda \subset \sigma(A)$ определяет ее точное представление $\rho_\Lambda = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \lambda$ (точки спектра отождествляются с одномерными представлениями). Применяя теорему Войкулеску к представлениям id (тождественное представление) и $\pi = \rho_\Lambda \oplus \rho_\Lambda \oplus \dots$, найдем последовательность унитарных операторов

U_n таких, что $\| A-U_n^*\pi(A)U_n\| \longrightarrow 0$, и все операторы $A-U_n^*\pi(A)U_n$ компактны (в дальнейшем Войкулеску усилил этот результат, показав, что $\| A-U_n^*\pi(A)U_n\|_{\mathcal{G}^2}\longrightarrow 0$). В примере 2) получаем: если у двух представлений ЛКАГ спектры и существенные спектры совпадают, то представления аппроксимативно унитарно эквивалентны. В примере 1) взаимная подчиненность представлений $t \longmapsto P_t$ и $t \longmapsto Q_t$ устанавливается следующим образом. Пусть $\varphi\in\Omega(H)$, $f(t)=\varphi(P_t)$, $L\subset H$ - конечномерное подпространство, $\mathcal{E}_L$ - совокупность всех функций $f_\xi(t) = (Q(t)\xi,\xi)$, где $\xi\perp L$, $\|\xi\|\le 1$, тогда f принадлежит $*$-слабому замыканию $\mathcal{E}_L$ в пространстве функций ограниченной вариации на $[0;1]$ ($\mathcal{E}_L$ выпукло, так что достаточно рассмотреть преданнуляторы в $C([0;1])$). Увеличивая L, найдем $\xi_n \longrightarrow 0$ такие, что $f_{\xi_n}(t) \longrightarrow f(t)$; по теореме Дини, сходимость равномерна. Мы получаем аппроксимативную унитарную эквивалентность любых двух представлений, т.е. теорему Андерсена. Отметим, что в [2] рассматривается значительно более широкий класс решеток, чем непрерывные гнезда. В терминологии п.6 это решетки $L(X,<,\mu)$, где $(X,<)$ - упорядоченная ЛКАГ, μ - мера, непрерывная относительно сдвигов на классе „возрастающих" множеств.

§ 2. Проекторные формулы расстояний

Здесь мы переходим от геометрии гильбертова пространства к геометрии пространства операторов. В 1975 г. Арвесон [3] доказал, что расстояние от произвольного оператора до гнездовой алгебры можно вычислять по формуле

$$\operatorname{dist}(X,\tau(N)) = \sup \| P(N)^\perp XP(N)\|. \tag{1}$$

Уже в [3] эта формула успешно применялась в задачах факторизации и интерполяции операторов; дальнейшие исследования значительно расширили круг ее приложений. Посмотрим, например, как используется (1) при выводе подобия гнезд из аппроксимативной унитарной эквивалентности. Если гнезда N и M аппроксимативно унитарно эквивалентны, то существуют унитарные операторы, „передвигающие" N сколь угодно близко к M. Для доказательства подобия нужны операторы, также приближающие N к M и к тому же близкие между собой (тогда оператор подобия - их предел). Пусть A - обратимый оператор такой, что $\|P(AN_t)-P(M_t)\| <\varepsilon$ и пусть $\varepsilon>0$; на расстоянии порядка δ от A ищется оператор B, для которого $\|P(BN_t)-P(M_t)\| <\varepsilon$. Пользуясь аппроксимативной унитарной эквивалентностью, выбираем унитарный оператор U, удовлетворяющий тому же неравенству; легко убедиться, что $\|P(U^{-1}AN_t)-P(N_t)\|$ имеет порядок δ. Из (1) следует, что $U^{-1}A$ близок к $\tau(N)$, т.е. $\| U^{-1}A-C\|<\delta'(=O(\delta))$ для некоторого $C\in\tau(N)$. Нетрудно проверить, что $C^{-1}\in\tau(N)$, так что $CN_t=N_t$ и оператор $B=UC$ преобразует N так же, как и U, причем $\|A-B\|<\delta'$.

Если мы хотим реализовать подобие компактным возмущением унитарного оператора, то должны исходить из осуществляющей аппроксимативную унитарную эквивалентность последовательности $\{U_n\}_{n=1}^\infty$, для которой $U_n-U_1\in\mathcal{K}$. Здесь полезна аналогичная (1) формула для расстояния до „*квазитреугольной*" алгебры $Q\tau(N)=\tau(N)+\mathcal{K}$.

Если $N = \{N_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\dim N_n<\infty$, то

$$\operatorname{dist}(X,Q\tau(N)) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \| P_n^{\perp} XP_n\|, \tag{2}$$

так что $x\in Q\tau(N)$ тогда и только тогда, когда X *квазитреуголен* относительно цепочки $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$, что оправдывает терминологию. Напомним, что оператор X называется треугольным (квазитреугольным), если $P_n^{\perp} XP_n=0$ (соответственно $\|P_n^{\perp} XP_n\| \longrightarrow 0$) для некоторой возрастающей к 1 последовательности конечномерных проекторов. То, что всякий квазитреугольный оператор представляется в виде суммы треугольного и компактного, было замечено еще Халмошем [45], но возможность такого представления без изменения цепочки - довольно неожиданное следствие формулы (2). Для произвольного гнезда

$$\operatorname{dist}(X,Q\tau(N)) = \operatorname{dist}_C(\Phi_X, C_0), \tag{3}$$

где C - пространство сильно непрерывных функций $N \longrightarrow \mathfrak{B}(H)$, C_0- его подпространство, состоящее из непрерывных по норме $\mathcal{K}$-значных функций, $\Phi_X(N)=P(N)^{\perp}XP(N)$. В частности, $X\in Q\tau(N)$ тогда и только тогда, когда операторы $P(N)^{\perp}XP(N)$ компактны и непрерывно зависят от N.

Последнее замечание показывает, что аппроксимативная унитарная эквивалентность гнезд влечет унитарную эквивалентность квазитреугольных алгебр; заменяя одно из гнезд унитарно эквивалентным, можно считать, что эти алгебры совпадают. Исследование условия $Q\tau(N)=Q\tau(M)$, проведенное в „NA" с использованием нетривиальных результатов теории W^*-алгебр (таких, как теореме Джонсона-Пэррота о $\mathcal{K}$-значных дифференцированиях), завершает доказательство.

Еще одно важное приложение формул (1) и (3) можно получить, рассматривая в пространстве L^2 на единичной окружности оператор умножения M_f на функцию $f\in L^{\infty}$ и гнездо $N_{\mathbb{Z}}$, построенное по базису $\{z^n\}_{n=-\infty}^{\infty}$. В этом случае все операторы $P(N)^{\perp}M_fP(N)$ $(N\in N_{\mathbb{Z}})$ унитарно эквивалентны, и потому формулы (1),(3) дают

$$\operatorname{dist}(M_f,\tau(N_{\mathbb{Z}})) = \| P_0^{\perp} M_fP_0\|, \tag{4}$$

где $P_0=P(H^2)$ (ясно, что $H^2=$ з.л.о. $\{z^n\}_{n\ge0} \in N_{\mathbb{Z}}$). Оператор $H_f=P_0^{\perp}M_fP_0$ называется *оператором Ганкеля*. Можно показать, что

$$\operatorname{dist}(M_f,\tau(N_{\mathbb{Z}})) = \operatorname{dist}_{L^{\infty}}(f,H^{\infty}) \tag{5}$$

(для этого используется проектор единичной нормы из $\mathfrak{B}(H)$ на подалгебру всех операторов умножения, переводящий $\tau(N_{\mathbb{Z}}$ в операторы умножения на функции из H^{∞}). Поэтому из (4) следует известная *формула Нехари*

$$\| H_f \| = \operatorname{dist}(f,H^{\infty}) \tag{6}$$

при всех $f\in L^{\infty}$.

