Ю. Г. Смирнов, Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений, *Дифференц. уравнения*, 1991, том 27, номер 1, 140–147

УДК 517.956

Ю. Г. СМИРНОВ

МЕТОД ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При исследовании процессов распространения волн в волноведущих структурах с неоднородным заполнением в электродинамике, акустике, теории упругости возникают краевые задачи на собственные значения для уравнений (или систем уравнений) эллиптического типа с разрывными коэффициентами. При этом на линиях (поверхностях) разрыва коэффициентов ставятся дополнительные условия, называемые условиями сопряжения. Обычно спектральный параметр присутствует лишь в уравнениях и не входит в условия сопряжения, в результате возникает задача на собственные значения для некоторого, чаще всего самосопряженного, оператора. Однако в достаточно сложных моделях спектральный параметр уже входит не только в уравнения, но и в условия сопряжения, причем часто нелинейным образом.

Цель настоящей работы — показать, что для исследования спектральных свойств таких задач оказывается естественным и эффективным метод операторных пучков.

Рассмотрим одну задачу такого типа, возникающую при изучении электромагнитных колебаний в частично заполненных волноводах [1], и получим ряд важных спектральных свойств, имеющих практическое значение. Альтернативный подход, основанный на методах теории потенциала, дает менее глубокие результаты [1, 2].

Работа является развитием подхода, изложенного в [3].

1. Вариационная формулировка задачи на собственные значения. Пусть в прямоугольной системе координат Oxy дана ограниченная область Q, пересечение которой с осью $\mathbf{R}^1=\{y=0\}$ состоит из одного или нескольких интервалов

$$X_1\equiv Q\cap\mathbf{R}^1=\bigcup_{m=1}^{n}(x_{2m-1},x_{2m}),\ x_i<x_{i+1},\ i=1,\dots,2n-1.$$

Образуем области $\Omega_1=Q\cap\mathbf{R}^2_+$, $\Omega_2=Q\cap\mathbf{R}^2_-$ и $\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2\cup\omega$, где

$$\omega\equiv\bigcup_{\nu=1}^{N}(a_{2\nu-1},a_{2\nu})\subset X_1,\ a_j<a_{j+1},\ j=1,\dots,2N-1\ \ (N\geqslant 1),$$

$\mathbf{R}^2_+=\{y>0\}$, $\mathbf{R}^2_-=\{y<0\}$. Будем предполагать, что границы областей Q, Ω_1, Ω_2 являются простыми, замкнутыми кусочно-гладкими кривыми, состоящими из конечного числа гладких дуг, сходящихся под углами, отличными от нулевого.

Граница Γ области Ω содержит «ребра», если $\omega\not\equiv X_1$. Модели с такими областями встречаются в электродинамике [1]. Отметим, что построенная область Ω удовлетворяет условию конуса [4], что позволит нам применять теоремы вложения и теоремы о следах в пространствах Соболева.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения для системы уравнений эллиптического типа. Требуется найти такие числа $\gamma\in\mathbf{C}$, называемые характеристическими (х. ч.), при которых существуют нетривиальные решения $\Pi(x,y)$, $\Psi(x,y)$ уравнений

$$\begin{gathered}\Delta\Pi+k(\gamma)\Pi=0,\quad k(\gamma)=\varepsilon-\gamma^2,\\ \Delta\Psi+k(\gamma)\Psi=0,\quad (x,y)\in\Omega_j,\quad j=1,2,\end{gathered}\tag{1}$$

удовлетворяющих краевым условиям на границе Γ области Ω

$$\Pi|_{\Gamma}=0, \quad \left.\frac{\partial \Psi}{\partial n}\right|_{\Gamma}=0 \tag{2}$$

и условиям сопряжения на ω

$$[\Pi]_{\omega}=0, \qquad [\Psi]_{\omega}=0,$$

$$\left[\frac{\varepsilon}{k(\gamma)}\ \frac{\partial \Pi}{\partial y}\right]_{\omega}+\left[\frac{\gamma}{k(\gamma)}\ \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right]_{\omega}=0, \tag{3}$$

$$\left[\frac{1}{k(\gamma)}\ \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right]_{\omega}-\left[\frac{\gamma}{k(\gamma)}\ \frac{\partial \Pi}{\partial x}\right]_{\omega}=0;$$

квадратные скобки означают разность предельных значений функции при $y<0$ и $y>0$. Здесь $\varepsilon=\varepsilon_j$ в Ω_j — вещественные положительные коэффициенты. Для определенности будем считать, что $\varepsilon_2\geqslant\varepsilon_1\geqslant 1$. Функции Π, Ψ предполагаются комплекснозначными. Краевые условия (2) считаются выполненными с двух сторон на той части границы Γ, которая лежит на оси $y=0$.

