Б. М. Гуревич, Построение возрастающих разбиений для специальных потоков,
Теория вероятн. и ее примен., 1965, том 10, выпуск 4, 693–712

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ
Том X 1965 *Выпуск 4*

ПОСТРОЕНИЕ ВОЗРАСТАЮЩИХ РАЗБИЕНИЙ ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНЫХ ПОТОКОВ

Б. М. ГУРЕВИЧ

Изучение измеримых разбиений, возрастающих под действием данной динамической системы, как известно, дает весьма существенную информацию об этой системе. Само существование возрастающих разбиений влечет за собой наличие в спектре системы счетнократной лебеговской компоненты (см. [9], [12]). Всякая динамическая система с дискретным временем (автоморфизм), имеющая положительную энтропию, обладает возрастающими разбиениями. Однако для систем с непрерывным временем (потоков) подобная теорема не доказана. Изучение потоков наталкивается на новые по сравнению с автоморфизмами трудности. Преодолеть их в ряде случаев помогает теорема о специальном представлении измеримого потока, утверждающая, в частности, что всякий апериодический измеримый поток изоморфен некоторому специальному потоку. Впервые специальные потоки появились в работе Дж. Неймана [4] как обобщение известного понятия «секущей поверхности» Пуанкаре, а упомянутая теорема о специальном представлении измеримого потока была доказана Амброзом и Какутани [2].

В настоящей работе строятся возрастающие и, в частности, совершенные разбиения для специальных потоков, удовлетворяющих некоторым общим условиям, и тем самым на эти потоки переносится теория, созданная В. А. Рохлиным и Я. Г. Синаем [10] для автоморфизмов. Не исключено, что всякий апериодический поток имеет специальное представление, удовлетворяющее таким условиям.

Автор благодарит Я. Г. Синая, под руководством которого выполнена эта работа, а также Л. М. Абрамова, указавшего на ряд неточностей в рукописи.

§ 1. Необходимые сведения из эргодической теории. Основные обозначения

1. Измеримые разбиения. Мы будем пользоваться теорией измеримых разбиений пространств Лебега, изложенной в работе В. А. Рохлина [8]. Пусть $\mathscr{B}$ есть σ-алгебра измеримых подмножеств пространства Лебега X. С каждым измеримым разбиением ζ пространства X можно связать некоторую подалгебру $\mathscr{B}(\zeta) \subset \mathscr{B}$. Именно, множество $B \subset X$ принадлежит $\mathscr{B}(\zeta)$ в том и только в том случае, когда оно отличается на множество меры 0 от некоторого B', составленного из элементов разбиения ζ. Будем считать два измеримых разбиения равными, если они совпадают на множестве полной меры. При этом описанное только что соответствие между классами равных измеримых разбиений и подалгебрами σ-алгебры $\mathcal{B}$ является взаимно однозначным.

Если ζ — измеримое разбиение пространства X и $f(x)$, $x \in X$,— интегрируемая функция, то для почти всех элементов C_ζ разбиения ζ существует интеграл $\int\limits_{C_\zeta} f(x)\, d\mu(\cdot|C_\zeta)$, где $\mu(\cdot|C_\zeta)$ — условная мера на элементе C_ζ. Функция $\mathrm{M}(f|C_\zeta)$, равная $\int\limits_{C_\zeta} f(x)\, d\mu(\cdot|C_\zeta)$ на C_ζ, измерима относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(\zeta)$. В теории вероятностей эту функцию называют условным математическим ожиданием случайной величины f относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(\zeta)$.

2. Энтропия. Пусть ξ — измеримое разбиение и $C_\xi^1, C_\xi^2, \ldots$ — все его элементы, имеющие положительную меру. Энтропия $H(\xi)$ разбиения ξ определяется равенством

$$H(\xi) = \begin{cases} -\sum\limits_k \mu(C_\xi^k) \log_2 \mu(C_\xi^k), & \text{если } \mu(\bigcup\limits_k C_\xi^k) = 1, \\ +\infty, & \text{если } \mu(\bigcup\limits_k C_\xi^k) < 1. \end{cases}$$

Если η — другое измеримое разбиение, то ξ индуцирует на почти каждом элементе C_η некоторое измеримое разбиение $\xi|C_\eta$. Энтропия $H(\xi|C_\eta)$ этого разбиения есть функция, измеримая относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(\eta)$. Число

$$H(\xi|\eta) = \int\limits_X H(\xi|C_\eta)\, d\mu$$

называется средней условной энтропией разбиения ξ относительно разбиения η. Совокупность разбиений ξ, для которых $H(\xi) < \infty$, обозначается Z.

Пусть T — автоморфизм пространства Лебега X и ξ — измеримое разбиение. Введем обозначения (ср. [10]):

$$\xi_T^- = \prod_{k=1}^{\infty} T^{-k}\xi,\ \xi_T = \prod_{k=-\infty}^{\infty} T^k\xi,\quad h(T, \xi) = H(\xi|\xi_T^-),\ h(T) = \sup_{\xi \in Z} h(T, \xi).$$

Легко видеть, что $\xi_T^- = \xi_T$ при $h(T, \xi) = 0$. Число $h(T)$ называется энтропией автоморфизма T. Если T — сдвиг в пространстве траекторий стационарного случайного процесса $\{x_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, а ξ — разбиение, порожденное случайной величиной x_0, то ξ_T^- — разбиение, порожденное «прошлым» процесса, а ξ_T — разбиение на отдельные траектории.

3. Возрастающие и совершенные разбиения. Теория Рохлина — Синая. Для всякого автоморфизма T, как показал М. С. Пинскер [5], существует такое измеримое разбиение $\pi(T)$, что для $\xi \in Z$ условие $\xi \leqslant \pi(T)$ эквивалентно равенству $h(T, \xi) = 0$.

Измеримое разбиение ζ называется возрастающим относительно автоморфизма T, если $T\zeta > \zeta$, и называется совершенным (ср. [13]), если * 1 ($T\zeta \geqslant \zeta$; 2) $\prod\limits_n T^n\zeta = \varepsilon$; 3) $\bigcap\limits_n T^n\zeta = \pi(T)$; 4) $H(T\zeta|\zeta) = h(T)$.

* Буквой ε обозначается разбиение на отдельные точки.

По теореме Рохлина — Синая [10], всякий автоморфизм обладает совершенными разбиениями. Находить такие разбиения помогает другой результат работы [10]: если измеримое разбиение ζ обладает свойствами 1), 2), то $\bigcap_n T^n\zeta \geqslant \pi(T)$; если $h(T) < \infty$ и ζ обладает свойствами 1), 4), то $\bigcap_n T^n\zeta \leqslant \pi(T)$. Таким образом, если $h(T) < \infty$, то всякое разбиение ζ со свойствами 1), 2), 4) является совершенным. Понятия возрастающего и совершенного разбиения легко переносятся на случай непрерывного времени (см. следующий пункт).

4. Потоки. Измеримое разбиение ζ называется возрастающим относительно измеримого потока $\{S_t\}$, если $S_t\zeta > \zeta$ при всех $t > 0$. Легко доказать, что соответствующее автоморфизму S_t разбиение $\pi(S_t)$ не зависит от t при $t \neq 0$ (ср. [11]). Обозначим это разбиение $\pi(\{S_t\})$. Назовем измеримое разбиение ζ совершенным относительно потока $\{S_t\}$, если 1) $S_t\zeta \geqslant \zeta$ при $t \geqslant 0$, 2) $\prod_t S_t\zeta = \varepsilon$, 3) $\bigcap_t S_t\zeta = \pi(\{S_t\})$, 4) $H(S_t\zeta \mid \zeta) = h(S_t)$. Заметим, что по формуле Л. М. Абрамова [1]

$$h(S_t) = |t|\, h(S_1) \tag{1.1}$$

при любом t.

