Н. Я. Кирпичникова, А. П. Киселев, Поляризанионно-спектральные аномалии поверхностных волн в почти слоистом упругом полупространстве, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 165, 102–114

Н.Я.Кирпичникова, А.П.Киселев

ПОЛЯРИЗАЦИОННО-СПЕКТРАЛЬНЫЕ АНОМАЛИИ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В ПОЧТИ СЛОИСТОМ УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Работа посвящена распространению волн Лява и Рэлея в изотропном полупространстве, свойства которого слабо меняются по латерали, зависят от глубины произвольным образом. Целью является исследование аномальных, или примесных компонент, т.е. лявовских (SH) составляющих волн Рэлея и рэлеевских ($P-SV$) составляющих волн Лява. Причинами их возникновения являются медленные (малые на длине волны) горизонтальные вариации материальных параметров среды и свойств волнового процесса. В качестве примеров получены чрезвычайно простые формулы для примесных компонент волн Рэлея в однородном полупространстве и для лявовских волн в однородном слое на однородном же полупространстве.

Исследование основано на изучении поправочного члена "поверхностного" лучевого метода [1,2] и относится к модам с малыми номерами. Случай сильной связи волн Лява и Рэлея вследствие близости их фазовых скоростей не рассматривается.

Работа была предпринята с целью предложить сейсмологам, наблюдающим аномалии поверхностных волн [3–5], количественную теорию для их объяснения, не опирающуюся на анизотропную модель среды [5–6]. Примесные компоненты, описанные в нашей работе, как и примесные компоненты объемных волн [7–9], более низкочастотны, чем основные. Это дает, в принципе, возможность различать влияние дифракции и анизотропии (где частотной зависимости практически нет [5,6]). По-видимому, вблизи особенностей поля поверхностных лучей роль аномальной компоненты, возрастает, как это происходит для объемных волн [16].

Работа представляет интерес и для акустики твердого тела.

С формальной точки зрения, работа служит продолжением [1,2], где найден главный – нулевой – член лучевого разложения для поверхностных волн. Нашей целью является изучение поправочного члена в схеме [1,2], которую мы слегка видоизменяем, чтобы подчеркнуть более низкочастотный характер исследуемой поправки.

С физической точки зрения, работа анологична изучению примесных компонент объемных волн, для которых формулы типа "нулевой член + примесная компонента" поразительно хорошо согласуются с численными результатами (например, [10]). Можно надеяться, что наши формулы позволят объяснить эффекты, найденные в [11] методом сеток.

Наши результаты нетрудно обобщить на случай плавно меняющегося рельефа (такая работа ведется), а также на каналовые волны. Более трудоемко изучение примесных компонент в модели, учитывающей крупномасштабное искривление слоистой структуры.

Авторы признательны А.Л.Левшину и Т.Б.Яновской за полезные замечания.

I. Постановка задачи

Точка $\vec{r}$ упругого полупространства характеризуется декартовыми координатами $x \equiv x_1, y \equiv x_2, z \equiv x_3, \ z > 0$. Гармонические по времени смещения $\vec{u}(\vec{r},\omega)$ с угловой частотой ω описываются уравнением

$$\vec{L}(\vec{u}) = 0, \tag{I.1}$$

$$L_j(\vec{u}) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \sigma_{jk}(\vec{u}) + \rho\omega^2 u_j \ , \tag{I.2}$$

$\rho = \rho(\vec{r}), \ \rho > 0$ – плотность, σ_{kj} – тензор напряжений

$$\sigma_{kj}(\vec{u}) = \mu\left(\frac{\partial}{\partial x_k} u_j + \frac{\partial}{\partial x_j} u_k\right) + \lambda\delta_{kj} \operatorname{div} \vec{u} \ , \tag{I.3}$$

$\lambda = \lambda(\vec{r}), \mu = \mu(\vec{r}) > 0$ – параметры Ламе, $\lambda + 2\mu > \mu > 0$.

Временной множитель $\exp(-i\omega t)$ опускается везде, кроме окончательных формул (3.17) и (4.25).

Условие отсутствия напряжений на границе имеет вид

$$\vec{t}(\vec{u})\Big|_{z=0} = 0 \ , \tag{I.4}$$

$$t_j(\vec{u}) = \sigma_{3j}(\vec{u}) \ . \tag{I.5}$$

В случае разрыва материальных параметров λ, μ, ρ при $z = h_k, k = 1, 2, \ldots N$, подразумевается непрерывность смещения и нормального напряжения

$$[\vec{u}]\Big|_{z=h_k} = 0 \ , \quad [\vec{t}(\vec{u})]\Big|_{z=h_k} = 0 \ , \tag{I.6}$$

где $[\ldots]\Big|_{z=h_k}$ обозначает скачок при $z = h_k$.