Будем искать решения Π и Ψ задачи (1)—(3) в пространствах Соболева [4] соответственно

$$H_0^1(\Omega)=\{f|f\in H^1(\Omega),\ \ f|_{\Gamma}=0\},$$

и

$$\hat{H}^1(\Omega)=\{f|f\in H^1(\Omega),\int_{\Omega} f ds=0\}$$

со скалярным произведением и нормой

$$(f,g)=\int_{\Omega}\nabla f\nabla \bar{g} ds, \quad \|f\|^2=(f,f). \tag{4}$$

Тот факт, что полунорма (4) в $H^1(\Omega)$ является нормой в $H_0^1(\Omega)$ и $\hat{H}^1(\Omega)$, следует из коэрцитивности формы (4) в этих пространствах [4]. Для достаточно гладкой функции Ψ, удовлетворяющей (1)—(3):

$$\int_{\Omega}\Psi ds=-\int_{\omega}\left[\frac{1}{k(\gamma)}\ \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right]_{\omega} dx=-\gamma\left[\frac{1}{k(\gamma)}\right]\int_{\omega}\left.\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right|_{\omega} dx=0,$$

поэтому выбор класса $\hat{H}^1(\Omega)$ не сужает пространства решений рассматриваемой задачи.

Пусть Π, Ψ непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$. Умножим уравнения (1) на произвольные пробные функции $\bar{u}\in H_0^1(\Omega)$ и $\bar{v}\in\hat{H}^1(\Omega)$ (которые также пока можно считать непрерывно дифференцируемыми в $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$) и применим формулу Грина отдельно к каждой области Ω_j. Тогда, выражая нормальные производные на ω через касательные по формулам (3), будем иметь

$$\int_{\Omega}\frac{\varepsilon}{k(\gamma)}\nabla\Pi\nabla\bar{u} ds+\int_{\Omega}\frac{1}{k(\gamma)}\nabla\Psi\nabla\bar{v} ds-\int_{\Omega}\varepsilon\Pi\bar{u} ds-$$

$$-\int_{\Omega}\Psi\bar{v} ds-\gamma\left[\frac{1}{k(\gamma)}\right]\int_{\omega}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\bar{v}-\frac{\partial \Psi}{\partial x}\bar{u}\right) dx=0. \tag{5}$$

Здесь и далее в выражениях $\int_{\omega} f dx$ под f надо понимать след функции на ω.

Вариационное соотношение (5) получено для гладких функций Π, Ψ, u, v. В п. 2 будет доказана непрерывность полуторалинейных форм, определяемых интегралами, входящими в (5). Поэтому соотношение

(5) распространяется по непрерывности на любые функции П, $u \in H_0^1(\Omega)$, Ψ, $v \in \widehat{H}^1(\Omega)$ и корректно следующее

Определение 1. Пару функций

$$\Pi \in H_0^1(\Omega), \quad \Psi \in \widehat{H}^1(\Omega) \qquad (\|\Pi\| + \|\Psi\| \neq 0)$$

будем называть собственным вектором задачи (1)—(3), отвечающим х. ч. γ_0, если при $\gamma = \gamma_0$ выполнено вариационное соотношение (5) для любых $u \in H_0^1(\Omega)$, $v \in \widehat{H}^1(\Omega)$.

Компоненты П, Ψ собственного вектора задачи (1)—(3) бесконечно дифференцируемы в Ω_1 и Ω_2, удовлетворяют уравнениям (1) (в классическом смысле), а также условиям (2), (3) в смысле распределений [5].