Определим теперь специальный поток (ср. [6], [7]), порожденный автоморфизмом T пространства Лебега X с мерой μ и функцией $f(x)$, $x \in X$. Предполагается, что функция $f(x)$ интегрируема и ограничена снизу положительной константой. Пространство $\widetilde{X}$, в котором действует специальный поток $\{S_t\} = (T, f)$, состоит из тех точек (x, u) прямого произведения $X \times (u)$ пространства X на числовую прямую (u) с обычной мерой Лебега, для которых $0 \leqslant u < f(x)$. Множество $\widetilde{X}$ превратится в пространство Лебега, если меру, индуцированную в нем прямым произведением, поделить на число $\int_X f(x)\, d\mu$. По определению, при $t < \inf_{x\in X} f(x)$

$$S_t(x, u) = \begin{cases} (x,\ u+t), & \text{если } t < f(x) - u, \\ (Tx,\ t+u-f(x)), & \text{если } t \geqslant f(x) - u. \end{cases}$$

Для остальных t автоморфизм S_t определим, исходя из того, что $\{S_t\}$ — однопараметрическая группа преобразований. Для автоморфизмов, входящих в специальный поток $\{S_t\} = (T, f)$, справедлива формула (см. [1], [7])

$$h(S_t) = |t|\, h(T) \left[\int_X f(x)\, d\mu\right]^{-1}. \tag{1.2}$$

§ 2. Один признак изоморфизма специальных потоков

Определение 1. Поток $\{S_t\}$, действующий в пространстве Лебега $\widetilde{X}$, называется изоморфным (см. [7]) потоку $\{S_t'\}$, действующему в пространстве Лебега $\widetilde{X}'$, если существует такое изоморфное отображение Φ пространства $\widetilde{X}$ на пространство $\widetilde{X}'$, что при любом t

$$\Phi S_t \Phi^{-1} = S_t'.$$

Определение 2. Измеримые функции $f(x)$ и $g(x)$, $x \in X$, назовем гомологичными относительно автоморфизма T пространства X, если существует такая измеримая функция $\varphi(x)$, что для почти всех $x \in X$

$$g(x) - f(x) = \varphi(Tx) - \varphi(x). \tag{2.1}$$

Теорема 1. *Если специальные потоки $\{S_t\} = (T, f)$, $\{S_t'\} = (T, g)$ порождены одним и тем же автоморфизмом T и гомологичными относительно T функциями $f(x)$ и $g(x)$, то они изоморфны* *.

Доказательство. Возьмем два экземпляра пространства X, сохраним за первым обозначение X, а второй обозначим X'. Для любой точки $x \in X$ будем понимать под x' второй экземпляр этой точки, принадлежащий пространству X'. Перенесенный в X' автоморфизм T обозначим T'.

Пусть поток $\{S_t\} = (T, f)$ действует в пространстве $\widetilde{X}$ с мерой $\widetilde{\mu}$, а поток $\{S_t'\} = (T', g)$ — в пространстве $\widetilde{X}'$ с мерой $\widetilde{\mu}'$. Условие гомологичности функций f и g можно записать в виде

$$g(x') = f(x) + \varphi(Tx) - \varphi(x), \tag{2.2}$$

где $x' \in X'$ — второй экземпляр точки $x \in X$. Из равенства (2.2) следует, что

$$\int\limits_{X'} g(x')\, d\mu' = \int\limits_{X} f(x)\, d\mu. \tag{2.3}$$

Это очевидно, если $\varphi(x)$ — интегрируемая функция. Для произвольной измеримой $\varphi(x)$ из (2.2), во всяком случае, вытекает, что функция

$$\psi(x) = \varphi(Tx) - \varphi(x)$$

интегрируема, и нужно показать, что

$$\int\limits_X \psi(x)\, d\mu = 0.$$

При любом натуральном n

$$\frac{1}{n+1}[\psi(x) + \psi(Tx) + \ldots + \psi(T^n x)] = \frac{1}{n+1}[\varphi(T^{n+1}x) - \varphi(x)].$$

По эргодической теореме, левая часть этого равенства при $n \to \infty$ сходится почти всюду к некоторой интегрируемой функции $\bar{\psi}(x)$. Правая же часть может сходиться только к нулю. В самом деле, рассмотрим при любом целом $r > 0$ множество $L_r = \{x : |\varphi(x)| < r\}$. Так как $L_r \subseteq L_{r+1}$ и $\bigcup\limits_{r=1}^{\infty} L_r = X$, то для почти каждой точки $x \in X$ найдется такое r, что включение $T^{n+1}x \in L_r$ выполняется при бесконечно многих n. Значит $\varphi(T^{n+1}x)/(n+1) \to 0$ по некоторой подпоследовательности $\{n_k\}$, зависящей от x. Этим доказано, что почти всюду $\bar{\psi}(x) = 0$. Остается заметить, что по эргодической теореме

$$\int\limits_X \bar{\psi}(x)\, d\mu = \int\limits_X \psi(x)\, d\mu.$$

* Эта теорема близка к результатам М. И. Грабаря [3] относительно замены времени в динамических системах.

Перейдем к доказательству изоморфизма $\{S_t\}$ и $\{S'_t\}$. Для этого определим на пространстве $\widetilde{X}$ функцию Φ со значениями в $\widetilde{X}'$ равенством

$$\Phi(x, u) = S'_{u-\varphi(x)}(x', 0). \tag{2.4}$$

При $u < \min(\inf_{x\in X} f(x), \inf_{x\in X} g(x))$ из равенства (2.4) следует, что

$$\Phi(x, u) = S'_{-\varphi(x)}(x', u). \tag{2.5}$$

Легко проверяется, что Φ — взаимно однозначное отображение $\widetilde{X}$ на $\widetilde{X}'$, причем отображение Φ^{-1}, обратное к Φ, задается формулой

$$\Phi^{-1}(x', u) = S_{u+\varphi(x)}(x, 0).$$

Кроме того, при всяком t

$$S'_t\Phi = \Phi S_t. \tag{2.6}$$

Осталось проверить, что отображение Φ сохраняет измеримость и переводит меру $\widetilde{\mu}$ в меру $\widetilde{\mu}'$.

Пусть A — какое-нибудь измеримое множество в пространстве X, $\Delta = [a, b)$ — интервал на положительной полуоси. Тогда

$$\widetilde{A} = \{(x, u) : x \in A, u \in \Delta, u < f(x)\} \tag{2.7}$$

есть измеримое множество в пространстве $\widetilde{X}$. Покажем, что $\Phi\widetilde{A}$ — измеримое множество в $\widetilde{X}'$ и

$$\widetilde{\mu}'(\Phi\widetilde{A}) = \widetilde{\mu}(\widetilde{A}).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi(x)$ сохраняет знак на множестве A. Действительно, если это не так, то, представив A в виде суммы непересекающихся множеств A_1 и A_2, на каждом из которых $\varphi(x)$ сохраняет знак, можно провести доказательство отдельно для $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$. Согласно равенству (2.6), $\Phi\widetilde{A} = S'_a\Phi S_{-a}\widetilde{A}$. Поэтому наше утверждение достаточно доказать для множества

$$\widetilde{B} = S_{-a}\widetilde{A} = \{(x, u) : x \in A, 0 \leqslant u < m(x)\},$$

где $m(x) = -a + \min(b, f(x))$. Возьмем $b - a < \min(\inf_{x\in X} f(x), \inf_{x\in X} g(x))$. Тогда для любой точки $(x, u) \in \widetilde{B}$ выполняется равенство (2.5). Предположим для определенности, что $\varphi(x) \leqslant 0$ при $x \in A$ (случай $\varphi(x) > 0$ исследуется аналогично). Объединив при каждом $n > 0$ все точки $(x, u) \in \widetilde{B}$, которые под действием автоморфизма $S_{-\varphi(x)}$ совершают n скачков, мы получим разбиение множества $\widetilde{B}$ на измеримые подмножества вида

$$\widetilde{B}_n = \widetilde{B} \cap \left\{(x, u): -\varphi(x) + \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) \leqslant u < -\varphi(x) + \sum_{i=0}^{n} g(T^i x)\right\}, n = 1, 2, \ldots .$$

Сопоставим каждой точке $x_0 \in X$ множество $l(x_0) \subset \widetilde{X}$, состоящее из всех точек $(x, u) \in \widetilde{X}$ с $x = x_0$. Множества вида $l(x_0)$ при всех $a_0 \in X$ образуют некоторое разбиение ξ пространства $\widetilde{X}$. Положим

$$B_n = \{x_0 : \widetilde{\mu}(\widetilde{B}_n \mid l(x_0)) > 0\}.$$

Множество B_n измеримо вследствие измеримости разбиения ξ. Введем обозначения:

$$k(x) = \max\left(0, \sum_{i=0}^{n-1} g(T^i x) - \varphi(x)\right),$$

$$K(x) = \min\left(m(x), \sum_{i=0}^{n} g(T^i x) - \varphi(x)\right).$$

Нетрудно проверить, что

$$\widetilde{B}_n = \{(x, u) : x \in B_n,\ k(x) \leqslant u < K(x)\},$$

$$\Phi\widetilde{B}_n = \Big\{(x', u') : x \in T^n B_n,\ \varphi(T^{-n}x) + k(T^{-n}x) -$$

$$- \sum_{i=0}^{n-1} g(T^{i-n}x) \leqslant u' < \varphi(T^{-n}x) + K(T^{-n}x) - \sum_{i=0}^{n-1} g(T^{i-n}x)\Big\}.$$

Из определения следует, что множество $\Phi\widetilde{B}_n$ измеримо в $\widetilde{X}'$ и

$$\mu'(\Phi\widetilde{B}_n) = \left[\int_X g(x)\,d\mu\right]^{-1} \int_{T^n B_n} [K(T^{-n}x) - k(T^{-n}x)]\,d\mu =$$

$$= \left[\int_X f(x)\,d\mu\right]^{-1} \int_{B_n} [K(x) - k(x)]\,d\mu = \widetilde{\mu}(\widetilde{B}_n).$$

Значит, множество $\Phi\widetilde{B} = \bigcup_n \Phi\widetilde{B}_n$ также измеримо и $\mu'(\Phi\widetilde{B}) = \widetilde{\mu}(\widetilde{B})$.