Поверхностный характер колебаний означает достаточно быстрое убывание $|\vec{u}|$ при $z \to +\infty$.

Близость среды к слоистой для поверхностных волн с фазовой скоростью c и угловой частотой ω означает, что

$$\frac{c}{\omega}\,\frac{|\nabla_\perp \lambda|}{\lambda} << 1 \ , \ \frac{c}{\omega}\,\frac{|\nabla_\perp \mu|}{\mu} << 1 \ , \ \frac{c}{\omega}\,\frac{|\nabla_\perp \rho|}{\rho} << 1 \ , \tag{I.7}$$

$$|\nabla_\perp \xi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Возможность использования аналога лучевого метода накладывает дополнительные ограничения на волновой процесс. Так, если источник колебаний сосредоточен при $\vec{r}=0$, то необходимо выполнение условия дальней зоны

$$\frac{c}{r\omega} << 1\,, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}\,. \tag{I.8}$$

Мы считаем, что полупространство близко к слоистому. Формальное описание соответствующих условий на параметры среды и, соответственно, построение асимптотических решений может быть реализовано двумя эквивалентными способами.

Можно, следуя [I,2,3] положить, что $\lambda = \lambda(\varepsilon x, \varepsilon y, z)$, $\mu = \mu(\varepsilon x, \varepsilon y, z)$, $\rho = \rho(\varepsilon x, \varepsilon y, z)$, где $\varepsilon << 1$ – малый параметр, (так что $\varepsilon = 0$ отвечает вертикально-слоистой среде) и строить решение в виде

$$\vec{u} = e^{\frac{i}{\varepsilon}\tau(x,y)}\vec{\Phi}\,, \quad \vec{\Phi} = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \vec{\Phi}^j(\varepsilon x, \varepsilon y, z)\,. \tag{I.9}$$

Мы же выбираем другую форму описания медленности латеральных вариаций, подчеркивающую сходство конструкции [I,2] с лучевым методом для объемных волн [7–9]. Положим

$$\vec{u} = e^{i\omega\tau(x,y)}\,\vec{\Psi}\,, \tag{I.10}$$

$$\vec{\Psi} \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\vec{\Psi}^j(x,y,z;\omega)}{\omega^j}\,, \tag{I.11}$$

считая формально $\omega >> 1$ большим параметрам (см. (I.7) и (I.8)). Положим, также формально, что

$$\frac{\partial}{\partial z} = O(\omega)\,, \quad \omega \to \infty\,. \tag{I.12}$$

Оценка (I.12) означает, что величинам $\frac{\partial \Psi^j}{\partial z}, \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \frac{\partial \mu}{\partial z}, \frac{\partial \rho}{\partial z}$ приписываются порядки соответственно $O(\omega\Psi^j), O(\omega\lambda), O(\omega\mu), O(\omega\rho)$. Удобно ввести оператор

$$\mathcal{D} = \frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial z}\,, \quad \mathcal{D} = O(1)\,. \tag{I.13}$$

Мы предполагаем также, что

$$\frac{\partial}{\partial x} \sim O(1)\,, \quad \frac{\partial}{\partial y} \sim O(1)\,, \tag{I.14}$$

(в том же смысле, что и (I.I2)).

Выбор анзатца (I.I0)-(I.II) с быстроосциллирующим множителем, не зависящим от z, ограничивает рассмотрение низшими модами (поскольку моды высоких номеров содержат осцилляции, зависящие от глубины [I3, I4]).

Удобно ввести ортогональные лучевые координаты (τ,α,z), связанные с лучами на поверхности полупространства [I,2] . Анзатц (I.I0)-(I.II) соответствует колебаниям, бегущим вдоль поверхностных лучей со скоростью $c=c(x,y)=|\nabla\tau|^{-1}$. Лучи суть линии, ортогональные к фронтам $\tau=const$

Пусть α - координата, характеризующая луч [2,3] . Элемент длины $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$ принимает вид

$$ds^2=c^2d\tau^2+j^2d\alpha^2+dz^2,$$

где $j=\sqrt{(\partial x/\partial\alpha)^2+(\partial y/\partial\alpha)^2}$ - геометрическое расхождение поверхностных лучей. Заметим, что координаты (τ,α) для разных мод, вообще говоря, различны.