2. Эквивалентная задача для операторного пучка. Запишем вариационное соотношение (5) в другом виде, сгруппировав слагаемые по степеням γ:

$$\gamma^4 \int_\Omega (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) ds + \gamma^2 \Big(\int_\Omega (\varepsilon \nabla \Pi \nabla \bar{u} + \nabla \Psi \nabla \bar{v}) ds -$$

$$- (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \int_\Omega (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) ds \Big) + \gamma (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \int_\omega \left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} \bar{v} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \bar{u} \right) dx + \quad (6)$$

$$+ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left(\int_\Omega (\varepsilon \Pi \bar{u} + \Psi \bar{v}) ds - \int_\Omega \left(\nabla \Pi \nabla \bar{u} + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \Psi \nabla \bar{v} \right) ds \right) = 0$$

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \qquad v \in \widehat{H}^1(\Omega).$$

Пусть $H = H_0^1(\Omega) \times \widehat{H}^1(\Omega)$ — декартово произведение гильбертовых пространств со скалярным произведением и нормой $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (f_1, g_1) + (f_2, g_2)$, $\|\mathbf{f}\|^2 = \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2$, где $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in H$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2)^{\mathrm{T}}$, $f_1, g_1 \in H_0^1(\Omega)$, $f_2, g_2 \in \widehat{H}^1(\Omega)$. Тогда интегралы, входящие в (6), можно рассматривать как полуторалинейные формы над полем **C**, заданные на пространстве H от аргументов $\mathbf{f} = (\Pi, \Psi)^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{g} = (u, v)^{\mathrm{T}}$. Эти формы определяют [5] некоторые линейные ограниченные операторы $T: H \to H$ по формуле

$$t(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = (T\mathbf{f}, \mathbf{g}) \quad \forall \mathbf{g} \in H \qquad (7)$$

при условии, что сами формы $t(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ ограничены.

Рассмотрим полуторалинейные формы и порождаемые ими операторы

$$a_1(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \equiv \int_\Omega (\varepsilon \nabla f_1 \nabla \bar{g}_1 + \nabla f_2 \nabla \bar{g}_2) ds = (A_1 \mathbf{f}, \mathbf{g}) \quad \forall \mathbf{g} \in H,$$

$$a_2(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \equiv \int_\Omega \left(\nabla f_1 \nabla \bar{g}_1 + \frac{1}{\varepsilon} \nabla f_2 \nabla \bar{g}_2 \right) ds = (A_2 \mathbf{f}, \mathbf{g}) \quad \forall \mathbf{g} \in H,$$

$$k(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \equiv \int_\Omega (\varepsilon f_1 \bar{g}_1 + f_2 \bar{g}_2) ds = (K \mathbf{f}, \mathbf{g}) \quad \forall \mathbf{g} \in H, \qquad (8)$$

$$s(\mathbf{f}, \mathbf{g}) \equiv \int_\omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \bar{g}_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x} \bar{g}_1 \right) dx = (S \mathbf{f}, \mathbf{g}) \quad \forall \mathbf{g} \in H.$$

Ограниченность форм $a_1(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ и $a_2(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ очевидна. Ограниченность формы $k(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ легко получается из неравенства Пуанкаре. Докажем ограниченность формы $s(\mathbf{f}, \mathbf{g})$. Пусть функции f_1, f_2, g_1, g_2 непрерывно дифференцируемы в $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$. В этом случае, переходя к двойному интегралу, будем иметь

$$\int_\omega \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} \bar{g}_2 - \frac{\partial f_2}{\partial x} \bar{g}_1 \right) dx = \frac{1}{2} \int_\Omega \frac{y}{|y|} \left(\frac{\partial f_1}{\partial y} \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial x} - \right.$$

$$-\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial \bar{g}_2}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial \bar{g}_1}{\partial x}\Big)\,ds,$$

откуда по неравенству Коши — Буняковского получаем оценку

$$|s(\mathbf{f},\mathbf{g})|\leqslant\frac{1}{2}\|\mathbf{f}\|\,\|\mathbf{g}\|. \qquad (9)$$

Остается распространить оценку (9) по непрерывности на любые функции $\mathbf{f},\mathbf{g}\in H$. Теперь вариационную задачу (6) можно записать в операторном виде

$$(L(\gamma)\mathbf{f},\mathbf{g})=0 \qquad \forall\mathbf{g}\in H,$$

или эквивалентно $L(\gamma)\mathbf{f}=0$, где $L(\gamma):H\to H$,

$$L(\gamma)=\gamma^4K+\gamma^2(A_1-(\varepsilon_1+\varepsilon_2)K)+\gamma(\varepsilon_1-\varepsilon_2)S+\varepsilon_1\varepsilon_2(K-A_2), \qquad (10)$$

причем все операторы пучка (10) ограничены.