Теперь заметим, что совокупность Λ измеримых множеств $D \subset \widetilde{X}$, для которых ΦD измеримо и $\mu'(\Phi D) = \widetilde{\mu}(D)$, является σ-алгеброй. По доказанному, в эту σ-алгебру входит любое множество $\widetilde{A}$ вида (2.7) с достаточно малым Δ. Но совокупность таких множеств порождает σ-алгебру $\mathscr{B}$ всех измеримых множеств в пространстве $\widetilde{X}$. Следовательно, $\Lambda = \mathscr{B}$.

Таким образом, отображение Φ переводит всякое измеримое множество $D \subset \widetilde{X}$ в измеримое множество $\Phi D \subset \widetilde{X}'$, причем $\widetilde{\mu}'(\Phi D) = \widetilde{\mu}(D)$. Аналогичное утверждение, очевидно, можно доказать и для отображения Φ^{-1}. Тем самым теорема 1 доказана.

Эта теорема будет использована в следующем параграфе.

§ 3. Основная теорема. Достаточные условия существования совершенных и возрастающих разбиений

Теорема 2. *Если для специального потока* $\{S_t\} = (T, f)$, $f = f(x)$, $x \in X$, *найдутся измеримое разбиение* ζ *пространства* X *и последовательность положительных чисел* $\{\alpha_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, *такие, что*

1) $T\zeta \geqslant \zeta$,

2) $H(T\zeta \mid \zeta) < \infty$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \mu\{x : |f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^n\zeta}(x))| > \alpha_n\} < \infty$ *,

то поток $\{S_t\}$ *имеет другое специальное представление* (T, g) *с тем же автоморфизмом* T *и новой функцией* $g(x)$, *для которого существует изме-*

* $C_{T^n\zeta}(x)$ — элемент разбиения $T^n\zeta$, содержащий точку x.

римое разбиение ζ' пространства X с такими свойствами:

а) $\zeta' \geqslant \zeta$;

б) $T\zeta' \geqslant \zeta'$;

в) $H(T\zeta' \mid \zeta') \geqslant H(T\zeta \mid \zeta)$;

г) *функция* $g(x)$ *измерима относительно* σ-*алгебры* $\mathcal{B}(\zeta')$.

Замечание 1. Если некоторое измеримое разбиение ζ обладает свойствами $T\zeta > \zeta$, $\prod\limits_n T^n\zeta = \varepsilon$, то для любой интегрируемой функции $f(x)$

$$f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^n\zeta}(x)) \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{3.1}$$

по мере, и свойство 3) в этом случае означает, что сходимость в (3.1) достаточно быстрая.

Замечание 2. Пусть T — «преобразование пекаря» (см. [14], стр. 19), т. е. автоморфизм квадрата $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, заданный формулой

$$Tx = T(y, z) = \begin{cases} \left(2y, \frac{1}{2} z\right), & \text{если } y \leqslant \frac{1}{2}, \\ \left(2y - 1, \frac{1}{2} z + \frac{1}{2}\right), & \text{если } y > \frac{1}{2}, \end{cases}$$

и ζ — разбиение квадрата на единичные отрезки $y = \text{const}$. Тогда $T^n\zeta$ есть разбиение квадрата на отрезки длины 2^{-n} и свойство 3) накладывает на функцию $f(x) = f(y, z)$ некоторое требование гладкости по переменному z при фиксированном y. Такому требованию удовлетворяют, в частности, функции, подчиняющиеся при фиксированном y условию Гёльдера по z.

Замечание 3. Положим

$$\rho_n(f, \zeta) = \int\limits_X |f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^n\zeta}(x))| \, d\mu$$

и для функции $f(x)$, принадлежащей L^2_μ, —

$$d_n(f, \zeta) = \int\limits_X [f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^n\zeta}(x))]^2 \, d\mu.$$

Число $\rho_n(f, \zeta)$ есть расстояние в L^1_μ от функции $f(x)$ до подпространства функций, измеримых относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(T^n\zeta)$, а d_n — квадрат аналогичного расстояния в L^2_μ. Естественно также называть $d_n(f, \zeta)$ средней условной дисперсией случайной величины f относительно σ-алгебры $\mathcal{B}(T^n\zeta)$.

В силу неравенства Чебышева, условие 3) (см. формулировку теоремы 2) является следствием каждого из двух условий:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\alpha_n} \rho_n(f, \zeta) < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{\alpha_n^2} d_n(f, \zeta) < \infty.$$

Прежде чем доказывать теорему 2, выведем из нее такое

Следствие. *Если в условиях теоремы 2 разбиение ζ является совершенным для автоморфизма T, то поток $\{S_t\}$ обладает совершенным разбиением.*

Действительно, из а), б) и в) вытекает, что при указанных условиях разбиение ζ' также является совершенным для T. Возьмем специальное представление (T, g) и, учитывая свойство г) разбиения ζ', рассмотрим в пространстве $\widetilde{X}$, где действует поток $\{S_t\} = (T, g)$, разбиение $\widetilde{\zeta}'$, полученное из ζ' следующим образом (ср. [12]): точки $\widetilde{x}_1 = (x_1, u_1) \in \widetilde{X}$, $\widetilde{x}_2 = (x_2, u_2) \in \widetilde{X}$ принадлежат одному элементу разбиения $\widetilde{\zeta}'$ в том и только том случае, когда точки $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ принадлежат одному элементу разбиения ζ' и $u_1 = u_2$. Нетрудно проверить, что разбиение $\widetilde{\zeta}'$ измеримо, возрастает под действием потока $\{S_t\}$ и при любом положительном $t < \inf\limits_{x \in X} g(x)$ удовлетворяет соотношению

$$H(S_t\widetilde{\zeta}' \mid \widetilde{\zeta}') = tH(T\zeta' \mid \zeta')\left[\int\limits_X g(x)\,d\mu\right]^{-1} = th(T)\left[\int\limits_X g(x)\,d\mu\right]^{-1}.$$

Это значит, в силу равенства (1.2), что при малых положительных t

$$\widetilde{H}(S_t\widetilde{\zeta}' \mid \zeta') = h(S_t). \tag{3.2}$$

Пользуясь формулой Абрамова (1.1), легко теперь распространить равенство (3.2) на все $t > 0$. Мы покажем, что разбиение $\widetilde{\zeta}'$ является совершенным для потока $\{S_t\}$. Свойства 1) и 4) (см. § 1) уже проверены, равенство $\prod\limits_t S_t\widetilde{\zeta}' = \varepsilon$ сразу вытекает из аналогичного свойства разбиения ζ'. Осталось доказать, что

$$\bigcap_t S_t\widetilde{\zeta}' = \pi(\{S_t\}). \tag{3.3}$$

Для любого положительного τ

$$\prod_n S_\tau^n\widetilde{\zeta}' = \varepsilon,$$

и так как $H(S_\tau\widetilde{\zeta}' \mid \widetilde{\zeta}') = h(S_\tau)$, то по теореме Рохлина — Синая [10] (см. § 1)

$$\bigcap_n S_\tau^n\widetilde{\zeta}' = \pi(S_\tau) = \pi(\{S_t\}).$$

Но при всяком τ

$$\bigcap_n S_\tau^n\widetilde{\zeta}' = \bigcap_t S_t\widetilde{\zeta}'.$$

Доказательство теоремы 2 разобьем на несколько пунктов.

1. **Лемма 1.** *Пусть $\{a_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$ — последовательность неотрицательных чисел и $r_n = \sum\limits_{i=n}^{\infty} a_i$. Тогда*

1) *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^k a_n < \infty$ при некотором натуральном k, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{k-1} r_n < \infty$;*

2) *если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n < \infty$, то $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \log_2 a_n < \infty$ (предполагается, что $0 \log 0 = 0$).*

Доказательство весьма просто, и мы его опускаем.