В примерах, следующих за общим рассмотрением, параметры λ,μ,ρ не зависят от x и y, а фронты суть окружности, поэтому

$$\tau(x,y)=\frac{r}{c},\ c=const;\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ j=r. \tag{I.I5}$$

Пусть $\vec{e}_\tau=\vec{e}_\tau(x,y),\vec{e}_\alpha=\vec{e}_\alpha(x,y),\vec{e}_z$ - единичные координатные векторы, образующие правую тройку. Положим в (I.II)

$$\vec{\Psi}^0=u\cdot\vec{e}_\tau+v\vec{e}_\alpha+w\vec{e}_z\ ,$$

$$\vec{\Psi}^1=U\vec{e}_\tau+V\vec{e}_\alpha+W\vec{e}_z\,,$$

т.е.

$$\vec{u}\sim\exp(i\omega\tau)\left\{\left(u+\frac{U}{\omega}\right)\vec{e}_\tau\left(v+\frac{V}{\omega}\right)\vec{e}_\alpha\left(w+\frac{W}{\omega}\right)\vec{e}_z\right\}. \tag{I.I6}$$

В случае волн Рэлея, в нулевом порядке лучевого метода, имеющих для изотропного полупространства поляризацию $P-SV$, т.е.

$$v\equiv0\ ,\quad u\not\equiv0,\quad w\not\equiv0, \tag{I.I7}$$

нашей задачей является исследование примесной компоненты SH описываемой функцией V . Для лявовских волн, напротив,

$$u=w\equiv0\ ,\qquad v\not\equiv0 \tag{I.I8}$$

и мы интересуемся $P-SV$ компонентами U и W .

2. Подстановка анзатца в уравнение и граничные условия

Подставив (I.I0) в (I.I) и пользуясь (I.I2)-(I.I4) сгруппируем члены одного порядка:

$$\vec{L}(\vec{u}) = e^{i\omega\tau}\{\omega^2\vec{N}(\vec{\Psi}) + \omega\vec{M}(\vec{\Psi}) + \vec{L}(\vec{\Psi})\} = 0 ,$$

где $\vec{N}(\vec{\Psi}) \sim O(\vec{\Psi}), \vec{M}(\vec{\Psi}) \sim O(\vec{\Psi}), \vec{L}(\vec{\Psi}) = O(\vec{\Psi})$ – дифференциальные операторы 2-го, первого и нулевого порядка по z соответственно

$$\vec{N}(\vec{\Psi}^0) = 0 , \tag{2.1}$$

$$\vec{N}(\vec{\Psi}^1) = -\vec{M}(\vec{\Psi}^0), \ldots . \tag{2.2}$$

В лучевых координатах $\vec{N}$ имеют вид

$$N_\tau(\Psi^0) = \left(\mathcal{D}\mu\mathcal{D} + \rho - \frac{\nu}{c^2}\right)u + \frac{i}{c}(\lambda\mathcal{D} - \mathcal{D}\mu)w , \tag{2.3}$$

$$N_\alpha(\Psi^0) = \left(\mathcal{D}\mu\mathcal{D} + \rho - \frac{\mu}{c^2}\right)v \tag{2.4}$$

$$N_z(\Psi^0) = \left(\mathcal{D}\nu\mathcal{D} + \rho - \frac{\mu}{c^2}\right)w + \frac{i}{c}(\mu\mathcal{D} + \mathcal{D}\lambda)u , \tag{2.5}$$

где $\quad \nu \equiv \lambda + 2\mu \; , \; (\nabla_\perp \tau)^2 = 1/c^2$

Громоздкие выражения для $\vec{M}$ мы опускаем.

Подставив (I.I0) в граничное условие (I.4), получаем

$$\vec{t}(\vec{u}) = e^{i\omega\tau}\{\omega\vec{T}(\vec{\Psi}) + \vec{t}^1(\vec{\Psi})\} ,$$

где $\vec{T} \sim O(1)$, $\vec{t}^1 \sim O(1)$, откуда

$$\vec{T}(\vec{\Psi}^0)\Big|_{z=0} = 0 , \tag{2.6}$$

$$\vec{T}(\vec{\Psi}^1)\Big|_{z=0} = -\vec{t}^1(\vec{\Psi}^0)\Big|_{z=0} . \tag{2.7}$$