Таким образом, задача (1)—(3) свелась к изучению операторного пучка $L(\gamma)$. Ясно, что характеристические числа и собственные векторы пучка $L(\gamma)$ совпадают с характеристическими числами и собственными векторами задачи (1)—(3), поэтому естественно

Определение 2. Присоединенные векторы пучка $L(\gamma)$ [6] будем называть присоединенными векторами задачи (1)—(3).

Приведем вид краевой задачи для определения присоединенных векторов $(\Pi_p,\Psi_p)^{\mathrm{T}}$ $(p=1,2,\ldots)$

$$\begin{gathered}\Delta\Pi_p+k(\gamma)\Pi_p-2\gamma\Pi_{p-1}-\Pi_{p-2}=0,\\ \Delta\Psi_p+k(\gamma)\Psi_p-2\gamma\Psi_{p-1}-\Psi_{p-2}=0,\\ (x,y)\in\Omega_j,\end{gathered} \qquad (11)$$

$$\Pi_p|_\Gamma=0, \qquad \left.\frac{\partial\Psi_p}{\partial n}\right|_\Gamma=0, \qquad (12)$$

$$[\Pi_p]_\omega=0, \qquad [\Psi_p]_\omega=0,$$

$$\begin{gathered}k_1(\gamma)k_2(\gamma)\left[\frac{\varepsilon}{k(\gamma)}\frac{\partial\Pi_p}{\partial y}\right]_\omega+2\gamma\left[\varepsilon\frac{\partial\Pi_{p-1}}{\partial y}\right]_\omega+\left[\varepsilon\frac{\partial\Pi_{p-2}}{\partial y}\right]_\omega+\\ +\gamma(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left.\frac{\partial\Psi_p}{\partial x}\right|_\omega+(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left.\frac{\partial\Psi_{p-1}}{\partial x}\right|_\omega=0,\\ k_1(\gamma)k_2(\gamma)\left[\frac{1}{k(\gamma)}\frac{\partial\Psi_p}{\partial y}\right]_\omega+2\gamma\left[\frac{\partial\Psi_{p-1}}{\partial y}\right]_\omega+\left[\frac{\partial\Psi_{p-2}}{\partial y}\right]_\omega-\\ -\gamma(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left.\frac{\partial\Pi_p}{\partial x}\right|_\omega-(\varepsilon_1-\varepsilon_2)\left.\frac{\partial\Pi_{p-1}}{\partial x}\right|_\omega=0.\end{gathered} \qquad (13)$$

Здесь $(\Pi_0,\Psi_0)^{\mathrm{T}}$ — собственный вектор; $(\Pi_m,\Psi_m)^{\mathrm{T}}\equiv0$ при $m<0$.

Для дальнейшего нам потребуются свойства операторов пучка (10).

Утверждение 1. *Операторы A_j равномерно положительны, $I\leqslant A_1\leqslant\varepsilon_2 I$, $\varepsilon_2^{-1}I\leqslant A_2\leqslant I$, где I — тождественный оператор в H.*

Утверждение 2. $S=S^*$, $-\frac{1}{2}I\leqslant S\leqslant\frac{1}{2}I$.

Утверждение 3. *Оператор $K>0$ вполне непрерывный, для его собственных чисел верна асимптотика*

$$\lambda_n(K)=O(n^{-1}), \qquad n\to\infty. \qquad (14)$$

Доказательство утверждения 1 элементарно. Утверждение 2 следует из равенства

$$\int\limits_{\omega}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\bar{g}_2-\frac{\partial f_2}{\partial x}\bar{g}_1\right)dx=\int\limits_{\omega}\left(\frac{\partial\bar{g}_1}{\partial x}f_2-\frac{\partial\bar{g}_2}{\partial x}f_1\right)dx,$$

легко получаемого для непрерывно дифференцируемых в $\bar{\Omega}_1$ и $\bar{\Omega}_2$ функций, и оценки (9).

Докажем последнее утверждение. Тот факт, что $K>0$, проверяется непосредственно, вполне непрерывность K следует из теоремы Реллиха — Кондрашева о компактности вложения $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, справедливой для областей, удовлетворяющих условию конуса [4].

Пусть $W=H_0^1(Q)\times H^1(\Omega_1\cup\Omega_2)$. Тогда $H\subset W$. Рассмотрим оператор K на более широком пространстве функций W. Собственные числа этого оператора определяются из соответствующих краевых задач Дирихле и Неймана в областях Ω_1, Ω_2, Q с кусочно-гладкой границей и их асимптотика хорошо известна [6]: $\lambda_n(K_W)\sim\operatorname{mes}Q(2\pi n)^{-1}$, $n\to\infty$. Применяя вариационный принцип Куранта [7], заключаем, что $\lambda_n(K)\leqslant\leqslant\varepsilon_2\lambda_n(K_W)$ и, следовательно, $\lambda_n(K)=O(n^{-1})$, $n\to\infty$.