Данный в „NA" вывод формулы (3) основан на геометрическом результате, который мы, с целью добиться большей наглядности, сформулируем в иных терминах. Условимся говорить, что подпространства $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ банахова пространства $\mathfrak{X}$ *согласованы*, если расстояние от элементов любого из них до другого равно расстоянию до их пересечения. В частности, согласованы подпространства, образующие *M-пару* (т.е. такие, что $\mathrm{dist}(x,\mathfrak{X}_1\cap\mathfrak{X}_2) = \max\{\mathrm{dist}(x,\mathfrak{X}_1), \mathrm{dist}(x,\mathfrak{X}_2)\}$ для всех $x\in\mathfrak{X}$) или *L-пару* (вместо максимума - сумма). Подпространство $\mathcal{M}\subset\mathfrak{X}$ называется *M-идеалом,* если его аннулятор $\mathcal{M}^{\perp}$ в $\mathfrak{X}^*$ имеет дополнение $\tilde{\mathcal{M}}$, образующее с ним L-пару. При этом $\tilde{\mathcal{M}}$ изометрично $\mathcal{M}^*$ и $\sigma(\mathfrak{X},\tilde{\mathcal{M}})$-топология в $\mathfrak{X}$ называется *$\mathcal{M}^*$-топологией.* Если $\mathfrak{X}$ - C^*-алгебра, то M-идеалы - это замкнутые двусторонние идеалы; отметим еще, что $\mathcal{K}^*$-топология в $\mathfrak{B}(H)$ - это $*$-слабая топология. Следующее утверждение при $\mathfrak{X}=\mathfrak{B}(H), \mathcal{M}=\mathcal{K}$ доказано Фоллом, Арвесоном и Махли [15], а в общем случае - Дэвидсоном и Пауэром [9]: если $\mathcal{M}$ - M-идеал в $\mathfrak{X}$ и $\mathcal{S}$ - такое подпространство, что $\mathcal{S}\cap\mathcal{M}$ $\mathcal{M}^*$-плотно в $\mathcal{S}$, то $\mathcal{M}$ и $\mathcal{S}$ согласованы.

Применяя это к $\mathfrak{X}=\mathfrak{B}(H)$; $\mathcal{M}=\mathcal{K}$, $\mathcal{S}=\tau(\mathcal{N})$, мы помимо формул для расстояния до $\tau(\mathcal{N})\cap\mathcal{K}$ в $\tau(\mathcal{N})$ или $\mathcal{K}$ получим замкнутость $Q\tau(\mathcal{N})$. Отсюда, используя (1), можно вывести, что $\Phi_X\in C_0$ тогда и только тогда, когда $X\in Q\tau(\mathcal{N})$. Теперь, применяя ту же теорему с $\mathfrak{X}=C, \mathcal{M}=C_0$ (это двусторонний идеал в C) и $\mathcal{S} = \{\Phi_A: A\in\mathfrak{B}(H)\}$, имеем $\mathrm{dist}\ (\Phi_X,C_0)=\mathrm{dist}\ (\Phi_X,C_0\cap\mathcal{S})=\inf\{\|\Phi_{X-Y}\| : \Phi_Y\in C_0\} = \mathrm{dist}\ (X,Q\tau(\mathcal{N}))$.

В „NA" даны три доказательства формулы (1), два из которых нашел Пауэр, основываясь на результатах Пэррота [26] и Лэнса [20]. Теорема Пэррота утверждает, что $\mathrm{dist}\ (X,P\mathfrak{B}(H)Q)=\max\ \{\|P^{\perp}X\|,\|XQ^{\perp}\|\}$ для любых проекторов P, Q; для вывода отсюда (1) используется элементарный, но изящный прием. В [37] теорема Пэррота обобщена следующим образом: два „разносторонних" идеала C^*-алгебры образуют M-пару. Отсюда следует также, что если J - двусторонний идеал, а F - пересечение левого и правого идеалов, то J,F - M-пара. В частности,

$$\mathrm{dist}\ (X,P\mathcal{K}Q) = \max\ \{\|X\|_e,\ \|P^{\perp}X\|,\|XQ^{\perp}\|\}, \tag{7}$$

что позволяет установить следующее усиление теоремы Дэвидсона-Пауэра о согласованности $\tau(\mathcal{N})$ с $\mathcal{K}$: $\tau(N)$ и $\mathcal{K}$ образуют M-пару (отметим, что для $\mathcal{N}=\mathcal{N}_\omega$ это доказано в [46]; доказательство существенно использует специфику гнезда $\mathcal{N}_\omega$).

Попытка включения формул типа (1) в геометрический контекст приводит к следующему определению [36]: подпространство $\mathfrak{X}_1$ банахова пространства $\mathfrak{X}$ называется *$\mathfrak{Y}$-равномерным,* если единичный шар его аннулятора в подпространстве $\mathfrak{Y}\subset\mathfrak{X}^*$ содержит достаточно много крайних точек единичного шара $\mathfrak{Y}$ (является их $*$-слабо замкнутой выпуклой оболочкой). Для подпространства $\mathcal{A}\subset\mathfrak{B}(H)$ $\mathfrak{S}^1$-равномерность эквивалентна равенству $\mathrm{dist}\ (X,A) = \sup\ \{\|PXQ\| : PAQ=Q\}$, которое для алгебр с единицей переписывается так:

$$\mathrm{dist}\ (X,A) = \sup\ \{\|P^{\perp}XP\| : P\in \mathrm{lat}\ A\}. \tag{8}$$

В частности, (1) означает, что гнездовые алгебры равномерны. Отметим, что в $\mathfrak{B}(H)$ всякое одномерное подпространство равномерно [36]. Связи этих понятий и результатов с теорией инвариантных подпространств, спектральным синтезом, минимаксом, числовыми областями и нормами дифференцирований обсуждаются в [32, 33, 36].

Почти столь же удобны, как (8), неравенства вида

$$\operatorname{dist}(X,\mathcal{A}) \le C \cdot \sup\{\|P^{\perp}XP\| : P \in \operatorname{lat}\mathcal{A}\}. \tag{9}$$

Примеры алгебр с таким свойством (*гиперрефлексивных*) обсуждаются в [22,16]. Вопрос о гиперрефлексивности алгебр фон Неймана открыт; частные результаты имеются в „NA". Дэвидсон [8] доказал гиперрефлексивность *алгебры аналитических теплицевых операторов* в H^2 (т.е. $*$-слабо замкнутой алгебры, порожденной односторонним сдвигом). Этот результат не включен в книгу, но зато она содержит конструкцию негиперрефлексивной CSL-алгебры, принадлежащую Дэвидсону и Пауэру [8].

§ 3. Разложение Лэнса-Шмульяна и предуальное пространство гнездовой алгебры

В „NA" многократно используется следующий результат (впервые полученный, по-видимому, Ю.Л.Шмульяном [35] и примененный к гнездовым алгебрам Лэнсом [24]): для любого оператора $T\ge 0$ и проектора P существуют операторы T_1, T_2 такие, что $T_1\ge 0$, $T=T_1+T_2$, $PT_2=0$ и $\operatorname{Ker} T_1=\operatorname{Ker} PT$. Доказательство (оно значительно короче имеющихся в литературе): обозначим через $\Phi(P)$ проектор на подпространство $\overline{T^{1/2}PH}$ и положим $T_1=T^{1/2}\Phi(P)T^{1/2}$, $T_2=T^{1/2}(1-\Phi(P))T^{1/2}$, тогда $(1-\Phi(P))T^{1/2}P=0$, и потому $T_2P=0$, $PT_2=0$; так как $\overline{T_1H}=\overline{T^{1/2}\Phi(P)H}=\overline{T^{1/2}T^{1/2}PH}=\overline{TPH}$, то $\operatorname{Ker} T_1=\operatorname{Ker} PT$.

Отметим еще, что $\Phi(P)=UU^*=UPU^*$, где U - угловой множитель в полярном разложении оператора $T^{1/2}P$, так что $\Phi(P)<P$ в смысле сравнения проекторов в алгебре $W^*(T,P)$; отсюда следует, что если $P<Q$, то $T^{1/2}(\Phi(Q)-\Phi(P))T^{1/2}=Y^*Y$, где $Y=P^{\perp}YQ$.

Если $\mathcal{N}$ - цепь, то для любой пары $N_1\subset N_2$ из $\mathcal{N}$ положим $e([N_1,N_2])=\Phi(P(N_2))-\Phi(P(N_1))$; проекторнозначную меру на интервалах обычным путем продолжаем до спектральной меры $e(\cdot)$ на $\mathcal{N}$. Полагая $\mu_T(\cdot)=T^{1/2}e(\cdot)T^{1/2}$, получим сильно непрерывную борелевскую меру μ_T со значениями в $\mathfrak{B}(H)_+$.

