

Учитывая, что δ , δ' - вложения, имеем

$$\delta x = \delta \delta x = \int \delta \delta u(t) \frac{dt}{t} = \int \delta_i \delta_i u(t) \frac{dt}{t} \quad (i=0,1)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \delta x \otimes \delta' y &= \int \delta_i (\delta_i u(t)) \frac{dt}{t} \otimes [\delta'_0 y_0(t) + \delta'_1 y_1(t)] = \\ &= \int \delta_0 (\delta_0 u(t)) \otimes \delta'_0 y_0(t) + \delta_1 (\delta_1 u(t)) \otimes \delta'_1 y_1(t) \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

Так как $\int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$ понимается в сильном смысле (в смысле сходимости по норме пространства $\Delta(\bar{X})$), то, заменяя в полученном равенстве интегралы конечными суммами, мы получаем утверждение теоремы.

Л и т е р а т у р а

1. Веселова Л.В., Зобин Н.М. Интерполяция операторов и двойственность / Казан. химико-технол. ин-т, - Казань, 1988. - 12 с. - Деп. в ВИНИТИ 5.07.1988, № 5401 - В88.

2. Зобина В.Г. Двойственность в интерполяции операторов // Сообщ. АН СССР. 1979. Т.95. № 1. С.45 - 48.

3. Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.

4. Kaijser S., Wick-Pelletier J. // Interpolation theory and duality // Lecture Notes in Math. 1984. V.1070. P.152 - 158.

С.В.Дорофеев

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ЗАРЯДА, ЗАДАННОГО НА ПРОЕКТОРАХ АЛГЕБРЫ НЕЙМАНА ТИПА II

Введение. Пусть H - комплексное гильбертово пространство, M - алгебра Неймана, действующая в H , и M^n - множество ортопроекторов в M .

Комплекснозначную функцию η , заданную на M^n , назовем за-

рядом, если $\eta(p) = \sum_{i \in I} \eta(p_i)$, коль скоро $p = \sum_{i \in I} p_i$,

$$p_i, p_j \in M^n, p_i p_j = 0 \quad (i \neq j).$$

Всюду ниже, где речь пойдет о числовом ряде с несчетным множеством слагаемых, его сумма понимается как предел сети конечных частных сумм. В частности, сходимость такого ряда означает, что в нем не более чем счетное число слагаемых отлично от нуля, и обычный ряд, составленный из этих ненулевых слагаемых, сходится абсолютно.

Для содержательной теории таких зарядов существенно требование их ограниченности, поскольку оно обеспечивает, например, возможность представления зарядов в виде линейной комбинации неотрицательных мер [4], [5]. Поэтому возникает естественный вопрос о существовании неограниченных зарядов.

Цель настоящей статьи - дать ответ на вышеуказанный вопрос в случае, когда M - алгебра Неймана типа II. Основной результат статьи выражается следующим утверждением, вытекающим из теорем 2.3 и 3.4.

Теорема. Пусть M - алгебра Неймана типа II. Тогда любой заряд, заданный на M^n , необходимо ограничен.

2. Случай алгебры Неймана типа II. M - алгебра Неймана типа II, действующая в H .

В дальнейшем условимся проекторы из редуцированной алгебры $M_p (p \in M^n)$ отождествлять с соответствующими проекторами, действующими в пространстве H .

2.1. Лемма. Пусть $N = \prod_{i \in I} N_i$, N , N_i - алгебры Неймана, и $\eta: N^n \rightarrow \mathbb{C}$ - заряд. Для того чтобы η был ограничен на N^n , необходимо и достаточно, чтобы $\eta|_{N_i^n}$ был ограничен для любого $i \in I$.