Пучок $L(\gamma)$ не принадлежит к какому-либо из хорошо изученных классов: пучков Келдыша, гиперболических пучков и т. д. Тем не менее спектральные свойства этого пучка могут быть описаны достаточно полно. Отметим, что пучок (10) является самосопряженным: $L^*(\gamma)=L(\bar{\gamma})$.

3. Свойства спектра пучка $L(\gamma)$. Введем обозначения: $\delta=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)/2$, $p=((\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2)^{1/2}$, $\tilde{K}=A_1^{-1/2}KA_1^{-1/2}$, $\tilde{S}=A_1^{-1/2}SA_1^{-1/2}$, $\tilde{A}_2=A_1^{-1/2}A_2A_1^{-1/2}$, $\tilde{A}_1'=A_1^{-1/2}A_1'A_1^{-1/2}$, где $A_1':H\to H$ определяется формулой

$$a_1'(\mathbf{f},\mathbf{g})\equiv\int\limits_{\Omega}\frac{y}{|y|}(\varepsilon\nabla f_1\nabla\bar{g}_1+\nabla f_2\nabla\bar{g}_2)ds=(A_1'\mathbf{f},\mathbf{g})\quad\forall\mathbf{g}\in H.\tag{15}$$

Свойства спектра пучка (10) описываются следующими теоремами.

Т е о р е м а 1. *Спектр пучка* $L(\gamma)$ *лежит в полосе* $\Pi_l=\{|\operatorname{Re}\gamma|\leqslant l\}$ *для некоторого* $l>0$; $\sigma(L)\subset\Pi_l$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $l>\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$. В области $|\gamma|>l$ рассмотрим пучок

$$\tilde{L}(\gamma)=(\gamma^2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)^{-1}A_1^{-1/2}L(\gamma)A_1^{-1/2}=\gamma^2\tilde{K}+I+\gamma^{-1}T(\gamma),\tag{16}$$

где $T(\gamma)=\gamma(\gamma^2-\varepsilon_1-\varepsilon_2)^{-1}((\varepsilon_1+\varepsilon_2)I-2\gamma\delta\tilde{S}+\varepsilon_1\varepsilon_2(\tilde{K}-\tilde{A}_2))$.

Легко видеть, что в этой области спектры пучков $L(\gamma)$ и $\tilde{L}(\gamma)$ совпадают, поэтому достаточно доказать утверждение теоремы для пучка (16).

Оператор-функция $T(\gamma)$ аналитична и ограничена в области $|\gamma|>l$, $\|T(\gamma)\|\leqslant T_0$. При $|\operatorname{Re}\gamma|>l$ существует ограниченный оператор $R(\gamma)=(\gamma^2\tilde{K}+I)^{-1}$ и для его нормы справедлива оценка [6]

$$\|R(\gamma)\|\leqslant\frac{|\gamma^{-2}|}{|\operatorname{Im}\gamma^{-2}|}\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\gamma|}{l}\right)$$

при $|\gamma''|>|\gamma'|$ и $\|R(\gamma)\|=1$ при $|\gamma''|\leqslant|\gamma'|$; $\gamma=\gamma'+i\gamma''$. Выберем $l>T_0$. В этом случае

$$\|\gamma^{-1}T(\gamma)R(\gamma)\|\leqslant\frac{1}{2}\left(1+\frac{|\gamma|}{l}\right)\frac{T_0}{|\gamma|}<1,$$

поэтому существует и ограничен оператор

$$\tilde{L}^{-1}(\gamma)=R(\gamma)\,(I+\gamma^{-1}T(\gamma)R(\gamma))^{-1},$$

а вместе с ним и оператор $L^{-1}(\gamma)$ вне полосы $\Pi_l=\{|\operatorname{Re}\gamma|\leqslant l\}$. Теорема 1 доказана.