Пусть $S\in\mathfrak{B}(H)$, $N\in\operatorname{lat} S$, $P=P(N)$, $S=UT$ - полярное разложение. Взяв разложение Лэнса-Шмульяна $T=T_1+T_2$ и полагая $S_i=UT_i$, легко убеждаемся, что $P^{\perp}S_1=0$, $S_2P=0$, откуда следует, что если $\mathcal{N}$ - гнездо, содержащее N, и $S\in\tau(\mathcal{N})$, то $S_i\in\tau(\mathcal{N})$. Очевидно также, что $\|S\|_{\mathfrak{S}^1}=\|S_1\|_{\mathfrak{S}^1}+\|S_2\|_{\mathfrak{S}^1}$ при $S\in\mathfrak{S}^1$. Следовательно, крайние точки шара в $\mathfrak{S}^1\cap\tau(\mathcal{N})$ - операторы ранга 1, так что по теореме Шоке каждый ядерный оператор из $\tau(\mathcal{N})$ представим в виде $T=\int_\Lambda T(\lambda)d\mu(\lambda)$, где $\|T\|_1=\int_\Lambda \|T(\lambda)\|_1 d\mu(\lambda)$ и все $T(\lambda)$ имеют ранг 1. В „NA" приведен более точный результат Пауэра, основанный на теореме типа теоремы Радона-Никодима для меры μ_T. Пауэр доказал также, что ядерные операторы из $\tau(\mathcal{N})$ допускают и дискретные „почти экстремальные" представления: для $T\in\tau(\mathcal{N})\cap\mathfrak{S}^1$ и $\varepsilon>0$ найдутся такие операторы ранга 1 $T_n\in\tau(\mathcal{N})$, что $T=\sum_{n=1}^{\infty}T_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}\|T_n\|<\|T\|+\varepsilon$ (как показал Дэвидсон в „NA", для $\varepsilon=0$ это не всегда возможно). Пауэр заметил также, что следствием этого результата является интегральный аналог неравенства Харди

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\hat{h}(n)|}{n+1}\le \| h \|_{L^1},$$

где $h\in H^1$, $\hat{h}(n)$ - коэффициенты Фурье. Пусть $h\in L^1(\mathbb{R}^2)$ и $h(x,y)=0$ при $x<y$, тогда величина $\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\mathbb{R}^2}\frac{|h(x,y)|}{x-y}dxdy$ не превосходит $\mathfrak{S}^1$-нормы интегрального оператора с ядром $h(x,y)$ в $L^2(\mathbb{R})$ (разбиение на слагаемые ранга 1 позволяет свести доказательство к случаю $h(x,y)=a(x)b(y)$).

Аннулятор подпространства $\mathfrak{S}^1\cap\tau(\mathcal{N})$ совпадает с $\tau(\mathcal{N})$, если $\mathcal{N}$ непрерывно; в общем случае $\tau(\mathcal{N})=\mathcal{A}_0(\mathcal{N})^{\perp}$, где подпространство $\mathcal{A}_0(\mathcal{N})\subset\mathfrak{S}^1\cap\tau(\mathcal{N})$ состоит из операторов *с нулевой „диагональю"* ($EXE=0$, если E - атом). Так как крайние точки шара в $\mathcal{A}_0(\mathcal{N})$ - операторы ранга 1, то $\tau(\mathcal{N})$ - равномерное пространство. Это второе из найденных Пауэром доказательств формулы (1). Пауэр [24] обнаружил также, что на этом пути получается простое доказательство теоремы В.Б. Лидского о следе. Пусть оператор $S\in\mathfrak{S}^1$ квазинильпотентен (общий случай сводится к этому стандартным приемом проектирования на ортогональное дополнение оболочки собственных и корневых векторов), и пусть $\mathcal{N}$ - максимальное гнездо его инвариантных подпространств. Если E - атом, то $\dim EH=1$ и $ESE=0$, так что $S\in\mathcal{A}_0(\mathcal{N})$. Поэтому $S\perp\tau(\mathcal{N})$, $\operatorname{tr} S=\langle S,1\rangle=0$. В „NA" приведен и другой вывод теоремы о следе, предложенный Эрдешем [11].

§ 4. Факторизация

В линейной алгебре часто используется возможность представления положительной матрицы в виде A^*A, где A верхнетреугольна. Отправляясь от некоторых задач теории интегральных уравнений, И.Ц. Гохберг и М.Г. Крейн стали рассматривать аналоги такой факторизации для операторов в H; в частности, ими исследовалась возможность представления оператора из $1+\mathcal{K}$ в виде A^*A, $A\in\tau(\mathcal{N})$. В „NA" приведено упрощенное доказательство их основного результата (факторизуемость операторов из $1+\mathfrak{S}^{\omega}$ - идеал Мацаева, состоящий из всех компактных операторов, s-числа, s_n которых удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty}s_n\cdot n^{-1}<\infty$). Задача факторизации произвольного обратимого $T\ge0$ была поставлена и решена для счетных гнезд Арвесоном [3]. Заметим, что обратный к оператору $A\in\tau(\mathcal{N})$ может не принадлежать $\tau(\mathcal{N})$; условимся говорить, что T *сильно факторизуется через* $\mathcal{N}$, если $T=A^*A$, где $A,A^{-1}\in\tau(\mathcal{N})$. Задача сильной факторизации связана с теоремой подобия. В самом деле, $A,A^{-1}\in\tau(\mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда $AN=N$ при $N\in\mathcal{N}$, поэтому сильная факторизуемость эквивалентна существованию унитарного оператора U такого, что $UT^{1/2}N=N$ для всех $N\in\mathcal{N}$. Так как подобные гнезда $\mathcal{N}$ и $T^{1/2}\mathcal{N}$ могут не быть унитарно эквивалентными, то задача сильной факторизации не всегда разрешима. Более того, она, вообще говоря, неразрешима для любого несчетного гнезда. С другой стороны, для счетных гнезд подобие равносильно унитарной эквивалентности (отпадают препятствия кратности и класса эквивалентности спектральных мер), так что относительно счетных гнезд операторы сильно факторизуемы. Задача факторизации разрешима всегда - красивый прием „укрупнения" сводит общий случай к случаю счетных гнезд. Эти результаты в основном получены Ларсоном [21], хотя возможность факторизации, как сообщил автору В. В. Пеллер была еще в середине 70-х годов известна специалистам по теории вероятностей (В. Н. Судаков, В. Н. Солев).

Арвесон [3] использовал факторизуемость относительно $N_\omega^\perp$ для получения операторного *аналога теоремы Карлесона о короне* (т. е. о плотности единичного круга в пространстве характеров алгебры H^∞ или, что то же о существовании набора функций $g_1,\dots,g_n$ из H^∞ таких, что $\sum_{i=1}^n g_i f_i=1$ для любых $f_1,\dots,f_n\in H^\infty$, удовлетворяющих условию $\sum_{i=1}^n |f_i(z)|>1$ при $|z|<1$). В „NA" этот результат приводится без ограничения на гнездо - универсальная факторизуемость делает универсальным доказательство. Пусть $A_1,\dots,A_n\in\tau(N)$; для существования операторов $B_1,\dots,B_n\in\tau(N)$, т. ч. $\sum_{i=1}^n B_iA_i=1$, необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{i=1}^n \|P(N)^\perp A_i x\|^2 \ge C\cdot\|P(N)^\perp x\|^2$ для всех $N\in N$, $x\in H$. Взяв $N=\{(z^nH^2)^\perp\}_{n=0}^\infty$, $A_i=L_{f_i}^*$, где $L_f=M_f|_{H^2}$, и проектируя $\mathfrak{B}(H)$ на пространство Теплицевых операторов, можно получить такое следствие: если $f_1,\dots,f_n\in H^\infty$ и $\sum_{i=1}^n \|L_{f_i}^* x\|^2\ge\|x\|^2$ для всех $x\in H^2$, то $\sum_{i=1}^n g_if_i=1$ при некоторых $g_i\in H^\infty$. Исходное неравенство эквивалентно неравенству $\sum_{i=1}^n |f_i(z)|\ge\varepsilon>0$, но, к сожалению, чтобы это доказать, приходится пользоваться теоремой о короне.