Выражения для $\vec{T}$ и $\vec{t}^1$ таковы

$$\left.\begin{aligned} &T_\tau(\vec{\Psi}^0) = \mu\left(\mathcal{D}u + \frac{i}{c}w\right), \quad T_\alpha(\vec{\Psi}^0) = \mu\mathcal{D}v , \\ &T_z(\vec{\Psi}^0) = \nu\mathcal{D}w + \frac{i}{c}\lambda u , \end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

$$t^1_\tau(\vec{\Psi}^0) = \mu \frac{1}{c}\frac{\partial w}{\partial \tau}; \quad t^1_\alpha(\vec{\Psi}^0) = \frac{\partial w}{\partial \alpha}\,\mu\cdot\frac{1}{\gamma}; \qquad \left.\right\}$$

$$t^1_z(\vec{\Psi}^0) = \frac{\lambda}{c\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial \tau}(\gamma u) + \frac{\partial}{\partial \alpha}(cv) + \frac{\partial}{\partial z}(c\gamma) w\right). \qquad (2.9)$$

Задачи (2.I),(2.6) и (2.2),(2.7) должны быть дополнены условиями на бесконечности

$$|\vec{\Psi}^0| \to 0, \quad |\vec{\Psi}^1| \to 0, \qquad \text{при} \quad z \to \infty \qquad (2.\text{I}0)$$

и условиями на поверхностях разрыва $z = h_k$ (если они есть)

$$[\vec{\Psi}^j]\Big|_{z=h_k} = 0, \quad \left[\vec{T}(\vec{\Psi}^j) + \vec{t}^1(\vec{\Psi}^{j-1})\right]\Big|_{z=h_k} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, \qquad (2.\text{II})$$

$$\vec{\Psi}^{-1} = 0.$$

Задача для $\vec{\Psi}^0$ (и, аналогично, для $\vec{\Psi}^1, \vec{\Psi}^2, \dots$) распадается на скалярную для поляризации SH и векторную для поляризации $P-SV$.

3. Волны Рэлея

Нулевой член. В случае (I.I7) для каждой точки (τ, α) свободной поверхности возникает векторная задача Штурма-Лиувилля

$$\left.\begin{aligned} &N_\tau(\vec{\Psi}^0) = N_z(\vec{\Psi}^0) = 0, \quad z > 0, \quad z \neq h_k; \\ &T_\tau(\vec{\Psi}^0) = T_z(\vec{\Psi}^0) = 0, \quad z = 0; \quad |u| + |w| \to 0 \quad z \to \infty, \\ &[\vec{\Psi}^0] = 0, \quad [T_\tau(\vec{\Psi}^0)] = [T_z(\vec{\Psi}^0)] = 0, \quad z = h_k. \end{aligned}\right\} \qquad (3.\text{I})$$

При фиксированных τ и α (3.I) есть задача о плоской рэлеевской волне в среде с параметрами, зависящими только от z . Пусть $1/c^2$ есть ее собственное значение, а u и w - компоненты соответствующей собственной функции; c, u и w зависят от τ и α как от параметров. Характер этой зависимости определяется из условия разрешимости задачи (2.2),(2.7),(2.I0),(2.II) для функций $P-SV$ поляризации (в котором функция V не фигурирует). Оказывается [I,2,3] , что

$$u = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\gamma}}\tilde{u}, \qquad w = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\gamma}}\tilde{w}, \qquad (3.2)$$

где $\tilde{u}$ и $\tilde{w}$ — компоненты локально-плоской волны Рэлея — решения задачи (3.I), нормированные условием

$$\frac{1}{c}\int_0^\infty(\nu|\tilde{u}|^2+\mu|\tilde{w}|^2)dz-i\int_0^\infty(\lambda\tilde{u}^*\mathcal{D}\tilde{w}+\mu\tilde{w}^*\mathcal{D}\tilde{u})dz=\mathrm{Const}, \qquad (3.3)$$

причем Const не зависит от τ и α, $f(\alpha)$ — произвольная гладкая функция, зависящая от источника, $*$ означает комплексное сопряжение.

Отметим, что если функция $\tilde{w}$ вещественная, то $\tilde{u}$ — чисто мнимая.