Т е о р е м а 2. *Спектр пучка* $L(\gamma)$ *симметричен относительно действительной и мнимой оси. В области* $\mathbf{C}\backslash I_0$, *где*

$$I_0=\left\{\gamma\,|\,\mathrm{Im}\,\gamma=0,\ \frac{(\delta^2+4\varepsilon_1)^{1/2}-\delta}{2}\leqslant|\gamma|\leqslant\frac{(\delta^2+4\varepsilon_2)^{1/2}+\delta}{2}\right\},$$

$\sigma(L)$ состоит из изолированного множества х. ч. конечной алгебраической кратности.

Доказательство. С помощью вариационного соотношения (6) легко проверяется, что если оператор $L(\gamma_0)$ непрерывно обратим, то непрерывно обратимы и операторы $L(-\gamma_0)$, $L(\bar\gamma_0)$, $L(-\bar\gamma_0)$.

Рассмотрим вопрос о дискретности спектра. Пусть $\gamma=\gamma'+i\gamma''$, $\gamma''\neq 0$. Тогда

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{\gamma''}\left(\gamma A_1-2\delta S-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\gamma}A_2\right)\right]=A_1+\varepsilon_1\varepsilon_2|\gamma|^{-2}A_2\geqslant I,$$

поэтому [6] оператор

$$L_0(\gamma)=\gamma^2A_1-2\gamma\delta S-\varepsilon_1\varepsilon_2A_2$$

непрерывно обратим и, следовательно, $L(\gamma)$ фредгольмов как сумма обратимого и вполне непрерывного операторов. Для вещественных $\gamma\notin I_0$ верна оценка $|\gamma^2-p^2|>\delta(1+|\gamma|)$, в силу которой оператор

$$\tilde{L}_0(\gamma)=A_1^{-1/2}L_0(\gamma)A_1^{-1/2}=(\gamma^2-p^2)I-2\gamma\delta\tilde{S}+\delta\tilde{A}_1',$$

а вместе с ним и оператор $L_0(\gamma)$ также непрерывно обратимы, $L(\gamma)$ фредгольмов. Отсюда следует [6] второе утверждение теоремы.

Замечание. Точки $\gamma_j=\pm\sqrt{\varepsilon_i}\in\sigma(L)$ и являются точками вырождения пучка $L(\gamma):\dim\ker L(\gamma_j)=\infty$. Можно доказать, что других точек вырождения нет и $L(\gamma)$ фредгольмов в остальных точках I_0, однако нам эти свойства не потребуются.

4. Теоремы о полноте системы собственных и присоединенных векторов пучка $L(\gamma)$. Докажем две важные для приложений теоремы о полноте системы собственных и присоединенных векторов (с. п. в.) пучка $L(\gamma)$. В первом случае исходный пучок представляется как возмущение пучка Келдыша аналитической оператор-функцией, во втором предполагается, что параметр δ достаточно мал.

Все встречающиеся определения имеются в [6, 8].

Теорема 3. *Система с. п. в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х. ч. из множества $|\gamma|\geqslant\eta$, $\eta\geqslant 0$ — произвольное неотрицательное число, двукратно полна по Келдышу с конечным дефектом в $H\times H$.*

Доказательство. Рассмотрим пучок $L(\gamma)$ в области $R_\eta=\{|\gamma|>\eta\}$, где η — произвольное число, $\eta>\sqrt{\varepsilon_1+\varepsilon_2}$. Полнота системы с. п. в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х. ч. из R_η, эквивалентна полноте системы с. п. в. пучка $\tilde{L}(\gamma)$, также отвечающих х. ч. из R_η, так как спектры пучков в области R_η совпадают, а с. п. в. связаны соотношением

$$\varphi_j^{(k)}(L)=A_1^{-1/2}\varphi_j^{(k)}(\tilde{L}).$$

Пучок $\tilde{L}(\gamma)$ можно рассматривать как возмущение пучка $\gamma^2\tilde{K}+I$ аналитической в R_η оператор-функцией $T_1(\gamma)=\gamma^{-1}T(\gamma)$ с $T_1(\infty)=0$. В нашем случае оператор $\tilde{K}>0$ является оператором Гильберта — Шмидта (утверждение 3), поэтому, как следует из работы [9], система с. п. в. пучка $\tilde{L}(\gamma)$, а вместе с ним и пучка $L(\gamma)$ двукратно полна по Келдышу с конечным дефектом в $H\times H$.