Имеется аналог понятия сильной факторизуемости для необратимых операторов: на оператор $A\in\tau(N)$ накладывается дополнительное условие $\overline{AN}=N\cap N_0$, где N_0 коммутирует с N. Такие операторы называются *внешними* (терминология оправдывается тем, что оператор L_f в пространстве H^2 является внешним, если функция $f\in H^\infty$ внешняя, то есть обратимая в H^∞). Если N вполне упорядочено (и только в этом случае), то любой оператор $T\ge0$ факторизуется через внешний оператор. Доказательство в „NA" использует разложение Лэнса - Шмульяна; избегая новых обозначений, проиллюстрируем его на примере конечного гнезда. Если $N=\{N_i\}_{i=1}^n$, $P_i=P(N_i)$, то

$$T = \sum_{i=1}^n T^{1/2}(\Phi(P_i) - \Phi(P_{i-1}))T^{1/2} = \sum_{i=1}^n Y_i^*Y_i,$$

причем $Y_i=P_iY_iP_{i-1}^\perp$. Следовательно, $T=A^*A$, где $A=\sum_{i=1}^n Y_i$, и нетрудно проверить, что A - внешний оператор. В этом же (и в чуть более широком) классе гнезд имеет аналог *внешне-внутренней факторизации* (представления функции из H^∞ в виде произведения внешней функции на функцию, почти всюду на единичной окружности принимающую значения, равные по модулю единице): для $A\in\tau(\mathcal{N})$ найдутся внешний оператор $B\in\tau(\mathcal{N})$ и частичная изометрия $V\in\tau(\mathcal{N})$ такие, что $A=VB$.

§ 5. Интеграл треугольного усечения, идеалы, радикал

В конечномерном анализе параллельно с мультипликативной факторизацией используется аддитивная: матрица раскладывается в сумму диагональной, строго верхнетреугольной и строго нижнетреугольной. Попытка перенести это в $\mathcal{B}(H)$ сталкивается с трудностями уже в простейшем случае вполне атомического гнезда: существуют ограниченные операторы, матрицы которых становятся „неограниченными" после замены нулями всех субдиагональных элементов (классический пример: $a_{ik}=(i-k)^{-1}$, $a_{ii}=0$). В общем случае слагаемые еще нужно строго определять. Для диагональной части можно использовать *ожидания* (проекторы единичной нормы) из $\mathcal{B}(H)$ на диагональ $\mathcal{D}=\tau(\mathcal{N})\cap\tau(\mathcal{N})^*$ гнездовой алгебры, однако единственность при этом теряется (впрочем на $\mathcal{K}$ все ожидания совпадают с *диагональным отображением* $\Delta: X\longmapsto\sum\limits_i E_iXE_i$, где E_i - атомы гнезда).

Если гнездо конечно, $\mathcal{N}=\{N_i\}_{i=0}^n$, то требуемое разложение существует и единственно: $A=A_-+A_0+A_+$, где $A_- = \sum\limits_{i=1}^n P_{i-1}A(P_i-P_{i-1})$, $A_0 = \sum\limits_{i=1}^n (P_i-P_{i-1})A(P_i-P_{i-1})$, $A_+ = \sum\limits_{i=1}^n (P_i-P_{i-1})AP_{i-1}$, $P_i=P(N_i)$. Будем обозначать написанные суммы через $\mathcal{U}_-^{\mathcal{N}}(A)$, $\mathcal{U}_0^{\mathcal{N}}(A)$, $\mathcal{U}_+^{\mathcal{N}}(A)$; положим также $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}(A) = \mathcal{U}_0^{\mathcal{N}}(A)+\mathcal{U}_+^{\mathcal{N}}(A)$. Для произвольного гнезда $\mathcal{N}$ можно рассмотреть направленность, состоящую из всех конечных подгнезд $\mathcal{F}\subset\mathcal{N}$, и определить $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}(A)$ как $\lim\limits_{\mathcal{F}} \mathcal{U}^{\mathcal{F}}(A)$ и т.д. (определение зависит от топологии в $\mathcal{B}(H)$; если топология не указана, то она выбрана равномерной). Операторы $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}(A)$, $\mathcal{U}_+^{\mathcal{N}}(A)$, $\mathcal{U}_-^{\mathcal{N}}(A)$ называются *интегралами верхнетреугольного, строговерхнетреугольного и диагонального усечения* [29].

Вопрос о сходимости интегралов усечения рассмотрим вначале для $A\in\tau(\mathcal{N})$ (в этом случае $\mathcal{U}_-^{\mathcal{N}}(A)=0$). Как показал Рингроуз, $\mathcal{U}_0^{\mathcal{N}}(A)=0$ тогда и только тогда, когда $A\in\operatorname{rad}\tau(\mathcal{N})$. Этот результат, разумеется, формулировался в независимых от [29] терминах: $A\in\operatorname{rad}\tau(\mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon>0$ найдется конечное подгнездо $\{N_i\}_{i=1}^n\subset\mathcal{N}$ такое, что $\|(P(N_i)-P(N_{i-1}))A(P(N_i)-P(N_{i-1}))\|<\varepsilon$. Ларсон [21] ввел в рассмотрение идеал $R^\infty(\mathcal{N})$, состоящий из операторов, удовлетворяющих аналогичному условию для счетных подгнезд. Ясно, что $\operatorname{rad}\mathcal{N}\subsetneq R^\infty(\mathcal{N})$ и $R^\infty(\mathcal{N})\cap\mathcal{D}=0$. В свою очередь $R^\infty(\mathcal{N})$ содержится в замкнутом левом идеале $R_s(\mathcal{N})$, состоящем из операторов, для которых диагональный интеграл сильно сходится к нулю.

Упорядоченность гнезда определяет в H аналог временной структуры. Пусть

$\mathcal{N}=\{N_t\}_{t\in E\subset\mathbb{R}}$, тогда $P(N_t)x = x_{[-\infty;t]}$ - „часть" вектора $x\in H$, соответствующая временному промежутку $[-\infty;t]$ и операторы из $\tau(\mathcal{N})$ обладают свойством „*причинности*": результат их действия на x на промежутке $[-\infty;t]$ зависит только от $x_{[-\infty;t]}$ (от прошлого и настоящего вектора x). Это объясняет применимость гнездовых алгебр в теории систем с обратной связью [14]. В этой терминологии „строговерхне-треугольные" операторы *гиперпричинны* - результат их действия зависит только от прошлого. Идеалы $\mathrm{rad}\ \tau(\mathcal{N})$, $R^{\infty}(\mathcal{N})$, $R_s(\mathcal{N})$ - гиперпричинные: другие примеры см. в [14, 18]. Эрдеш и Пауэр [13] охарактеризовали *-слабо замкнутые идеалы в $\tau(\mathcal{N})$ и, более того, $\tau(\mathcal{N})$-бимодули в $\mathfrak{B}(H)$: всякий такой бимодуль определяется возрастающей функцией $\Phi:\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{N}$ по формуле $\mathfrak{M}_{\Phi}=\{A\in\mathfrak{B}(H): AN\subset\Phi(N),\ N\in\mathcal{N}\}$. Заметим, что аналогичное описание допускают *-слабо замкнутые правые $\tau(\mathcal{N})$-модули (в частности, правые идеалы), если Φ считать монотонным отображением $\mathcal{N}\longrightarrow\mathcal{P}(H)$. Это обобщается на модули над CSL-алгебрами для *вполне дистрибутивных* (см. ниже) CSL.

Из теоремы Рингроуза следует, что сходимость $\mathcal{U}_0^{\mathcal{N}}(A)$ (а значит, и $\mathcal{U}_+^{\mathcal{N}}(A)$) для $A\in\tau(\mathcal{N})$ эквивалентна условию $A\in\mathcal{D} + \mathrm{rad}\ \tau(\mathcal{N})$. В общем случае $\mathcal{U}_0^{\mathcal{N}}(A)$ сходится при $A\in\overline{\mathcal{D} + \mathrm{rad}\ \tau(\mathcal{N}) + \mathrm{rad}\ \tau(\mathcal{N})^*}$ (правая часть содержит $\mathcal{K}$ и $\mathcal{U}_0^{\mathcal{N}}(A)=\Delta(A)$, когда $A\in\mathcal{K}$). Далее, $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}(A)$ сходится при $A\in\tau(\mathcal{N}) + \mathrm{rad}\ \tau(\mathcal{N})^*$; для сходимости $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}(A)$ при всех $\mathcal{N}$ необходимо и достаточно, чтобы оператор A принадлежал идеалу $\mathfrak{S}^{\omega}$ - в „NA" приведено принадлежащее Эрдешу сравнительно короткое доказательство этого классического результата Гохберга - Крейна - Мацаева.