Лемма 2. *Пусть $\{U_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ — последовательность измеримых подмножеств пространства X, η_n — разбиение пространства X*

на два множества: U_n *и* $U_n' = X \setminus U_n$, *причем выполнено условие*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mu(U_n) < \infty. \tag{3.4}$$

Тогда разбиение $\eta = \prod_{n=0}^{\infty} \eta_n$ *не более чем счетно.*

Доказательство. По лемме Бореля — Кантелли почти каждая точка $x \in X$ принадлежит лишь конечному числу множеств U_n. Сопоставим каждой точке $x \in X$ последовательность множеств $\{E_n, n = 0, 1, 2, \ldots\}$, где $E_n = U_n$, если $x \in U_n$ и $E_n = U_n'$, если $x \in U_n'$. Тогда последовательности, отвечающие почти всем точкам $x \in X$, содержат лишь конечное число множеств U_n. Но различных последовательностей такого вида существует лишь счетное число. Для окончания доказательства остается заметить, что точки $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ принадлежат одному элементу разбиения η в том и только том случае, когда описанные последовательности у них совпадают; иными словами, элемент разбиения η определяется последовательностью множеств $E_0, E_1, \ldots$, где $E_n = U_n$ или U_n'. Лемма доказана.

2. Вернемся к пространству $\widetilde{X}$, где действует специальный поток $\{S_t\}$. Обозначим β разбиение пространства $\widetilde{X}$ на множества, каждое из которых состоит из всех точек $(x, u) \in \widetilde{X}$ с одним и тем же u.

Пусть $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ — любые две точки пространства $\widetilde{X}$. Назовем временны́м расстоянием между ними число

$$\rho(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \min(\min\{|t| : S_t\tilde{x}_1 \in C_\beta(\tilde{x}_2)\}, \min\{|t| : S_t\tilde{x}_2 \in C_\beta(\tilde{x}_1)\}).$$

Пункты 2—7 посвящены доказательству основной леммы 3, из которой затем (п. п. 8—11) выводится утверждение теоремы 2.

Лемма 3. *В условиях теоремы* 2 *существуют измеримое разбиение* ζ' *пространства* X *и измеримое множество* $N \in \mathcal{B}(\zeta')$, $\mu(N) = 1$, *с такими свойствами:*

1) $\zeta' \geqslant \zeta$;

2) $T\zeta' \geqslant \zeta'$;

3) $H(T\zeta' \mid \zeta') \geqslant H(T\zeta \mid \zeta)$;

4) *если* $x_1, x_2 \in N$, x_1, x_2 *принадлежат одному и тому же элементу разбиения* ζ' *и* $\tilde{x}_1 = (x_1, u) \in \widetilde{X}$, $\tilde{x}_2 = (x_2, u) \in \widetilde{X}$, *то при всяком* $t \geqslant 0$

$$\rho(S_t\tilde{x}_1, S_t\tilde{x}_2) < \frac{1}{32} \inf_{x \in X} f(x);$$

5) *для любого элемента* $C_{\zeta'} \subset N$ *и любого положительного числа* δ *найдется такое* $n > 0$, *что если* $x_1, x_2 \in C_{\zeta'}$ *и* $\tilde{x}_1^n = (T^n x_1, u) \in \widetilde{X}$, $\tilde{x}_2^n = (T^n_{x_2}, u) \in \widetilde{X}$, *то при всяком* $t \geqslant 0$

$$\rho(S_t\tilde{x}_1^n, S_t\tilde{x}_2^n) < \delta. \tag{3.5}$$

Доказательство. Введем обозначения:

$$A_n = \{x : |f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^n\zeta}(x))| > \alpha_n\}, \qquad A_n' = X \setminus A_n,$$

$$\overline{A}_n = \bigcap_{i=n}^{\infty} T^{-i} A_i', \qquad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Множество $\bar{A}_n$ состоит, очевидно, из всех точек $x \in X$, для которых $|f(T^k x) - \mathrm{M}(f \mid C_{T^k\zeta}(T^k x))| < \alpha_k$ при любом $k \geqslant n$.

По условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \mu(A_n) < \infty. \tag{3.6}$$

Покажем, что

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n\right) = 1. \tag{3.7}$$

При всяком $n \geqslant 0$

$$\mu(A'_n) \geqslant \mu(\bar{A}_n) \geqslant \mu(A'_n) - \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i). \tag{3.8}$$

Левое неравенство очевидно. Чтобы проверить правое, положим

$$A_n^k = \bigcap_{i=n}^{n+k} T^{-i} A'_i$$

и оценим $\mu(A_n^k)$ с помощью индукции по k. Так как

$$\mu(A_n^1) = \mu(T^{-n} A'_n \cap T^{-n-1} A'_{n+1}) = \mu(A'_n) + \mu(A'_{n+1}) - \mu(A'_n \cup T^{-1} A'_{n+1}) =$$
$$= \mu(A'_n) + 1 - \mu(A_{n+1}) - \mu(A'_n \cup T^{-1} A'_{n+1}) \geqslant \mu(A'_n) - \mu(A_{n+1}),$$

то при $k = 1$ выполняется неравенство

$$\mu(A_n^k) \geqslant \mu(A'_n) - \sum_{i=n+1}^{n+k} \mu(A_i). \tag{3.9}$$

Если же (3.9) справедливо для некоторого $k \geqslant 1$, то

$$\mu(A_n^{k+1}) = \mu(A_n^k \cap T^{-n-k-1} A'_{n+k+1}) = \mu(A_n^k) + 1 - \mu(A_{n+k+1}) -$$
$$- \mu(A_n^k \cup T^{-n-k-1} A_{n+k+1}) \geqslant \mu(A'_n) - \sum_{i=n+1}^{n+k+1} \mu(A_i),$$

т. е. (3.9) верно и для $k + 1$. Переходя в неравенстве (3.9) к пределу при $k \to \infty$ (это законно, так как $A_n^k \subset A_n^{k-1}$ и $\bar{A}_n = \bigcap_{k=0}^{\infty} A_n^k$), получаем неравенство (3.8). Устремим в этом неравенстве n к бесконечности и заметим, что по условию теоремы 2

$$\mu(A'_n) \to 1, \qquad \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i) \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Поэтому $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n\right) = 1$, т. е. равенство (3.7) доказано.

3. Положим $D_n = \bar{A}_{n+1} \setminus \bar{A}_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Из определения видно, что $\bar{A}_n \subset \bar{A}_{n+1}$. Вместе с равенством (3.7) это означает, что множества D_n, $n = 1, 2, \ldots$, образуют разбиение пространства X. Оценим $\mu(D_n)$, пользуясь неравенствами (3.8):

$$\mu(D_n) = \mu(\bar{A}_{n+1}) - \mu(\bar{A}_n) \leqslant \mu(A'_{n+1}) - \mu(A'_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i) =$$
$$= 1 - \mu(A_{n+1}) - 1 + \mu(A_n) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \mu(A_i) \leqslant \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i). \tag{3.10}$$

Рассмотрим множество

$$U_n = \bigcup_{i=0}^{n} T^i D_n.$$

Из определения U_n и D_n следует, что для всякой точки $x \in U_n$ найдется такое $i \leqslant n$, что при всех $k > n - i$

$$|f(T^k x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^{k+i}\zeta}(T^k x))| \leqslant \alpha_{k+i}. \tag{3.11}$$

Так как $D_n \subset U_n$ и $\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} D_n\right) = 1$, то и

$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} U_n\right) = 1. \tag{3.12}$$

В силу (3.10),

$$\mu(U_n) \leqslant (n+1)\,\mu(D_n) \leqslant (n+1) \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i). \tag{3.13}$$

Положив в пункте 1 леммы 1 $a_n = \mu(A_n)$, $k = 2$, получим из (3.6) и (3.10) неравенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) < \infty.$$

4. По лемме Бореля — Кантелли, для почти каждой точки $x \in X$ найдется такой номер n, что $x \in U_n$ и $x \notin U_i$ при $i > n$. Множество всех точек $x \in X$, которым отвечает данный номер n, обозначим через F_n, а разбиение пространства X на множества F_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$,— через η.

Положим $\lambda = \frac{1}{128} \inf_{x \in X} f(x)$ и определим в пространстве X разбиение γ_n, элементами которого служат множества

$$\Gamma_n^k = \left\{x : \frac{k\lambda}{n+1} \leqslant f(x) - [f(x)] < \frac{(k+1)\lambda}{n+1}\right\}; \qquad n = 0, 1, 2, \ldots;$$
$$k = 0, 1, \ldots, n,$$

где $[\cdot]$ — целая часть.