<u>Задача для примесной компоненты.</u> Из (2.2)-(2.5),(2.7),(2.9), (2.I0),(2.II) следует, что задача для V имеет вид

$$(\mathcal{D}\mu\mathcal{D}+\rho-\frac{\mu}{c^2})V=-\frac{1}{\gamma}\left\{i\left(\mu\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\lambda\right)\frac{u}{c}+\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\lambda\mathcal{D}+\mathcal{D}\mu\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)w\right\}, \qquad (3.4)$$

$$z>0, \qquad (3.5)$$

$$\mathcal{D}V+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}w\Big|_{z=0}=0, \qquad (3.6)$$

$$\left[\mu\left(\mathcal{D}V+\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}w\right)\right]\Big|_{z=h_k}=0,\quad [V]\big|_{z=h_k}=0 \qquad (3.7)$$

$$V\to\infty,\quad z\to\infty.$$

Эта неоднородная задача однозначно разрешима, если $1/c^2$ не является собственным значением соответствующей однородной задачи, (3.I), т.е. если c не совпадает с фазовой скоростью одной из волн Лява. В противном случае анзатц (I.I0)-(I.I4) должен быть модифицирован.

Рассмотрим в качестве примера простейшую задачу, в которой возникает примесная компонента рэлеевской волны(а лявовские волны отсутствуют).

<u>Примесная компонента в случае однородного полупространства.</u> Приведем известное [I5] решение задачи (3.4)-(3.7) для постоянных λ, μ и ρ (условий (3.6) в этом случае нет). Пусть

$$a=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}},\quad b=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \qquad (3.8)$$

— скорости продольной и поперечной объемных волн. Тогда фазовая скорость c волны Рэлея, $c<b<a$, есть корень уравнения

$$4PS=c^2\ell^2, \qquad (3.9)$$

где

$$P=\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\ ,\quad S=\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\ ,\quad l=\left(\frac{1}{b^2}-\frac{2}{c^2}\right). \tag{3.10}$$

С точностью до множителя, не зависящего от z , решение (3.1),(1.21) есть

$$\tilde{u}(\tilde{z})=\frac{i}{c}\left\{-l e^{-P\tilde{z}}-2PS e^{-S\tilde{z}}\right\},\ \tilde{z}=\omega z, \tag{3.11}$$

$$\tilde{w}(\tilde{z})=-P\left\{l e^{-P\tilde{z}}-\frac{2}{c^2}e^{-S\tilde{z}}\right\}. \tag{3.12}$$

Рассмотрим далее случай, когда фронты Рэлеевской волны - окружности (это соответствует источнику, сосредоточенному при малых τ). Из (1.15),(1.16) (3.2) следует, что

$$u=\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\tau}}\tilde{u}(\tilde{z}),\qquad w=\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\tau}}\tilde{w}(\tilde{z}). \tag{3.13}$$

Решение задачи (3.4),(3.5),(3.7) будем искать в виде

$$V=\frac{1}{\tau^{3/2}}f'(\alpha)\tilde{V}(\tilde{z}),\quad f'=\frac{\partial f}{\partial\alpha}. \tag{3.14}$$

Тогда

$$(\mathcal{D}^2-S^2)V=-\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\frac{i}{c}\tilde{u}+\mathcal{D}\tilde{w}\right),\ \tilde{z}>0, \tag{3.15}$$

$$\mathcal{D}\tilde{V}(0)=-\frac{1}{\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}\tilde{w}(0);\ \mathcal{D}=\frac{\partial}{\partial\tilde{z}}=\frac{1}{\omega}\frac{\partial}{\partial z},\ \tilde{V}\xrightarrow[z\to\infty]{}0 \tag{3.16}$$

Поскольку правая часть имеет вид $Const\,exp(-\tilde{z}P)$, решение есть

$$\tilde{V}=\gamma e^{-P\tilde{z}}+\beta e^{-S\tilde{z}},$$

где γ и β - константы. Легко найти, что

$$\beta=2PS$$

откуда $\tilde{V}=\frac{c}{i}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial\alpha}$

Смещение на поверхности, (представляющее наибольший интерес для сейсмологии) имеет вид:

$$\vec{u}\Big|_{z=0}=\check{C}\,\frac{e^{i\omega\left(\frac{\tau}{c}-t\right)}}{\sqrt{\tau}}\left\{\left(i\vec{e}_\tau+d\vec{e}_z\right)f(\alpha)+\frac{c}{\omega\tau}f'(\alpha)\vec{P}_\alpha\right\}\left(1+O\left(\frac{c}{\omega\tau}\right)\right). \tag{3.17}$$

Мы ввели в формулу (3.17) зависимость от времени $exp(-i\omega t)$ и обозначили $\check{d} = c\tilde{w}(0)(i\tilde{u}(0))^{-1} = -\frac{2\rho}{\ell c^2}$, $\check{C} = c(i\tilde{u}(0))^{-1}$.