Теорема 4. *Пусть фиксировано произвольное число $M>1$. Тогда найдется такое $\delta_*=\delta_*(M;\Omega)$, что при любых ε_j, $1\leqslant\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_2\leqslant M$, для которых $\delta<\delta_*$ система с. п. в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х. ч. $\gamma_n\neq\pm\sqrt{\varepsilon_i}$, $i=1, 2$, двукратно полна по Келдышу в $H\times H$.*

Доказательство. Будем рассматривать пучок

$$F(\gamma)=A_1^{-1/2}L(\gamma)A_1^{-1/2}=(p^2-\gamma^2)((p^2-\gamma^2)\tilde{K}-I)+\delta B(\gamma), \quad (17)$$

где $B(\gamma)=-2\gamma\tilde{S}-\delta\tilde{K}-\tilde{A}_1'$. Так же как и в теореме 3, полнота с. п. в. пучка $L(\gamma)$ эквивалентна полноте с. п. в. пучка $F(\gamma)$.

Пучок $F(\gamma)$ естественно представить как возмущение оператор-функцией $\delta B(\gamma)$ более простого пучка

$$F_0(\gamma)=(p^2-\gamma^2)\tilde{F}(\gamma), \qquad \tilde{F}(\gamma)=(p^2-\gamma^2)\tilde{K}-I.$$

Так как $\tilde{K}>0$, то для х. ч. $\tilde{\gamma}_n$ пучка $\tilde{F}(\gamma)$ справедлива оценка $\tilde{\gamma}_n^2\leqslant p^2-\|\tilde{K}\|^{-1}$, $n=\pm 1, \pm 2, \ldots$, где обозначено $\tilde{\gamma}_{-n}=-\tilde{\gamma}_n$ и х. ч. нумеруются в порядке убывания $\tilde{\gamma}_n^2$. В силу ограничений, наложенных на коэффициенты ε_j, найдется такое не зависящее от ε_j число $M_0<1$, что $p-\tilde{\gamma}_1\geqslant 3M_0$. Пусть $\delta\leqslant M_0$. Выберем окружности

$$\Gamma_\pm=\{\gamma|\ |\gamma\mp p|=r; \qquad r=p+M_0-\sqrt{\varepsilon_1}\}$$

и рассмотрим пучок $F(\gamma)$ в области D:

$$D=\{\gamma|\ |\gamma-p|>r, \qquad |\gamma+p|>r\}.$$

В этой области содержатся все х. ч. $\tilde{F}(\gamma)$, а пучок $F(\gamma)$ на основании теоремы 2 фредгольмов в D. Если $\gamma_0\in\Gamma_0$, $\Gamma_0=\Gamma_+\cup\Gamma_-$, то $|\gamma_0-\tilde{\gamma}_n|\geqslant M_0$, $|\gamma_0\pm\sqrt{\varepsilon_i}|\geqslant M_0$. Поэтому $F_0(\gamma)$ непрерывно обратима на Γ_0 и $\|F_0^{-1}(\gamma)\|\leqslant C_0$, где C_0 не зависит от ε_j, γ. Далее, $\|B(\gamma)\|\leqslant B_0$ на контуре Γ_0, и если потребовать, чтобы $\delta<B_0^{-1}C_0^{-1}$, то $F(\gamma)$ также непрерывно обратим на Γ_0 и $\|F^{-1}(\gamma)\|\leqslant C_1$ равномерно по $\gamma\in\Gamma_0$, $1\leqslant\varepsilon_j\leqslant M$.

Согласно [8], для доказательства двукратной полноты по Келдышу системы с. п. в. фредгольмового пучка $F(\gamma)$, отвечающих х. ч. из области D, достаточно установить, что для любых $\mathbf{f}_0$, $\mathbf{f}_1\in H$ из аналитичности вектор-функции $\mathbf{f}(\gamma)=F^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1)$ в D следует, что $\mathbf{f}_0=\mathbf{f}_1=0$.

Пусть $\mathbf{f}(\gamma)$ аналитична в D. Рассмотрим тождества

$$\gamma F_0^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1)-\gamma F^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1)=\gamma F_0^{-1}(\gamma)\delta B(\gamma)F^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1),$$

$$F_0^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1)-F^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1)=F_0^{-1}(\gamma)\delta B(\gamma)F^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1)$$

и проинтегрируем их по контуру Γ_0. Пользуясь асимптотикой (14), аналогично работе [10] можно показать, что $\mathbf{f}(\gamma)$ имеет в бесконечности нуль не ниже третьего порядка. Кроме того, $\sigma(\tilde{F})\subset D$ и $F(\gamma)$, $F_0(\gamma)$ непрерывно обратимы на Γ_0. Поэтому в результате интегрирования будем иметь

$$\mathbf{f}_0=\frac{\delta}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\gamma F_0^{-1}(\gamma)B(\gamma)F^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1)d\gamma,$$

$$\mathbf{f}_1=\frac{\delta}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}F_0^{-1}(\gamma)B(\gamma)F^{-1}(\gamma)(\mathbf{f}_0+\gamma\mathbf{f}_1)d\gamma.$$