Пусть η_1 — разбиение пространства X, совпадающее на множестве F_n с разбиением γ_n. Наша ближайшая цель — показать, что

$$H(\eta_1) < \infty. \tag{3.14}$$

Так как $\eta_1 \geqslant \eta$, то

$$H(\eta_1) = H(\eta\eta_1) = H(\eta) + H(\eta_1 \mid \eta). \tag{3.15}$$

Проверим конечность обоих слагаемых в правой части равенства (3.15). Заметим сначала, что η_1 разбивает множество F_n на части, число которых не превосходит $n + 1$. Поэтому, пользуясь включением $F_n \subset U_n$ и неравенством (3.13), можно написать:

$$H(\eta_1 \mid \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) H(\eta_1 \mid F_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \log_2(n+1) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n) \log_2(n+1) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\mu(U_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) r_n, \tag{3.16}$$

где $r_n = \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i)$. Из неравенства (3.6) и п. 1) леммы 1 вытекает, что ряд, стоящий в правой части (3.16), сходится и, значит, $H(\eta_1 | \eta) < \infty$.

Положим

$$b_n = (n+1) \sum_{i=n}^{\infty} \mu(A_i) = (n+1) r_n.$$

Так как $\sum_{n=1}^{\infty} n b_n < \infty$, то можно применить п. 2) леммы 1, согласно которому

$$-\sum_{n=1}^{\infty} b_n \log_2 b_n < \infty. \tag{3.17}$$

Из неравенства (3.13) видно, что $\mu(F_n) \leqslant b_n$. Функция $-t \log t$ возрастает при $t < e^{-1}$. Значит,

$$-\mu(F_n) \log_2 \mu(F_n) \leqslant -b_n \log_2 b_n, \tag{3.18}$$

если только выполнено условие $b_n < e^{-1}$. Но это условие, очевидно, выполняется при всех достаточно больших n. Поэтому из неравенств (3.17) и (3.18) вытекает, что

$$H(\eta) = -\sum_{n=1}^{\infty} \mu(F_n) \log_2 \mu(F_n) < \infty.$$

Тем самым неравенство (3.14) доказано.

5. Рассмотрим разбиение η_2 пространства X, элементами которого служат множества

$$G_k = \{x : k\lambda \leqslant f(x) < (k+1)\lambda\},\ k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Разбиение η_2 имеет конечную энтропию. В самом деле,

$$\int_X f(x)\, d\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{G_k} f(x)\, d\mu \geqslant \lambda \sum_{k=0}^{\infty} k\mu(G_k). \tag{3.19}$$

По определению специального потока, левая часть (3.19) конечна. Следовательно, конечна и правая часть и, в силу п. 2) леммы 1,

$$H(\eta_2) = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu(G_k) \log_2 \mu(G_k) < \infty. \tag{3.20}$$

Вернемся теперь к введенному в п. 3 разбиению пространства X на множества D_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Обозначим это разбиение η_3. Из леммы 1 и равенства (3.10) вытекает, что

$$H(\eta_3) < \infty. \tag{3.21}$$

6. Положим

$$\vartheta = \eta_1\eta_2\eta_3, \quad \zeta' = \zeta T \vartheta_T^- = \zeta \prod_{n=0}^{\infty} T^{-n} \vartheta.$$

В силу неравенств (3.12), (3.20), (3.21)

$$H(\vartheta) \leqslant H(\eta_1) + H(\eta_2) + H(\eta_3) < \infty. \tag{3.22}$$

Разбиение ζ' обладает всеми свойствами, перечисленными в формулировке леммы 3. В самом деле, свойство 1) сразу получается из определения. Свойство 2) вытекает из аналогичного свойства разбиения ζ. Для проверки свойства 3) воспользуемся следующим предложением, имеющимся в работе В. А. Рохлина и Я. Г. Синая [10]: если α, β — измеримые разбиения и $H(\alpha\beta \mid \beta_T^-) < \infty$, то

$$H(\alpha\beta \mid \alpha_T^- \beta_T^-) = H(\alpha \mid \alpha_T^- \beta_T^-) + H(\beta \mid \beta_T^-). \tag{3.23}$$

Учитывая свойства условной энтропии и соотношение $T\zeta \geqslant \zeta$, преобразуем $H(T\zeta' \mid \zeta')$:

$$H(T\zeta' \mid \zeta') = H(T\zeta T\vartheta T\vartheta_T^- \mid T\zeta_T^- T\vartheta_T^-) = H(\zeta\vartheta\vartheta_T^- \mid \zeta_T^-\vartheta_T^-) =$$
$$= H(\zeta\vartheta \mid \zeta_T^-\vartheta_T^-) + H(\vartheta_T^- \mid \zeta_T^-\vartheta_T^-\zeta\vartheta) = H(\zeta\vartheta \mid \zeta_T^-\vartheta_T^-).$$

В силу неравенств

$$H(T\zeta \mid \zeta) < \infty, \qquad H(\vartheta) < \infty,$$

первое из которых входит в условия теоремы, а второе доказано выше (см. (3.22)),

$$H(\zeta\vartheta \mid \zeta_T^-) = H(\zeta \mid \zeta_T^-) + H(\vartheta \mid \zeta\zeta_T^-) = H(T\zeta \mid \zeta) + H(\vartheta \mid \zeta) \leqslant$$
$$\leqslant H(T\zeta \mid \zeta) + H(\vartheta) < \infty.$$

Поэтому в равенстве (3.23) можно положить $\alpha = \vartheta$, $\beta = \zeta$. Тогда

$$H(T\zeta' \mid \zeta') = H(\zeta\vartheta \mid \zeta_T^-\vartheta_T^-) = H(\vartheta \mid \vartheta_T^-\zeta_T) + H(\zeta \mid \zeta_T^-) \geqslant H(\zeta \mid \zeta_T^-) =$$
$$= H(T\zeta \mid \zeta),$$

и проверка свойства 3) разбиения ζ' закончена.

7. Займемся проверкой остальных свойств разбиения ζ'.

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \lambda. \tag{3.24}$$

Действительно, если это условие не выполняется, найдем такое m, что $\sum_{n=m}^{\infty} \alpha_n < \lambda$, и положим $\bar\zeta = T^m\zeta$, $\bar\alpha_n = \alpha_{n+m}$. Тогда последовательность $\{\bar\alpha_n\}$ удовлетворяет условию (3.24), разбиение $\bar\zeta$ удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 2 (причем $H(T\bar\zeta \mid \bar\zeta) = H(T\zeta \mid \zeta)$) и

$$n^3\mu\{x : |f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^n\bar\zeta}(x))| > \bar\alpha_n\} =$$
$$= n^3\mu\{x : |f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^{n+m}\zeta}(x))| > \alpha_{n+m}\} \leqslant$$
$$\leqslant (n+m)^3\mu\{x : |f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^{n+m}\zeta}(x))| > \alpha_{n+m}\},$$

откуда видно, что $\bar\zeta$, $\{\bar\alpha_n\}$ удовлетворяют и условию 3) теоремы 2.

Пусть теперь точки $x_1 \in X$ и $x_2 \in X$ принадлежат одному элементу разбиения ζ'. Тогда при некотором $n \geqslant 0$

$$x_1 \in D_n, \; x_2 \in D_n, \tag{3.25}$$

где D_n — элемент разбиения η_3. Отсюда вытекает (см. п. 3), что при всех $i \geqslant n+1$

$$T^i x_1 \in A_i', \ T^i x_2 \in A_i',$$

т. е.

$$|f(T^i x_1) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^i\zeta}(T^i x_1))| < \alpha_i, \ |f(T^i x_2) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^i\zeta}(T^i x_2))| < \alpha_i. \quad (3.26)$$

Так как по условию $\zeta' \geqslant \zeta$, то

$$C_{T^i\zeta}(T^i x_2) = T^i C_\zeta(x_2) = T^i C_\zeta(x_1) = C_{T^i\zeta}(T^i x_1),$$

и, в силу неравенств (3.26),

$$|f(T^i x_1) - f(T^i x_2)| < 2\alpha_i, \quad i = n+1, \ n+2, \ldots . \quad (3.27)$$

Далее, при всяком $i \geqslant 0$ точки $T^i x_1$ и $T^i x_2$ принадлежат одному (разумеется, зависящему от i) элементу разбиения η_1 и одному элементу разбиения η_2, т. е. (см. п. п. 4, 5) найдется такое n_i, что $T^i x_1 \in F_{n_i}$, $T^i x_2 \in F_{n_i}$ и, значит,

$$|f(T^i x_1) - f(T^i x_2)| \leqslant \frac{\lambda}{n_i + 1}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots .$$

Из включений (3.25) следует, что при $i \leqslant n$ $T^i x_1 \in U_n$, $T^i x_2 \in U_n$. Поэтому $n_i \geqslant n$, если $i \leqslant n$, и

$$|f(T^i x_1) - f(T^i x_2)| < \frac{\lambda}{n+1}, \quad 0 \leqslant i \leqslant n. \quad (3.28)$$