Сужение π оператора $\mathcal{U}^{\mathcal{N}}$ на $\mathfrak{S}^2$ - ортогональный проектор на подпространство $\mathcal{A}_2=\tau(\mathcal{N})\cap\mathfrak{S}^2$. Пауэр [25] нашел „некоммутативные аналоги" некоторых конструкций теории функций, в которых пространству $\mathcal{A}_2$ отводится роль пространства Харди H^2, а оператору π - проектор Рисса $P(H^2)$. Вместо представления $f\longmapsto M_f$ алгебры L^{∞} в L^2 рассматривается представление алгебры $\mathfrak{B}(H)$ левыми умножениями в $\mathfrak{S}^2$ и операторы $T_A=\pi L_A\pi$ (*теплицевы*), $H_A=\pi^{\perp}L_A\pi$ (ганкелевы), $C_A=\pi L_A-L_A\pi$ (*коммутаторы*). Показано, что для счетного $\mathcal{N}$ условие $H_A\in\mathcal{K}$ эквивалентно условию $A\in Q\tau(\mathcal{N})$, а условие $C_A\in\mathcal{K}$ - условию $A\in Q\tau(\mathcal{N})\cap Q\tau(\mathcal{N})^*$; кроме того,

$$\| H_X\| = \mathrm{dist}\ (X,\tau(\mathcal{N})),\qquad \| H_X\| = \mathrm{dist}\ (X,Q\tau(\mathcal{N})). \tag{10}$$

Подчеркнем, что формулы (10) и (4) при внешнем сходстве существенно различны. В частности, $\| H_f\|_e\neq\mathrm{dist}\ (M_f,Q\tau(\mathcal{N}_{\mathbb{Z}}))$ - например, при $f(z)=\bar{z}$ $H_f\in\mathcal{K}$, но $M_f\notin Q\tau(\mathcal{N}_{\mathbb{Z}})$. Принятый в [25] подход позволил также построить и исследовать аналог в $\mathfrak{B}(H)$ оператора гармонического сопряжения.

Мы уже говорили о некоммутативных аналогах таких результатов теории аналитических функций, как теорема о короне, внешне-внутренняя факторизация. „*Некоммутативная теория функций*" начала строиться (в работах Хельсона-Лоуденслагера и Винера-Мазани) в связи с возникшей в гармоническом анализе и теории прогнозирования необходимостью рассматривать матричнозначные аналитические функции. Наиболее общий контекст - подалгебры общих W^*-алгебр - включает L^{∞} и $\mathfrak{B}(H)$

как полярные крайности. Развитую теорию *аналитических* (*субдиагональных*) подалгебр конечных W^*-алгебр создал Арвесон [42]. Эта теория включает теорию инвариантных подпространств (в пространствах Харди), факторизационные теоремы, аналоги классических неравенств Йенсена и Сеге. В работе [43] Арвесон перенес на подалгебры некоммутативных C^*-алгебр значительную часть теории равномерных функциональных алгебр (представляющие меры, оболочки, границы Шилова и Шоке).

Возвращаясь к теории гнездовых алгебр, обозначим через $F(\mathcal{N})$ алгебру $C^*(\mathcal{N})$ + rad $\tau(\mathcal{N})$; как показали Гилфезер и Ларсон [17],

$$F(\mathcal{N}) =\{A\in\mathfrak{B}(H) \ : \ AX - XA \in \mathrm{rad}\ \tau(\mathcal{N}), \quad X \in \tau(\mathcal{N})\}. \tag{11}$$

Отсюда следует, что $F(\mathcal{N})$ выдерживает подобие $F(T\mathcal{N})=TF(\mathcal{N})T^{-1}$. Так как для $A\in F(\mathcal{N})$ сходится $\mathcal{U}_0^{\mathcal{N}}(A)$, то это влечет следующий результат Г. А. Мельниченко [31]: для оператора A, подобного самосопряженному или унитарному, существует гнездо $\mathcal{N}$ такие, что $A\in\tau(\mathcal{N})$ и $\mathcal{U}_0^{\mathcal{N}}(A)$ сходится. Видно также, что достаточно требовать подобия нормальному оператору (поскольку всякий нормальный оператор - непрерывная функция от самосопряженного).

Равенство (11) характеризует дифференцирования алгебры $\tau(\mathcal{N})$ со значениями в rad $\tau(\mathcal{N})$. В „NA" рассматриваются дифференцирования алгебр $\tau(\mathcal{N})$ и $Q\tau(\mathcal{N})$ со значениями в них самих и в $\mathcal{K}$. Результаты „естественные", хотя доказываются нетривиально. Например, всякое дифференцирование $\delta:\tau(\mathcal{N})\longrightarrow\mathcal{K}$ задается оператором $K\in\mathcal{K}$ по формуле $\delta(X)=KX-XK$. В частности, *существенный коммутант* (т.е. совокупность операторов, для которых коммутаторы со всеми элементами алгебры компактны) алгебры $\tau(\mathcal{N})$ совпадает с $\mathbb{C}\cdot 1+\mathcal{K}$. Аналогичное описание допускают существенные коммутанты W^*-алгебр (в „NA" рассматриваются лишь алгебры типа I). Заметим, что существенные коммутанты C^*-алгебр устроены интереснее. Нетрудно доказать, например, что для $C^*(\mathcal{N}_V)$ существенный коммутант совпадает с классом *операторов Симоненко*, т.е. таких операторов в $A\in\mathfrak{B}(L^2([0;1]))$, что если I_1, I_2 - непересекающиеся интервалы, а P_1, P_2 - операторы умножения на их характеристические функции, то $P_1AP_2\in\mathcal{K}$. Результаты о дифференцированных гнездовых алгебр со значениями в других бимодулях см. в [12]. Существенные коммутанты CSL-алгебр охарактеризовал Дэвидсон [7].

§ 6. Коммутативные решетки

Так как всякая CSL - подрешетка решетки всех проекторов некоторой masa (максимальной абелевой симметричной подалгебры в $\mathfrak{B}(H)$), то ее можно реализовать проекторами умножения на $\{0;1\}$-значные функции в $L^2(X,\mu)$, где X - компакт, μ - регулярная мера, и отождествить с подрешеткой решетки Bor (X,μ) классов эквивалентности борелевских подмножеств в X. Трудно понять, почему до 1974 г., когда появилась работа Арвесона [4], этот естественный объект всерьез не изучался. В [4] было показано, что выделение полной подрешетки в Bor (X,μ) равносильно введению в X отношения частичного порядка $<$ (в соответствующую решетку $L(X,<,\mu)$

включаются все множества с возрастающими характеристическими функциями). Используя такое „координатное" представление CSL, Арвесон получил ряд чисто операторных результатов и, в частности, доказал рефлексивность CSL. Можно сказать, таким образом, что CSL - это решетки инвариантных подпространств *-слабо замкнутых алгебр, содержащих masa (будем называть их *алгебрами Арвесона*). Очевидно, что среди алгебр Арвесона с данной решеткой $\mathcal{L}$ есть наибольшая - alg $\mathcal{L}$, в [4] показано, что есть и наименьшая - алгебра $\mathfrak{A}_{\min}(\mathcal{L})$, порожденная всеми *псевдоинтегральными* операторами из alg $\mathcal{L}$ (псевдоинтегральный оператор T_ν в $L^2(X,\mu)$ определяется мерой ν на $X\times X$ по формуле $\langle T_\nu f,g\rangle=\iint f(x)\overline{g(y)}d\nu$; требование ограниченности оператора T_ν накладывает определенные условия на ν). Если $\mathfrak{A}_{\min}(\mathcal{L})=\mathrm{alg}\mathcal{L}$, то $\mathcal{L}$ называется *синтетической*. Синтетическими являются все решетки *конечной ширины* (т.е. порожденные конечным числом гнезд) [4], а также все *вполне дистрибутивные* CSL (т.е. CSL, в котором дистрибутивный закон распространен на оболочки и пересечения любого числа подпространств) [19]. Изложение этих результатов в „NA" чрезвычайно удачно: жесткий отбор материала, усовершенствование ряда доказательств и конструкций сделали теорию „общедоступной". Координатное представление CSL используется в „NA" для изучения условия полной дистрибутивности (она эквивалентна плотности в alg $\mathcal{L}$ операторов конечного ранга) и близких условий плотности операторных идеалов, а также условия сильной компактности самой решетки (проекторов). Неизвестно, эквивалентна ли компактность решетки ее полной дистрибутивности; для решеток конечной ширины утвердительный ответ получен С.А.Розеноером (см. [30], гл.6 и 9), где обсуждаются и другие результаты такого рода.