Заметим, что d вещественно.

Эллипс поляризации, отвечающий формуле (3.17) изображен на рис.1.

Временна́я зависимость смещения в SH компоненте $\vec{e}_\alpha$ отличается знаком по сравнению с функцией, равной интегралу от временной зависимости в P – компоненте $\vec{e}_\tau$. Это обстоятельство отличает рассматриваемый нами дифракционный механизм деполяризации от анизотропии, где частотная зависимость аномальной компоненты (для низших мод) незначительна [5,6]

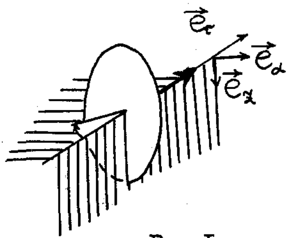

Рис.1.

4. Волны Лява

Нулевой член. Предположение (1.12) об SH -поляризации старшего члена приводит к задаче Штурма-Лиувилля:

$$\begin{aligned} & N_\alpha(\vec{\Psi}^0) = 0, \quad z > 0, \quad z = h_k, \\ & T_\alpha(\vec{\Psi}^0) = 0, \quad z = 0, \\ & [v]\Big|_{z=h_k} = 0, \quad [\vec{T}(\vec{\Psi}^0)]\Big|_{z=h_k} = 0, \\ & v \longrightarrow 0, \quad z \longrightarrow +\infty. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Пусть $1/c^2$ ее собственное значение, а v – соответствующая собственная функция.

Условие разрешимости задачи для v, дает [1,3] :

$$v = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{J}}\tilde{v}, \tag{4.2}$$

Здесь $\tilde{v}$ – вещественное решение (4.1), нормированное условием

$$\frac{1}{c}\int_0^\infty \mu\tilde{v}^2 dz = const, \tag{4.3}$$

где $const$ не зависит от τ и α, а $f(\alpha)$ – произвольная (определяемая источником) гладкая функция.

Задача для примесной компоненты волны Лява, как следует из (2.7)-(2.9) и (4.2), (4.3) такова:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\mathcal{D}\mu\mathcal{D}+\rho-\frac{\nu}{c^2}\right)U+\frac{i}{c}(\lambda\mathcal{D}+\mathcal{D}\mu)W=-\frac{i}{c^2\gamma}\left(\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\mu\right)cv \\ &\left(\mathcal{D}\nu\mathcal{D}+\rho-\frac{\mu}{c^2}\right)W+\frac{i}{c}(\mu\mathcal{D}+\mathcal{D}\lambda)U=-\frac{1}{c\gamma}\left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\mu\mathcal{D}+\mathcal{D}\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)cv \end{aligned}\right\} \quad (4.4)$$

$$z>0\ ,\ z\neq h_k$$

$$\left.\begin{aligned} &\nu\mathcal{D}W+\frac{i}{c}\lambda U+\frac{1}{\gamma c}\lambda\frac{\partial}{\partial\alpha}(c\gamma v)=0 \\ &\mathcal{D}U+\frac{i}{c}W=0\ ,\quad z=0 \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

$$\left[\nu\mathcal{D}W+\frac{i}{c}\lambda U+\frac{1}{c\gamma}\frac{\partial}{\partial\alpha}cv\right]\Big|_{z=h_k}=0\ , \quad (4.6)$$

$$\left[\mu\left(\mathcal{D}U+\frac{i}{c}W\right)\right]\Big|_{z=h_k}=0\ ,\ [U]\Big|_{z=h_k}=[W]\Big|_{z=h_k}=0\ , \quad (4.7)$$

$$[U]+[W]\longrightarrow 0\ ,\quad z\longrightarrow+\infty\ . \quad (4.8)$$

Соответствующая однородная задача есть задача (3.I) для волн Рэлея в нулевом приближении. Поэтому однозначная разрешимость (4.4)-(4.8) имеет место, если c не совпадает с фазовой скоростью одной из рэлеевских мод.

Рассмотрим простейшую слоистую структуру, для которой существует волна Лява.