Возьмем любое $t > 0$. Пусть $\tilde{x}_1 = (x_1, u)$, $\tilde{x}_2 = (x_2, u)$, $S_t\tilde{x}_1 = (x_1', u_1')$, $S_t\tilde{x}_2 = (x_2', u_2')$. Тогда можно подобрать такие $m_1 > 0$ и $m_2 > 0$, что

$$t = f(x_1) - u + f(Tx_1) + f(T^2x_1) + \ldots + f(T^{m_1-1}x_1) + u_1',$$
$$x_1' \in T^{m_1} x_1, \quad (3.29)$$
$$t = f(x_2) - u + f(Tx_2) + f(T^2x_2) + \ldots + f(T^{m_2-1}x_2) + u_2',$$
$$x_2' \in T^{m_2} x_2. \quad (3.30)$$

Положим

$$\tau = f(x_2) - u + f(Tx_2) + f(T^2x_2) + \ldots + f(T^{m_1-1}x_2) + u_1'$$

и оценим $|t - \tau|$. Сначала допустим, что $m_1 > n$. Тогда, принимая во внимание (3.24), (3.27), (3.28), (3.29), имеем:

$$|t - \tau| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| + |f(Tx_1) - f(Tx_2)| + \ldots + |f(T^n x_1) - f(T^n x_2)| +$$
$$+ |f(T^{n+1}x_1) - f(T^{n+1}x_2)| + \ldots + |f(T^{m_1-1}x_1) - f(T^{m_1-1}x_2)| \leqslant$$
$$\leqslant (n+1)\frac{\lambda}{n+1} + \sum_{i=n+1}^{m_1-1} 2\alpha_i \leqslant 3\lambda.$$

Если же $m_1 \leqslant n$, то $|t - \tau| \leqslant (m_1 + 1)\dfrac{\lambda}{n+1} \leqslant \lambda$. Значит, в любом случае

$$|t - \tau| \leqslant 3\lambda.$$

Предположим теперь, что $m_2 > m_1$. Пользуясь равенством (3.30), получим:

$$t - \tau = f(T^{m_1}x_2) + f(T^{m_1+1}x_2) + \ldots + f(T^{m_2-1}x_2) + u_2' - u_1'.$$

Так как $u_1' < f(x_1') = f(T^{m_1}x_1)$ и, в силу неравенств (3.24), (3.27), (3.28), при любом $i \geqslant 0$

$$|f(T^i x_1) - f(T^i x_2)| \leqslant 2\lambda,$$

то

$$u_1' < f(T^{m_1}x_1) \leqslant f(T^{m_1}x_2) + 2\lambda, \qquad u_1' - f(T^{m_1}x_2) < 2\lambda.$$

Следовательно,

$$f(T^{m_1+1}x_2) + f(T^{m_1+2}x_2) + \ldots + f(T^{m_2-1}x_2) =$$
$$= t - \tau - u_2' + u_1' - f(T^{m_1}x_2) \leqslant 3\lambda + 2\lambda = 5\lambda < \inf_{x \in X} f(x).$$

Так как каждое $f(T^i x) \geqslant \inf_x f(x)$, то последнее неравенство может выполняться лишь в случае, когда его левая часть равна нулю, т. е. $m_2 - 1 < < m_1 + 1$. Тогда из нашего предположения $m_2 > m_1$ вытекает, что $m_2 = m_1 + 1$.

Аналогично, предположение $m_1 > m_2$ приводит к равенству $m_1 = = m_2 + 1$.

Итак, возможны лишь 3 случая:

$$1)\ m_2 = m_1; \qquad 2)\ m_2 = m_1 + 1; \qquad 3)\ m_2 = m_1 - 1.$$

В первом случае

$$\rho(S_t\tilde{x}_1, S_t\tilde{x}_2) \leqslant |u_2' - u_1'| \leqslant \sum_{i=0}^{m_1-1} |f(T^i x_2) - f(T^i x_1)| \leqslant 3\lambda < \frac{1}{32}\inf_{x \in X} f(x).$$

Во втором случае

$$\rho|S_t\tilde{x}_1, S_t\tilde{x}_2) \leqslant |f(T^{m_1}x_1) - u_1' + u_2'| \leqslant \sum_{i=0}^{m_1} |f(T^i x_2) - f(T^i x_1)| < \frac{1}{32}\inf_{x \in X} f(x).$$

Аналогичное неравенство выполняется и в третьем случае. Тем самым свойство 4) разбиения ζ' доказано.

Осталось проверить лишь свойство 5). Пусть $C_{\zeta'}$ — элемент разбиения ζ' и D_{n_0} — элемент разбиения η_3, которому принадлежит $C_{\zeta'}$. Тогда для любых точек $x_1, x_2 \in C_{\zeta'}$ при $i \geqslant n_0 + 1$ выполняется неравенство (3.27). Выберем такое n_1, что $\sum_{i=n_1}^{\infty} \alpha_i < \delta/2$, и положим $n = \max(n_0 + 1, n_1)$. Из (3.27) следует, что так выбранное n удовлетворяет условию (3.5). Лемма 3 доказана.

8. Для завершения доказательства теоремы 2 мы построим функцию $g(x)$, гомологичную функции $f(x)$, измеримую относительно σ-алгебры $\mathscr{B}(\zeta')$ и такую, что $\inf_{x \in X} g(x) > 0$. Тогда, по теореме 1, специальный поток (T, g) будет изоморфен исходному потоку (T, f).

В соответствии с определением 2 (см. § 2) достаточно найти такую измеримую функцию $\varphi(x)$, что функция $g(x) = f(x) + \varphi(Tx) - \varphi(x)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{B}(\zeta')$ и $\inf_{x \in X} g(x) > 0$. Построением такой функции $\varphi(x)$ мы сейчас займемся. Но предварительно скажем несколько слов, поясняющих это построение.

Предположим, что найденная нами функция $\varphi(x)$ такова, что

$$\sup_{x\in X}\varphi(x)<\inf_{x\in X}f(x),\qquad \inf_{x\in X}\varphi(x)=\lambda_\varphi>0.$$

Тогда множество

$$A_\varphi=\{(x,\ u): x\in X,\ \varphi(x)-\lambda_\varphi\leqslant u<\varphi(x)\}\subset X$$

имеет положительную меру. Для любого элемента $C_{\zeta'}$ разбиения ζ' и любого неотрицательного $s\leqslant\lambda_\varphi$ положим

$$\hat{C}_{\zeta'}(s)=\{(x,\ u): x\in C_{\zeta'},\ u=\varphi(x)-s\}.$$

Мы получим таким образом некоторое разбиение $\hat{\zeta}$ множества A_φ. Если представлять себе пространство X как квадрат, а ζ' — как разбиение квадрата на отрезки, параллельные боковой стороне, то $\hat{\zeta}$ есть разбиение на кривые, лежащие в вертикальных плоскостях и параллельные графику функции $\varphi(x)$.

Нетрудно заметить, что из постоянства функции $g(x)$ на элементах разбиения ζ' вытекает следующее свойство разбиения $\hat{\zeta}$: если точка $\tilde{x}=(x,\ u)\in A_\varphi$ принадлежит элементу $\hat{C}_{\zeta'}(s)$ разбиения $\hat{\zeta}$ и $t\geqslant 0$ таково, что $S_t\tilde{x}\in A_\varphi$, то

$$S_t\hat{C}_{\zeta'}(s)\subset\hat{C}'_{\zeta'}(s'),\tag{3.31}$$

где $\hat{C}_{\zeta'}(s')$ — некоторый другой элемент разбиения $\hat{\zeta}$. Обратно, если выполняется включение (3.31), то функция $g(x)$ постоянна на элементах разбиения ζ'.

Воспользовавшись аналогией с геодезическими потоками (см. [15]), можно сказать, что описанное только что свойство разбиения $\hat{\zeta}$ аналогично свойству отрезков орициклов переходить друг в друга под действием геодезического потока. Напомним, что точки, лежащие на одном орицикле, под действием геодезического потока неограниченно сближаются. Строя разбиение $\hat{\zeta}$ или, что то же самое, функцию $\varphi(x)$, мы будем стремиться к тому, чтобы точки, принадлежащие одному элементу разбиения $\hat{\zeta}$, сближались в смысле временно́го расстояния ρ, введенного в п. 2. Нетрудно понять, что разбиение с таким свойством должно обладать и свойством (3.31). Конструкция, приводящая к этому разбиению, будет основана на той же идее, что и метод построения орициклов на поверхности отрицательной кривизны.