В [38] найден аппроксимационный критерий синтетичности решетки: для того чтобы решетка $L(X,<,\mu)$ была синтетической, необходимо и достаточно, чтобы всякая возрастающая проектор-функция на (X,μ) была μ-почти всюду сильным пределом последовательности простых возрастающих проектор-функций.

Введение термина „синтетичность" оправдывается наличием содержательных связей с гармоническим синтезом. Напомним, что замкнутое подмножество E пространства характеров X_A регулярной коммутативной банаховой алгебры $\mathcal{A}(\subset C(X_{\mathcal{A}}))$ называется *множеством $\mathcal{A}$-синтеза* (гармонического синтеза, когда $\mathcal{A}$ - групповая алгебра), если всякая функция из $\mathcal{A}$, обращающаяся в нуль на E, является пределом последовательности функций, обращающихся в нуль в окрестности E. Это эквивалентно совпадению всех *-слабо замкнутых $\mathcal{A}$-подмодулей в $\mathcal{A}^*$, имеющих *носитель* E (структура $\mathcal{A}$-модуля в $\mathcal{A}^*$ определяется равенством $aF(x)=F(ax)$; носителем множества $\mathcal{F}\subset A^*$ называется дополнение к объединению открытых подмножеств пространства $X_{\mathcal{A}}$, несущих только функции, аннулируемые функционалами из $\mathcal{F}$). В классе *-слабо замкнутых $\mathcal{A}$-подмодулей с носителем E есть наименьший, $\mathcal{F}_{\min}(E)$ - он порожден характерами из E - и наибольший, $\mathcal{F}_{\max}(E)$, состоящий из всех функционалов, носители которых содержатся в E.

Связь с операторной ситуацией становится более полной, если вместо содержащих masa алгебр рассматривать *бимодули* над masa, то есть $*$-слабо замкнутые подпространства в $\mathfrak{B}(H_1,H_2)$, выдерживающие умножение на операторы из $\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2$, где $\mathcal{M}_i$ - masa в H_i. Реализуя $\mathcal{M}_i$ координатно: $H_i= L^2(X_i,\mu_i)$, $\mathcal{M}_i\cong L^\infty(X_i,\mu_i)$, поставим в соответствие каждому $\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2$-бимодулю $\mathfrak{M}$ его *носитель* supp $\mathfrak{M}$ - компакт, остающийся после удаления из $X_1\times X_2$ всех открытых прямоугольников $U\times V$ таких, что $P_V\mathfrak{M}P_U=0$ (P_U - проектор на подпространство всех функций, равных нулю вне U). Среди всех бимодулей с данным носителем E имеется наибольший $\mathfrak{M}_{max}(E)$ и наименьший $\mathfrak{M}_{min}(E)$; E называется *синтетическим*, если они совпадают. Синтетичность решетки $L(X,<,\mu)$ эквивалентна синтетичности графика порядка $<$. Соответствие объектов в операторной и алгебраической ситуациях: $X_1\times X_2$ соответствует $X_{\mathcal{A}}$, $\mathfrak{B}(H_1,H_2)$ - $\mathcal{A}^*$, masa-бимодули - $*$-слабо замкнутым помодулям в $\mathcal{A}^*$, алгебра $\mathcal{A}$ - пространству $\mathfrak{S}^1(H_1,H_2)\cong$ $\cong L^2(X_1,\mu_1)\hat{\otimes}L^2(X_2,\mu_2)(\subset L^2(X_1\times X_2,\ \mu_1\times\mu_2))$. Аналогия проявляется и в свойствах более сложных объектов, например, сверточных операторов и двойных операторных интегралов Бирмана - Соломяка [41]. На родство теорий указывает и то, что синтетичность подмножества $E\subset X_1\times X_2$ эквивалентна $\mathfrak{S}^1$-аппроксимируемости обращающихся на E в нуль функций из $\mathfrak{S}^1$ функциями, обращающимися в нуль в окрестности E, или то, что $\mathfrak{M}_{min}(E)$ порожден мерами (операторами T_ν) так же, как и $\mathcal{F}_{min}$. Арвесон [4] воспользовался построенным Л.Шварцем [47] примером несинтетического множества характеров группы $\mathbb{R}^3$ для построения несинтетической решетки; развивая его подход, Фрелих [44] показал, что если $X_1=X_2=G$ - локально компактная абелева группа, $\mu_1 = \mu_2$ - мера Хаара, T - замкнутое подмножество в G, то для синтетичности (в операторном смысле) множества $E_T=\{(x,y):x-y\in T\}$ необходимо и достаточно, чтобы множество T было множеством гармонического синтеза (относительно группы $\hat{G}$, двойственной к G). В [39] установлена связь операторного синтеза с синтезом относительно алгебры Варопулоса $V=C(X_1)\hat{\otimes}C(X_2)$ ($\hat{\otimes}$ - проективное тензорное произведение): если множество $E\subset X_1\times X_2$ V - синтетично, то оно синтетично в операторном смысле независимо от выбора мер μ_1,μ_2 на X_1 и X_2 соответственно, а если E не является V-синтетическим, то существуют меры μ_1, μ_2, при которых E не является синтетическим. Применения этих результатов к линейным операторным уравнениям даны в работах [39,40]. В частности, в [40] доказано существование коммутативных наборов нормальных операторов $A_1,\dots,A_n$, $B_1,\dots,B_n$, для которых линейные операторные уравнения в $B(H)$

$$\sum_{i=1}^{n} A_iXB_i = 0.$$

и

$$\sum A_i^*\ XB_i^* = 0.$$

не эквивалентны (ответ на вопрос Вейсса [48]).

Уже в работе [4] ставилась задача нахождения *бескоординатных* (т.е. не использующих координатного представления $\mathcal{L} \cong L(X,<,\mu)$, справедливого лишь для сепарабельных пространств) доказательств основных результатов теории *CSL*. Разумеется, условие сепарабельности не так уж ограничительно; причина интереса к такому подходу - желание отыскать собственно операторные методы работы с *CSL*. Первое бескоординатное доказательство рефлексивности *CSL* получено Дэвидсоном [5]; в [38] рефлексивность выводится из общей теоремы о непрерывности отображения lat. Бескоординатный подход к вопросам синтеза только начинает развиваться; в „NA" намечен один из подходов к бескоординатному определению алгебры $\mathfrak{A}_{\min}(\mathcal{L})$. Ниже будут проведены близкие построения в контексте бимодулей (они применялись для доказательства некоторых результатов работ [38,39]) и с их помощью решена поставленная в „NA" задача бескоординатного доказательства плотности транзитивных masa-бимодулей.

Пусть $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ - W^*-алгебра; *бирешеткой* в $\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2$ называется всякое подмножество $\mathcal{S}\subset\mathcal{P}(\mathcal{M}_1)\times\mathcal{P}(\mathcal{M}_2)$, которое содержит все пары $(0,P)$ и $(Q,0)$ и удовлетворяет условиям: $(P_1,P_2)\in\mathcal{S}$, $(Q_1,Q_2)\in\mathcal{S} \Longrightarrow (P_1\wedge Q_1,P_2\vee Q_2)\in\mathcal{S}$, $(P_1\vee Q_1,P_2\wedge Q_2)\in\mathcal{S}$. Всякому $\mathcal{M}_1'\times\mathcal{M}_2'$-бимодулю $\mathfrak{M}$ соответствует бирешетка $\operatorname{bil}\mathfrak{M} = \{(P_1,P_2)\in\mathcal{P}(\mathcal{M}_1)\times\mathcal{P}(\mathcal{M}_2): P_2\mathfrak{M}P_1=0\}$; такие бирешетки называются *рефлексивными.* Модифицируя аргументы из [38], нетрудно доказать рефлексивность сильно замкнутых коммутативных (т.е. $\mathcal{M}_1$ коммутативны) бирешеток. Среди masa-бимодулей с данной бирешеткой есть наибольший: $\mathfrak{M}_{\max}(\mathcal{S}) = \{A\in\mathfrak{B}(H_1,H_2): P_2AP_1=0$ при $(P_1,P_2)\in\mathcal{S}\}$; если других нет, то $\mathcal{S}$ называется синтетической.