Следовательно, найдется такое не зависящее от ε_j, γ число $C>0$, что

$$\|\mathbf{f}_0\|\leqslant\delta C(\|\mathbf{f}_0\|+\|\mathbf{f}_1\|),$$

$$\|\mathbf{f}_1\|\leqslant\delta C(\|\mathbf{f}_0\|+\|\mathbf{f}_1\|),$$

откуда $\|\mathbf{f}_0\|=\|\mathbf{f}_1\|=0$, если $\delta<C^{-1}/2$, и $\mathbf{f}_0=\mathbf{f}_1=0$. Остается положить $\delta_*<\min(C^{-1}/2, M_0, B_0^{-1}C_0^{-1})$. Теорема доказана.

Замечание. Фактически доказано более сильное утверждение: система с. п. в. пучка $L(\gamma)$, отвечающих х. ч. из области D, двукратно полна по Келдышу в $H\times H$.

В заключение отметим, что полная (полная с конечным дефектом) по Келдышу в $H \times H$ система векторов будет полной (полной с конечным дефектом) в обычном смысле в пространстве H.

Литература

1. Ильинский А. С., Шестопалов Ю. В. // Вычислит. методы и программирование. М., 1980. Вып. 32. С. 85—103.
2. Ильинский А. С., Смирнов Ю. Г. // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 1987. Т. 27, № 2. С. 252—261.
3. Смирнов Ю. Г. // Докл. АН СССР. 1987. Т. 297, № 4. С. 829—832.
4. Мазья В. Г. Пространства С. Л. Соболева. Л., 1985.
5. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М., 1971.
6. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965.
7. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М., 1951. Т. 1.
8. Радзиевский Г. В. // Мат. сб. 1973. Т. 91, № 3. С. 310—335.
9. Радзиевский Г. В. // Функц. анализ и его приложения. 1973. Т. 7, вып. 1. С. 84—85.
10. Маркус А. С. // Математические исследования. Кишинев, 1974. Т. 9, вып. 3 (33). С. 105—126.

Пензенский политехнический институт

Поступила в редакцию 8 августа 1990 г.

УДК 517.95

Л. В. ТУНИЦКИЙ

НЕЛИНЕЙНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Статья посвящена локальной теории вещественных нелинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными. Состоит из двух частей. В первой части определяется понятие гиперболичности для квазилинейных систем произвольного порядка, которые могут иметь кратные характеристики. Доказана приводимость таких систем к характеристической форме. В качестве следствия на основании известных результатов для систем первого порядка получены существование и единственность классического решения задачи Коши и смешанной задачи. Во второй части аналогичные рассмотрения выполнены для нелинейных систем.

§ 1. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

1. Определение гиперболичности. Рассмотрим систему m квазилинейных уравнений с m неизвестными

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{\beta=0}^{n_\alpha} B^i_{\alpha\beta}(x, y, p) \frac{\partial^{n_\alpha} z^\alpha}{\partial x^{n_\alpha-\beta} \partial y^\beta} + A^i(x, y, p) = 0, \tag{1}$$

где $i=1, \dots, m$, $n_i \geqslant 1$, $p=(p^1, \dots, p^m)$, $p^i=(p^i_{00}, p^i_{10}, p^i_{11}, \dots, p^i_{n_i-1\,0}, \dots$ $\dots, p^i_{n_i-1\,n_i-1})$,

$$p^i_{sj} = \frac{\partial^s z^i}{\partial x^{s-j} \partial y^j}, \tag{2}$$

$s=0, \dots, n_i$, $j=0, \dots, s$. Величины $n_1, \dots, n_m$ соответствуют наивысшему порядку производных от функций $z^1, \dots, z^m$ соответственно, входящих в уравнения системы (1). Под классическим решением системы (1) понимается вектор-функция z такая, что $z^i \in C^{n_i}$, $i=1, \dots, m$. Введем обозначения

$$N = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{n_\alpha(n_\alpha+1)}{2}, \quad n = \sum_{\alpha=1}^{m} n_\alpha.$$