9. Схема рассуждений этого пункта такова. Мы выбираем в пространстве $\tilde{X}$ множество, все точки которого находятся на нулевых временны́х расстояниях друг от друга, и применяем к этому множеству автоморфизмы S_{-t_n}. В пределе при $t_n\to\infty$ получается множество, состоящее из «отрезков орициклов».

Возьмем какое-нибудь положительное число $\Delta<\lambda_f/16=\inf\limits_{x\in X}f(x)/16$ и при любых целых $n\geqslant\lambda_f/2\Delta$, $k\geqslant 0$ рассмотрим множества

$$Q_{n,k}=\{x:\lambda_f/2+f(T^{-1}x)+f(T^{-2}x)+\ldots+f(T^{-k+1}x)<n\Delta\leqslant\lambda_f/2+$$
$$+f(T^{-1}x)+f(T^{-2}x)+\ldots+f(T^{-k}x)\},$$
$$\overline{Q}_{n,k}=\{x:\mu(Q_{n,k}\,|\,C_{T^k\zeta'}(x))=1\}.$$

Из этого определения видно, что элемент $C_{T^k\zeta'}$ разбиения $T^k\zeta'$ принадлежит множеству $\overline{Q}_{n,k}$ в том и только том случае, когда для каждой точки $x \in C_{T^k\zeta'}$ (кроме точек некоторого множества $M \subset X$ нулевой меры) точка $\tilde{x} = (x, \lambda_f/2)$ под действием автоморфизма $S_{-n\Delta}$ совершает k скачков. При этом множество $\widetilde{C}_{T^k\zeta'} = \{\tilde{x} = (x, \lambda_f/2) : x \in C_{T^k\zeta'},\ x \notin M\}$ — «отрезок», лежащий над $C_{T^k\zeta'}$, — превращается в множество $S_{-n\Delta}\widetilde{C}_{T^k\zeta'}$ — «кривую», лежащую над элементом $T^{-k}C_{T^k\zeta'}$ разбиения ζ'.

Так как $\lambda_f > 0$, то при фиксированном n только конечное число множеств $\overline{Q}_{n,k}$ непусто. Выпишем эти множества (если такие есть) в порядке возрастания индекса k:

$$\overline{Q}_{n,k_1}, \overline{Q}_{n,k_2}, \ldots, \overline{Q}_{n,k_m};\quad 1 \leqslant k_1 < k_2 < \ldots < k_m;\quad m \geqslant 1.$$

Множества $\overline{Q}_{n,k_i}$ и $\overline{Q}_{n,k_j}$ при $i \neq j$ не пересекаются, но множества $T^{-k_i}\overline{Q}_{n,k_i}$ и $T^{-k_j}\overline{Q}_{n,k_j}$ могут иметь непустое пересечение. Мы получим попарно непересекающиеся множества $R_{n,k_1}, R_{n,k_2}, \ldots, R_{n,k_m}$, если положим

$$R_{n,k_1} = T^{-k_1}\overline{Q}_{n,k_1},\qquad R_{n,k_i} = T^{-k_i}\overline{Q}_{n,k_i} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} R_{n,k_j},\quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Множества R_{n,k_i} $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $R_n = \bigcup_{i=1}^{m} R_{n,k_i}$, очевидно, принадлежат σ-алгебре $\mathscr{B}(\zeta')$. Определим на множестве R_n функцию

$$\bar{\varphi}_n(x) = \begin{cases} f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{k_i}x) - n\Delta + \lambda_f/2, & x \in R_{n,k_i} \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и покажем, что при всяком $l > 0$

$$\mu\left(\bigcup_{n=l}^{\infty} R_n\right) = 1. \tag{3.32}$$

По лемме 3 существует такое множество полной меры $N \subset X$, принадлежащее σ-алгебре $\mathscr{B}(\zeta')$, что если точки $x_1, x_2 \in X$ принадлежат одному элементу разбиения ζ', $x_1, x_2 \in N$ и $\tilde{x}_1 = (x_1, \lambda_f/2)$, $\tilde{x}_2 = (x_2, \lambda_f/2)$, то при любом $t \geqslant 0$

$$\rho(S_t\tilde{x}_1, S_t\tilde{x}_2) < \lambda_f/32. \tag{3.33}$$

Возьмем произвольную точку $x_0 \in N$ и подберем такое $n_0 > l$, что точка $S_{n_0\Delta}\tilde{x}_0 = S_{n_0\Delta}(x_0, \lambda_f/2)$ принадлежит множеству $\{(x, u) : x \in X,\ (15/32)\lambda_f \leqslant u \leqslant (17/32)\lambda_f\}$. Пусть точка $\tilde{x}_0$ под действием автоморфизма $S_{n_0\Delta}$ совершает p_0 скачков, т. е. $S_{n_0\Delta}\tilde{x}_0 = \tilde{x}_0' = (x_0', u_0')$, где

$$x_0' = T^{p_0}x_0,\quad \frac{15}{32}\lambda_f \leqslant u_0' \leqslant \frac{17}{32}\lambda_f.$$

Из свойства (3.33) вытекает, что тогда любая точка $\tilde{x} = (x, \lambda_f/2)$, где $x \in C_{\zeta'}(x_0)$, под действием автоморфизма $S_{n_0\Delta}$ совершит p_0 скачков, причем

$$S_{n_0\Delta}\tilde{x} \in \left\{(x, u) : x \in X,\ \frac{7}{16}\lambda_f \leqslant u \leqslant \frac{9}{16}\lambda_f\right\}. \tag{3.34}$$

Поэтому, если $y = T^{p_0}x$, где $x \in C_{\zeta'}(x_0)$, то точка $\tilde{y} = (y, \lambda_f/2)$ под действием автоморфизма $S_{-n_0\Delta}$ совершит p_0 скачков и

$$S_{-n_0\Delta}\tilde{y} \in \left\{(x, u) : x \in X,\ \frac{7}{16}\lambda_f \leqslant u \leqslant \frac{9}{16}\lambda_f\right\}.$$

Следовательно, $T^{p_0}C_{\zeta'}(x_0) \subset \overline{Q}_{n_0, p_0}$, а тогда при некотором $p_1 \leqslant p_0$

$$C_{\zeta'}(x_0) \subset R_{n_0, p_1} \subset R_{n_0} \subset \bigcup_{n=n_0}^{\infty} R_n \subset \bigcup_{n=l}^{\infty} R_n. \qquad (3.35)$$

Так как $C_{\zeta'}(x_0)$ — произвольный элемент разбиения ζ', принадлежащий множеству N, и $\mu(N) = 1$, то из включений (3.35) вытекает равенство (3.32).

10. Доказанное равенство (3.32) позволяет нам перейти от функции $\bar{\varphi}_n(x)$, определенной лишь на множестве R_n, к функции $\bar{\bar{\varphi}}_n(x)$, определенной на всем пространстве X и на почти каждом элементе $C_{\zeta'}$, совпадающей с некоторой функцией $\varphi_{n'}(x)$, $n' \geqslant n$ (n' зависит от $C_{\zeta'}$). Для этого достаточно положить

$$n'(x) = \min(m : x \in R_m,\ m \geqslant n),$$

$$\bar{\bar{\varphi}}_n(x) = \begin{cases} \varphi_{n'(x)}(x) & \text{при } n'(x) < \infty, \\ 0 & \text{при } n'(x) = \infty. \end{cases}$$

Функция $\bar{\bar{\varphi}}_n(x)$, очевидно, измерима и обладает следующим свойством: для почти всякого элемента $C_{\zeta'}$ найдутся целые числа $m_n \geqslant n$, $r_n \geqslant 0$ такие, что при $x \in C_{\zeta'}$

$$\bar{\bar{\varphi}}_n(x) = f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{r_n - 1}x) + \lambda_f/2 - m_n\Delta.$$

Другими словами, всякая точка $\tilde{x} = (x, \bar{\bar{\varphi}}_n(x))$, где $x \in C_{\zeta'}$, под действием автоморфизма $S_{m_n\Delta}$ совершает r_n скачков и попадает в множество $\{(x, u) : x \in X, u = \lambda_f/2\}$. При этом должно выполняться условие $r_n > m_n/\lambda_f - 1/2$, т. е. $r_n > rn$, где r — положительное число, зависящее лишь от функции f и выбранного Δ. Из определения функций $\bar{\varphi}_n(x)$, $\bar{\bar{\varphi}}_n(x)$ и включения (3.34) видно, что для почти всех $x \in X$

$$\frac{7}{16}\lambda_f \leqslant \bar{\bar{\varphi}}_n(x) \leqslant \frac{9}{16}\lambda_f.$$

Поэтому функция

$$\varphi_n(x) = \bar{\bar{\varphi}}_n(x) - \mathbf{M}(\bar{\bar{\varphi}}_n \mid C_{\zeta'}(x)) + \lambda_f/2$$

на почти каждом элементе $C_{\zeta'}$ отличается от функции $\bar{\bar{\varphi}}_n(x)$ на константу, заключенную между $-(3/16)\lambda_f$ и $(3/16)\lambda_f$, и, следовательно, обладает свойством, аналогичным только что описанному свойству функции $\bar{\bar{\varphi}}_n(x)$. Именно, для всякого элемента $C_{\zeta'}$, принадлежащего некоторому множеству полной меры $N_1 \subset X$, найдутся такие числа $\tau_n \geqslant \tau n$ и $k_n \geqslant kn$, что при $x \in C_{\zeta'}$

$$\varphi_n(x) = f(x) + f(Tx) + \ldots + f(T^{k_n - 1}x) + \lambda_f/2 - \tau_n$$

(τ и k — положительные константы).