Легко видеть, что $*$-слабо замкнутый бимодуль однозначно определяется бирешеткой $\operatorname{bil}(1\otimes\mathfrak{M})$, где 1 - единичный оператор в l^2. Пусть $\Omega=\Omega(l^2)$; для $\varphi\in\Omega$ формула $L_\varphi(A\otimes B)=\varphi(A)B$ определяет „*слоевое*" *отображение* $L_\varphi:\mathfrak{B}(l^2\otimes H)\longrightarrow\mathfrak{B}(H)$. Для подпространства $\mathfrak{F}\subset\mathfrak{B}(H)$ и бирешетки $\mathcal{S}\subset\mathcal{M}_1\times\mathcal{M}_2$ полагаем $\tilde{\mathfrak{F}}=\{A: L_\varphi(A)\in\mathfrak{F}$ при $\varphi\in\Omega\}$, $\tilde{\mathcal{S}}=\{(P,Q): (L_\varphi(P),L_\varphi(Q))\in\overline{\operatorname{conv}\mathcal{S}},\ \varphi\in\Omega\}$. Ясно, что $\tilde{\mathcal{S}}\subset\tilde{\mathcal{M}}_1\times\tilde{\mathcal{M}}_2$; можно показать, что если $\mathcal{S}$ коммутативна, то $\tilde{\mathcal{S}}\supset\operatorname{bil}(1\otimes\mathfrak{M})$ для любого бимодуля $\mathfrak{M}$, т.ч. $\operatorname{bil}\mathfrak{M}=\mathcal{S}$. Кроме того, $\operatorname{bil}(1\otimes\mathfrak{M}_{\max}(\mathcal{S}))=\operatorname{bil}(1)\otimes\mathcal{S}$ (под *тензорным произведением* бирешеток понимается минимальная бирешетка, содержащая все пары $(P_1\otimes 1,Q_1\otimes 1)$ и $(1\otimes P_2,1\otimes Q_2)$, где $(P_i,Q_i)\in\mathcal{S}_i$). Следовательно, равенство $\tilde{\mathcal{S}} = \operatorname{bil}(1)\otimes\mathcal{S}$ является достаточным условием синтетичности (для сепарабельных пространств оно и необходимо). Известно, что $\tilde{\mathfrak{F}}=\mathfrak{B}(l^2)\otimes\mathfrak{F}$ для любой W^*-алгебры $\mathfrak{F}$, что сразу дает бескоординатное доказательство синтетичности симметричных *CSL*. Докажем синтетичность бирешетки $\mathcal{S}_{\mathrm{triv}}$, состоящей из всех пар $(P_1,0)$, $(0,P_2)$, где $P_i\in\mathcal{P}(\mathcal{M}_i)$ ($\operatorname{bil}\mathfrak{M}=\mathcal{S}_{\mathrm{triv}}$, когда $\mathfrak{M}$ транзитивен, так что синтетичность $\mathcal{S}_{\mathrm{triv}}$ означает совпадение всех $*$-слабо замкнутых транзитивных masa-бимодулей с $\mathfrak{B}(H_1,H_2)$).

Ясно, что $\operatorname{conv}\mathcal{S}_{\mathrm{triv}} = \{(A,B): \mathcal{M}_1^+\times\mathcal{M}_2^+: \|A\| + \|B\| \le 1\}$, поэтому $(P,Q)\in\tilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{triv}}$ тогда и только тогда, когда $\|L_\varphi(P)\| + \|L_\varphi(Q)\|\le 1$ при $\varphi\in\Omega$, т.е. $(L_\varphi(P)x,x) + (L_\varphi(Q)y,y)\le 1$ при $\varphi\in\Omega$, $x\in H_1$, $y\in H_2$, $\|x\| = \|y\| = 1$. Так как $\operatorname{ext}\Omega$ состоит из функционалов вида $A \longmapsto (Ae,e)$, где $e\in l^2$, $\|e\|=1$, то условие $(P,Q)\in\tilde{\mathcal{S}}_{\mathrm{triv}}$ эквивалентно выполнению неравенства $(P(e\otimes x),(e\otimes x)) \le (Q^\perp(e\otimes y),e\otimes y)$ для всех $e\in l^2, x\in H_1, y\in H_2$, $\|x\| = \|y\|=1$.

Фиксируя y, запишем $(Q^{\perp}(e\otimes y),e\otimes y)$ в виде $(C_y e,e)$, где $C_y\in\mathfrak{B}(l^2)^+$. Следовательно, $(P(e\otimes x),(e\otimes x))\le(C_y e,e)$ при $\|x\|=1$, т.е. $(P(e\otimes x),(e\otimes x))\le((C_y e,e)\|x\|^2=$ $=((C_y\times 1)e\otimes x,e\otimes x)$. Нетрудно показать, что для $A\in\tilde{\mathcal{M}}_1$ условие $(A(e\otimes x),e\otimes x)\ge 0$ влечет $A\ge 0$. Поэтому $P\le C_y\otimes 1$ и, следовательно, $P'\le C_y\otimes 1$, где P' - наименьший проектор из $\mathfrak{B}(l^2)\otimes 1$, мажорирующий P. Проводя рассуждения в обратном порядке, получим $(P',Q)\in\mathcal{G}_{\text{triv}}$ и аналогично $(P',Q')\in\mathcal{G}_{\text{triv}}$. Имеем $P'=P_1\otimes 1$, $Q'=Q_1\otimes 1$, где $P_1\perp Q_1$ (поскольку $\|L_\varphi(P')\|+\|L_\varphi(Q')\|\le 1$), так что $(P_1,Q_1)\in\text{bil }1$, $(P',Q')\in\text{bil }(1)\otimes\mathcal{G}_{\text{triv}}$, а значит, и $(P,Q)\in\text{bil}(1)\otimes\mathcal{G}_{\text{triv}}$, т.е. $\mathcal{G}_{\text{triv}}=\text{bil}(1)\otimes\mathcal{G}_{\text{triv}}$, $\mathcal{G}_{\text{triv}}$ синтетична.

Объединяя эти рассуждения с доказательством теоремы 15.11 в „NA", получим бескоординатное доказательство синтетичности гнезд. При этом фактически доказывается синтетичность ассоциированной бирешетки, что несколько сильнее (единственность бимодуля, а не алгебры).

Отметим, что в „NA" не включены результаты работы [4] о классификации CSL с точностью до изоморфизма и подобия (в частности, „энтропийная" теория CSL). Вообще эти результаты пока не имели продолжения; полное решение проблемы подобия для гнезд позволяет надеяться, что время для такого продолжения пришло.

§ 7. Заключительные замечания

Перечислим в нескольких словах основные результаты, относящиеся к тем разделам книги, которые мы не успели обсудить.

1. Унитарные орбиты квазитреугольных алгебр. Задача ставится так: для данного гнезда $\mathcal{N}$ охарактеризовать операторы, унитарно эквивалентные операторам из $Q\tau(\mathcal{N})$. Не формулируя ответ во всей общности, отметим, что для гнезда конечномерных подпространств это все квазитреугольные операторы, а для непрерывного - все операторы.

2. Представления гнездовых алгебр. Любое *-слабо непрерывное сжимающее представление алгебры $\tau(\mathcal{N})$ является ограничением представления $A\longmapsto 1\otimes A$ на полуинвариантное подпространство ($N_1\ominus N_2$, где N_1, N_2 инвариантны) и расширяется до представления алгебры $\mathfrak{B}(H)$ в некотором объемлющем пространстве („дилатация"); два коммутирующие представления имеют коммутирующие дилатации.

3. Возмущения. Алгебра, близкая к CSL-алгебре, имеет изоморфную решетку, причем изоморфизм близок к тождественному отображению. Отсюда с использованием ТП выводится, что алгебра, близкая к гнездовой, подобна ей.

4. Достижимые гнезда. Так называются гнезда вида $\text{lat }A$, где $T\in\mathfrak{B}(H)$. Достаточно полное представление об имеющихся здесь результатах дает гл. 6 (и последующие главы) обзора 30.

Книга заканчивается списком нерешенных задач. Собственно, об открытых проблемах многократно упоминается в тексте, часть упражнений отмечена звездочкой, означающей, что ответ неизвестен автору, но в заключительный список вынесены лишь десять вопросов, из которых три относятся непосредственно к теории гнездовых алгебр (об условиях связности множества обратимых элементов в $\tau(N)$, о представимости гнезда в виде lat A, где $A\in\mathfrak{B}(H)$, и о том, является ли всякое представление гнездовой алгебры вполне ограниченным), а остальные - к CSL-алгебрам (о характеризации радикала, об условиях гиперрефлексивности, о подобии CSL-алгебр с близкими единичными шарами, о критериях полной дистрибутивности, о рефлексивности тензорного произведения CSL-алгебр и о синтетичности решетки, порожденной двумя коммутирующими синтетическими CSL).