Примесная компонента в задаче об однородном слое на однородном полупространстве. Положим

$$\lambda,\mu,\nu,\rho;\ a,b\ =\begin{cases}\lambda_1,\mu_1,\nu_1,\rho_1;\ a_1,b_1;\ \ 0<z<h\ , \\ \lambda_2,\mu_2,\nu_2,\rho_2;\ a_2,b_2;\ \ h<z<\infty\ ,\end{cases} \quad (4.9)$$

$\nu=\lambda+2\mu$, и допустим, что выполнено условие

$$b_1<b_2 \quad (4.10)$$

существования лявовской волны. Фазовая скорость ее c $(b_1<c<b_2<a_2)$ есть решение дисперсионного уравнения

$$\mu_1 Q\ \sin QH=\mu_2 q\ \cos qH\ , \quad (4.11)$$

$$Q=\sqrt{\frac{1}{b_1^2}-\frac{1}{c^2}}\quad,\qquad q=\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b_2^2}}\ ,\tag{4.12}$$

$$H=\omega h.\tag{4.13}$$

Плоская волна Лява – не зависящее от (τ,α) решение (4.I) есть [I5] :

$$\tilde{v}(\tilde{z})=\begin{cases}\cos Q\tilde{z}\ , & 0<\tilde{z}<H,\\ \mathcal{L}\,e^{-q\tilde{z}}\ , & H<\tilde{z}<\infty,\end{cases}\tag{4.14}$$

$$\mathcal{L}=e^{qH}\cos QH\ ,\quad \tilde{z}=\omega z,\quad \mathcal{D}=\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\,.\tag{4.15}$$

Рассмотрим в среде (4.9) цилиндрическую волну Лява (ее можно возбудить источником, сосредоточенным при малых τ). Из (I.I6), (I.I8), (4.2) следует, что

$$v=\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\tau}}\ \tilde{v}(\tilde{z}),\tag{4.16}$$

где $f(\alpha)$ – направленность источника по данной моде.

Подстановка

$$U=\frac{f'(\alpha)}{\tau^{3/2}}\,\tilde{U}(\tilde{z})\quad,\quad W=\frac{f(\alpha)}{\tau^{3/2}}\,\tilde{W}(\tilde{z}),\tag{4.17}$$

сводит задачу (4.4)–(4.8) к следующей

$$\left.\begin{aligned}&\left(\mu\mathcal{D}^2+\rho-\frac{\nu}{c^2}\right)\tilde{U}+\frac{i}{c}(\lambda+\mu)\mathcal{D}\tilde{W}=-\frac{i}{c}(\lambda+\mu)\tilde{v}\\&\left(\nu\mathcal{D}^2+\rho-\mu/c^2\right)\tilde{W}+\frac{i}{c}(\lambda+\mu)\mathcal{D}\tilde{U}=-(\lambda+\mu)\tilde{v}\end{aligned}\right],\ \tilde{z}\neq H,\tag{4.18}$$

для $0<\tilde{z}<H,\ H<\tilde{z}<\infty$. Здесь

$$\left.\begin{aligned}&\nu_1\mathcal{D}\tilde{W}+\frac{i}{c}\lambda_1\tilde{U}+\lambda_1\tilde{v}=0\\&\mathcal{D}\tilde{U}+\frac{i}{c}\tilde{W}=0\end{aligned}\right\},\ \tilde{z}=0\ ;\tag{4.19}$$

$$[\tilde{U}]_{\tilde{z}=H}=[\tilde{W}]_{\tilde{z}=H}=0\ \ ;\tag{4.20}$$

$$\nu_1\mathcal{D}\tilde{W}+\lambda_1\left(\frac{i}{c}\tilde{U}+\tilde{v}\right)=\nu_2\mathcal{D}\tilde{W}+\lambda_2\left(\frac{i}{c}\tilde{U}+\tilde{v}\right),\ \tilde{z}=H\ ;\tag{4.21}$$

$$\mu_1\left(\mathcal{D}\tilde{U}+\frac{i}{c}\tilde{W}\right)=\mu_2\left(\mathcal{D}\tilde{U}+\frac{i}{c}\tilde{W}\right),\ \tilde{z}=H\ ,\tag{4.22}$$

$$|\tilde{U}| + |\tilde{W}| \to \infty \ , \quad \tilde{z} \to \infty \ . \qquad (4.23)$$

Задача (4.I7)-(4.23) не содержит параметров $\tau = \tau c^{-1}$ и α.