11. Покажем, что последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ сходится к некоторой функции $\varphi(x)$ равномерно на каждом элементе $C_{\zeta'} \subset N_1$. Зафиксировав произвольный элемент $C_{\zeta'} \subset N_1$, возьмем любые целые $m > 0$, $n > 0$ и предположим, что $\tau_n \geqslant \tau_m$. Нетрудно видеть, что тогда $k_n \geqslant k_m$. Применим автоморфизм S_{τ_m} к множеству $\{(x, u) : x \in C_{\zeta'},\ u = \varphi_m(x)\}$ — «графику» функции $\varphi_m(x)$ — и множеству $\{(x, u) : x \in C_{\zeta'},\ u = \varphi_n(x)\}$ — «графику» функции $\varphi_n(x)$. В первом случае мы получим «график» функции

$$\psi_m(x) = \tau_m + \varphi_m(T^{-k_m}x) - f(T^{-1}x) - f(T^{-2}x) - \ldots - f(T^{-k_m}x),\ x \in T^{k_m}C_{\zeta'},$$

а во втором — «график» функции

$$\psi_n(x) = \tau_m + \varphi_n(T^{-k_m}x) - f(T^{-1}x) - f(T^{-2}x) - \ldots - f(T^{-k_m}x),\ x \in T^{k_m}C_{\zeta'},$$

По определению числа τ_m,

$$\psi_m(x) \equiv \lambda_f / 2, \quad x \in T^{k_m}C_{\zeta'}.$$

После применения автоморфизма $S_{\tau_n - \tau_m}$ множества

$$\{(x, u) : x \in T^{k_m}C_{\zeta'},\ u = \psi_m(x)\}, \quad \{(x, u) : x \in T^{k_m}C_{\zeta'},\ u = \psi_n(x)\},$$

в свою очередь, переходят соответственно в «графики» функций

$$\chi_m(x) = \tau_n + \varphi_m(T^{-k_n}x) - f(T^{-1}x) - f(T^{-2}x) - \ldots - f(T^{-k_n}x),\ x \in T^{k_n}C_{\zeta'},$$

$$\chi_n(x) = \tau_n + \varphi_n(T^{-k_n}x) - f(T^{-1}x) - f(T^{-2}x) - \ldots - f(T^{-k_n}x),\ x \in T^{k_n}C_{\zeta'}.$$

По определению числа τ_n,

$$\chi_n(x) = \lambda_f / 2, \quad x \in T^{k_n}C_{\zeta'}. \tag{3.36}$$

Легко видеть, что при $x \in C_{\zeta'}$

$$\varphi_n(x) - \varphi_m(x) = \psi_n(T^{k_m}x) - \psi_m(T^{k_m}x) = \chi_n(T^{k_n}x) - \chi_m(T^{k_n}x). \tag{3.37}$$

Функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ определялись так, что

$$\mathbf{M}(\varphi_m \mid C_{\zeta'}) = \mathbf{M}(\varphi_n \mid C_{\zeta'}) = \lambda_f / 2.$$

Поэтому, в силу равенства (3.37),

$$\mathbf{M}(\varphi_n - \varphi_m \mid C_{\zeta'}) = \mathbf{M}(\psi_n - \psi_m \mid T^{k_m}C_{\zeta'}) = \mathbf{M}(\chi_n - \chi_m \mid T^{k_n}C_{\zeta'}). \tag{3.38}$$

Из леммы 3 (свойство 5)) вытекает, что при достаточно большом k_m колебание функции $\chi_m(x)$, $x \in T^{k_m}C_{\zeta'}$ будет меньше произвольно заданного $\delta > 0$. Равенства (3.36), (3.37), (3.38) показывают, что тогда и

$$\sup_{x \in C_{\zeta'}} |\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \delta.$$

Остается заметить, что достаточно большое k_m можно получить, выбрав достаточно большое m. Значит, для почти каждого элемента $C_{\zeta'}$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ является фундаментальной в смысле равномерной сходимости на $C_{\zeta'}$ и вследствие этого сходится почти всюду к некоторой измеримой функции $\varphi(x)$, значения которой заключены между $(3/8)\,\lambda_f$ и $(5/8)\,\lambda_f$. Из определения этой функции видно, что она обладает таким свойством: если элемент $C_{\zeta'}$ принадлежит некоторому фиксированному множеству полной меры и $x_1, x_2 \in C_{\zeta'}$, $\tilde{x}_1 = (x_1, \varphi(x_1))$, $\tilde{x}_2 = (x_2, \varphi(x_2))$, то $\rho(S_t\tilde{x}_1, S_t\tilde{x}_2) \to 0$ при $t \to \infty$. Нетрудно понять, что тогда функция $\varphi(x)$ удовлетворяет требованиям, сформулированным в п. 8. Теорема 2 доказана.

Аналогичным методом можно получить следующий результат.

Теорема 3. *Если для специального потока* $\{S_t\} = (T, f)$, $f = f(x)$, $x \in X$, *найдутся измеримое разбиение* ζ *пространства* X *и последовательность положительных чисел* $\{\alpha_n\}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, *такие, что*

1) $T\zeta > \zeta$,
2) $H(T\zeta \mid \zeta) < \infty$,
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \mu\{x : |f(x) - \mathbf{M}(f \mid C_{T^n\zeta}(x))| > \alpha_n\} < \infty$,

то поток $\{S_t\}$ *обладает возрастающим разбиением.*

Поступила в редакцию
29.12.64

ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Абрамов, Об энтропии потока, ДАН СССР, **128**, 5 (1959), 873—876.
[2] W. Ambrose, S. Kakutani, Structure and continuity of measurable flows, Duke Math. J., **9**, 1 (1942), 25—42.
[3] М. И. Грабарь, О замене времени в динамических системах, ДАН СССР, **109**, 2(1956), 250—252.
[4] J. von Neumann, Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, Ann. Math., **33**, 3(3) (1932), 587—642.
[5] М. С. Пинскер, Динамические системы с вполне положительной и нулевой энтропией, ДАН СССР, **133**, 5 (1960), 1025—1026.
[6] В. А. Рохлин, Избранные вопросы метрической теории динамических систем, Успехи матем. наук, **4**, 2 (1949), 57—128.
[7] В. А. Рохлин, Новый прогресс в теории преобразований с инвариантной мерой, Успехи матем. наук, **15**, 4 (1960), 3—26.
[8] В. А. Рохлин, Об основных понятиях теории меры, Матем. сб. **25**, 1 (1949), 107—150.
[9] В. А. Рохлин, Об энтропии метрического автоморфизма, ДАН СССР, **124**, 5 (1959), 980—983.
[10] В. А. Рохлин, Я. Г. Синай, Построение и свойства инвариантных измеримых разбиений, ДАН СССР, **141**, 5 (1961), 1038—1041.
[11] Я. Г. Синай, Вероятностные идеи в эргодической теории, Proceedings of the fourth Intern. Congress of Math., Stockholm, 1962.
[12] Я. Г. Синай, Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром I, Изв. АН СССР, сер. матем., **25** (1961), 899—924.
[13] Я. Г. Синай, Слабый изоморфизм преобразований с инвариантной мерой, ДАН СССР, **147**, 4 (1962), 797—800.
[14] П. Халмош, Лекции по эргодической теории, М., ИЛ, 1959.
[15] Э. Хопф, Статистика геодезических линий на многообразиях отрицательной кривизны. I, Успехи матем. наук, **4**, 2 (1949), 129—170.

CONSTRUCTION OF INCREASING PARTITIONS FOR SPECIAL FLOWS

B. M. GUREVIČ (MOSCOW)

(Summary)

Special flows introduced in the general case by Ambrose and Kakutany are a convenient apparatus to study dynamical systems with continuous time (measurable flows). In this paper it is proved that a special flow under some general conditions posesses increasing and in particular perfect partitions.