С большим искусством в книге подобраны упражнения. Как правило, они сгруппированы в серии, каждая из которых приводит к какому-то существенному дополнению основного текста главы, но имеются и упражнения учебного характера, направленные на то, чтобы помочь читателю в усвоении введенных понятий и результатов, а также, как уже говорилось, - нерешенные задачи.

В целом книга представляет собой редкое сочетание увлекательного введения в теорию операторных алгебр, рассчитанного на новичка и исчерпывающего изложения последних достижений в этой интересной и быстро развивающейся области функционального анализа.

Список литературы

[1] Andersen N.T. Compact perturbations of reflexive algebras // J.Funct.Anal. 1980. Vol.38. P.366-400.

[2] Arveson W.B. Perturbation theory for groups and lattices // I.Funct.Anal. 1983. Vol.53. P.22-73.

[3] Arveson W.B. Interpolation problems in hest algebros // I.Funct.Anal. 1975. Vol.20. P.208-233.

[4] Arveson W.B. Operator algebras and invariant subspaces // Ann.Math. 1974. Vol.100, N 2. P.433-532.

[5] Davidson K.R. Nest Algebras // Longman Sci. and Techn. 1988.

[6] Davidson K.R. The essential commutants of CSL algebras Indiana U.Math.J. 1983. Vol.32. P.761-771.

[7] Davidson K.R. The distance to the analytic Toeplitz operators // Ill. I.Math. 1987. Vol.31. P.265-273.

[8] Davidson K.R. Commutative subspaces lattices // Indiana Y. Math. J. 1978. Vol.27. P.479-490.

[9] Davidson K.R., Power S.C. Best approximation in C^*-algebras // I.Reine Angew. Math. 1986. Vol.368. P.43-62.

[10] Davidson K.R., Power S.C. Failure of the distance formula // I.London Math.Soc. 1984. Vol.32, N 2. P.157-165.

[11] Erdos I.A. On the trace of a trace closs operator // Bull.London Math.Soc. 1974. Vol.6. P.47-50.

[12] Erdos I.A. Non-selfadjoint operator algebras // Proc.Roy.Irish Acad.

1 9 8 1. Vol.81A. P.127-145.

[13] E r d o s I.A., P o w e r S.C. Weakly closed ideals of nest algebros // I.Operator Theory. 1 9 8 2. Vol.7. P.219-235.

[14] F e i n t u c h A. Strictly and strongly causal linear operators // SIAM I.Math.Anal. 1 9 8 0. Vol.10. P.603-613.

[15] F a l l T., A r v e s o n W, M u h l y P. Perturbations of nest algebras // I.Operator Theory. 1 9 7 9. Vol.1. P.137-150.

[16] G i l f e a t h e r F., L a r s o n D.R. Nest subalgebras of von Neumann algebras: commutauts modulo compacts and distance estimates // I.Oper.Theory. 1 9 8 2. Vol.7. P.279-302.

[17] G i l g e a t h e r F., L a r s o n D.R. Nest subalgebras of von Neumann algebras: cammutants modulo radicals // I.Oper.Theory. 1 9 8 3. Vol.10. P.95-118.

[18] H o p e n w a s s e r A. Hypercausal ideals in nest algebras // I.London Math.Soc. 1 9 8 3. Vol.28, N 2. P.359-362.

[19] H o p e n w a s s e r A., L a u r i e C., M o o r e R. Reflexive algebras with completely distibutive subspace lattices // I.O.T. 1 9 8 4. Vol.11. P.91-108.

[20] L a n c e E.C. Some properties of nest algebras // Proc.London Math.Soc. 1 9 6 9. Vol.19, N 3. P.45-68.

[21] L a r s o n D.R. A solution to a problem of I.R.Ringrose // Bull.Amer.Math.Soc. 1 9 8 2. Vol.7. P.243-246.

[22] K r a u s I., L a r s o n D.R. Reflexivity and distance formulae // I.London Math.Soc. 1 9 8 6. Vol.53, N 3. P.340-356.

[23] P o w e r S.C. The distance to upper friangular operators // Math.Proc.Camp.Phil.Soc. 1 9 8 0. Vol.88. P.327-329.

[24] P o w e r S.C. Nuclear operators in nest algebras // I.Operator Theory. 1 9 8 3. Vol.10. P.337-352.

[25] P o w e r S.C. Commutators with the triangular projection and Hankel forms on nest algebras // I.London Math.Soc. 1 9 8 5. Vol.32. P.272-282.

[26] P a r r o t S.K. On a quotient norm and the Sz-Nagy Foias Lifting theorem // I.Funct.Anal. 1 9 7 8. Vol.30. P.311-328.

[27] R i n g r o s e I. Compact nonselfadjoint operators, Math. Studies 35, Van Nostrand Reinhold. London, 1 9 7 1.

[28] V o i c u l e s c u D. A non commutative Weyl-von Neumann theorem // Rev.Roum.Math. Pures et Appl. 1 9 7 6. Vol.21. P.97-113.

[29] Г о х б е р г И.Ц., К р е й н М.Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. М.: Наука, 1 9 6 7.

[30] Л о г и н о в А.И., Ш у л ь м а н В.С. Инвариантные подпространства операторных алгебр // Итоги науки. Математический анализ. Т.26. 1 9 8 8.

[31] М е л ь н и ч е н к о Г.А. Структура некоторых операторов из гнездовой алгебры // Лит.мат.сб. 1 9 8 2. Т.22, N 4. С.98-108.

[32] М у с т а ф а е в Г.С., Ш у л ь м а н В.С. О плотности векторных функционалов // ДАН СССР. 1 9 8 5. Т.280, N 4. С.804-806.

[33] М у с т а ф а е в Г.С., Ш у л ь м а н В.С. Оценка норм внутренних дифференцирований в некоторых операторных алгебрах // Мат.заметки. 1 9 8 9. Т.23, N 2. С.86-87.

[34] Г о х б е р г И.Ц., К р у п н и к Н.Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1 9 7 3.

[35] Ш м у л ь я н Ю.Л. Операторный интеграл Хеллингера // Мат.сб. 1 9 6 9. Т.49(91), N 4. С.381-430.

[36] Ш у л ь м а н В.С. О векторных функционалах и приближениях в пространстве операторов // Спектральная теория операторов. Баку, 1 9 8 4. N 5. С.192-225.

[37] Ш у л ь м а н В.С. О взаимном расположении подпространств в C^*-алгебрах // Спектральная теория операторов. Баку, 1 9 8 5. N 6. С.196-216.

[38] Ш у л ь м а н В.С. О решетках проекторов в гильбертовом пространстве // Функцион.анализ и его прил. 1 9 8 9. Т.23, N 2. С.86-87.

[39] Ш у л ь м а н В.С. Сплетения и линейные операторные уравнения // ДАН СССР. 1 9 8 8. Т.301, N 1. С.57-61.

[40] Ш у л ь м а н В.С. Операторы умножения и спектральный синтез // ДАН СССР. 1 9 9 0.

[41] Б и р м а н М.Ш., С о л о м я к М.З. О двойных операторных интегралах Стильтьеса // ДАН СССР. 1 9 6 5. Т.165, N 6. С.1223-1226.

[42] A r v e s o n W.B. Analyticity in operator algebras // Amer. I. Math. 1 9 6 7. Vol.89, N 3. P.578-642.

[43] A r v e s o n W.B. Subalgebras of C^*-algebras. I // Acta Math. 1 9 6 9. Vol.123, N 3-4. P.141-224.

[44] F r o e l i c h I. Compact operators, invariant subspaces and spectral synthesis // I.Funct.Anal. 1 9 8 8. Vol.81, N 1. P.1-37.

[45] H a l m o s P.R. Quasitriangular operators // Acta Sci.Math. 1 9 6 8. V.29, N 3-4. P.283-294.

[46] P o w e r S.C. Analysis in Nest Algebras // Surveys of some recent results in operator theory. Vol.11. 1 9 8 8. P.189-234.

[47] S c h w a r t z L. Sur une propriete de synthese Spectrale dans les groupes non compacts // C.R. Acad. Sci. Paris. 1 9 4 8. Vol.227. P.424-426.

[48] W e i s s G. The Fuglede commutativity theorem modulo the Hilbert-Schmidt class and generating functions for matrix operators. II // I. of Oper.Theory. 1 9 8 1. Vol.5, N 1. P.3-6.

В.С.Шульман