Оказывается, что если c не совпадает ни с одной из фазовых скоростей волн Рэлея, то задача (4.I8)-(4.23) однозначно разрешима. При этом

$$\tilde{U}(\tilde{z}) = ic\,\tilde{v}(\tilde{z}) \ , \quad \tilde{W}(\tilde{z}) \equiv 0, \ 0 < \tilde{z} < +\infty . \qquad (4.24)$$

То, что (4.24) удовлетворяет уравнению и всем граничным условиям, без труда проверяется с помощью (4.II)-(4.I5).

Поэтому однозначная разрешимость (4.I8)-(4.23) эквивалентна отсутствию нетривиальных решений соответствующей однородной задачи $(\tilde{v} \equiv 0)$, которая в точности совпадает с задачей (3.I) о рэлеевских волнах в нашей среде.

Итак, при сделанном предположении, поле на свободной границе можно, введя зависимость от времени, записать в виде

$$\vec{u} = \frac{e^{i\omega\left(\frac{\tau}{c} - t\right)}}{\sqrt{\tau}} \left\{ f(\alpha)\vec{e}_\alpha + i\frac{c}{\omega\tau} f'(\alpha)\vec{e}_\tau \right\} \left(1 + O\left(\frac{c}{\omega\tau}\right)\right). \qquad (4.25)$$

Колебания, отвечающие формуле (4.25), эллиптическое (тогда как плоские волны Лява в анизотропной среде поляризованы линейно). Эллипс поляризации горизонтален.

Смещение в P - компоненте более низкочастотно и соответствует интегралу от смещения в SH - компоненте.

Формулы (3.2I) и (4.25) можно, в принципе, извлечь и из анализа точных решений задач о сосредоточенных источниках в слоистой среде [I7] . Асимптотическое же изучение роли латеральных неоднородностей и рельефа невозможно в рамках техники точных решений и авторы надеются решить эту задачу методом, предложенным выше.

Литература

I. W o o d h o u s e J.H. Surface waves in laterally varying layered structure.- Geophys.J.Roy.Astron.Soc.,1974,v.37, p.461-490.

2. Б а б и ч В.М., Ч и х а ч е в Б.А., Я н о в с к а я Т.Б. Поверхностные волны в вертикально-неоднородном упругом полупространстве со слабой горизонтальной неоднородностью. - Изв.

АН СССР. Физика Земли, 1976, № 4, с.24-31.
3. Левшин А.Л., Яновская Т.Б., Ландер А.В. и др. Поверхностные сейсмические волны в горизонтально-неоднородной Земле. М.: 1986.
4. Ландер А.В., Левшин А.Л. Азимутально-поляризационные аномалии поверхностных волн и способы их изучения. - В кн.: Развитие идей Г.А.Гамбурцева в геофизике. М., 1982, с.248-260.
5. Crampin S. Distinctive particle motion of surface waves as a diagnostic of anisotropic layering. - Geophys.J.Roy. Astron.Soc., 1975, v.40, p.177-186.
6. Crampin S. A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic media. - Wave Motion, 1981, v.3, p.343-391.
7. Бабич В.М., Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов. - Докл.АН СССР, 1956, т.110, № 3, с.355-357.
8. Киселев А.П. Примесные компоненты упругих волн. - Изв. АН СССР. Физика Земли, 1983, № 9, с.51-61.
9. Гаврилов А.В., Киселев А.П. Влияние неоднородности среды и направленности источника на поляризацию упругих Р-волн. - Изв.АН СССР. Физика Земли, 1986, № 6, с.84-87.
10. Киселев А.П., Цванкин И.Д. О сопоставлении численных и асимптотических расчетов упругих волновых полей. - Докл.АН СССР, 1987.
11. Алексеев А.С., Михайленко Б.Г. "Нелучевые эффекты" в теории распространения сейсмических волн. - Докл. АН СССР, 1982, т.267, № 5, с.1079-1083.
12. Бабич В.М., Чихачев Б.А. Распространение волн Лява и Рэлея в слабонеоднородной слоистой среде. - Вестн.ЛГУ, 1975, № 1, с.32-38.
13. Кирпичникова Н.Я. О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной формы. Тр.Мат.ин-та АН СССР, 1974, т.115, с.114-129.
14. Крауклис П.В., Цепелев Н.В. Приповерхностные волны в неоднородной среде с гладкой границей. - Изв.АН СССР. Физика Земли, 1973, № 6, с.3-11.
15. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М., 1973.
16. Киселев А.П. Дифракционная деполяризация. - Журн.Техн. Физики, 1987, т.56, № 6, с.1184-1185.
17. Левшин А.Л. Поверхностные и каналовые сейсмические волны. М., 1973.