Доказательство. Необходимость очевидна. Пусть теперь $\eta|_{N_i^n}$ ограничен для каждого $i \in I$. Положим $C_i \equiv \sup_{p \in N_i^n} |\eta(p)| < +\infty (i \in I)$; достаточно убедиться, что $C \equiv \sum_{i \in I} C_i < +\infty$. Предположим противное: $C \equiv +\infty$. Тогда существует δ_1 - конечное подмножество I такое, что $\sum_{i \in \delta_1} C_i > 1$. Аналогично, так как $\sum_{i \in I} C_i = +\infty$, существует δ_2 - конечное подмножество $I \setminus \delta_1$ такое,

что $\sum_{i \in \delta_2} c_i > 1$ и т.д.

Положим $\delta = \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i$; пусть, например, $\delta = \{i_1, i_2, \dots\}$. Для каждого $i_k, k=1, 2, \dots$ выберем $P_k \in \mathcal{N}_{i_k}^n$ такой, что $|\eta(P_k)| > c_{i_k} - \frac{1}{2^k}$.

Если $P = \sum_{k=1}^{\infty} P_k$, то $\eta(P) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(P_k)$ т.е. $\sum_{k=1}^{\infty} |\eta(P_k)| < +\infty$. Та-

ким образом, $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k} < \sum_{k=1}^{\infty} (|\eta(P_k)| + \frac{1}{2^k}) = \sum_{k=1}^{\infty} |\eta(P_k)| + 1 < +\infty$.

Это противоречит расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} c_{i_k}$.

Введем обозначение $\Phi(M) = \{ \eta : M^n \rightarrow \mathbb{C} \mid \eta \text{ -- неограниченный заряд} \}$.

2.2. Л е м м а . Если $\eta \in \Phi(M)$ и $\tilde{\tau}$ -- нормальный конечный след на M^+ , причем $\tilde{\tau}(1) = 1$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $P \in M^n$ такой, что $\tilde{\tau}(P) < \varepsilon$ и $\eta|_{M_P^n}$ неограничен.

Доказательство . Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$, и последовательность $(P_n)_{n=1}^{\infty} \subset M^n$ такую, что $|\eta(P_n)| > n \cdot 2^{n+m}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим 2^{n+m} эквивалентных попарно ортогональных проекторов $Q_1^n, \dots, Q_{2^{n+m}}^n \in M^n$, для которых

$P_n = \sum_{j=1}^{2^{n+m}} Q_j^n$. Очевидно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $l \leq j_0(n) \leq 2^{n+m}$ такой, что $|\eta(Q_{j_0(n)}^n)| > n$. Положим $P = \bigvee_{n=1}^{\infty} Q_{j_0(n)}^n$. Та-

ким образом, $\eta|_{M_P^n}$ неограничен и $\tilde{\tau}(P) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\tau}(Q_{j_0(n)}^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\tau}(P_n)}{2^{n+m}} \leq$

$\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} = \frac{1}{2^m} < \varepsilon$, т.е. проектор P -- искомый.

2.3. Теорема . Если $\eta : M^n \rightarrow \mathbb{C}$ -- заряд, где M -- алгебра Неймана типа II_1 , то η ограничен.

Доказательство . Рассмотрим два случая.

а) M -- счетно-разложимая алгебра Неймана типа II_1 . Тогда существует точный нормальный конечный след $\tilde{\tau}$ на M^+ , причем $\tilde{\tau}(1) = 1$. Пусть, напротив, $\Phi(M) \neq \emptyset$ и $\eta \in \Phi(M)$. По лемме 2.2

существует $P_1 \in M^n$ такой, что $\tau(P_1) < 1$ и $\eta | M_{P_1}^n$ неограничен. Так как M_{P_1} — также алгебра типа II_1 , то существует $P_2 \in M_{P_1}^n$ такой, что $\tau(P_2) < \frac{1}{2}$ и $\eta | M_{P_2}^n$ неограничен. Продолжая этот процесс, получим в силу точности τ убывающую к нулю последовательность —ность $(P_n)_{n=1}^\infty \subset M^n$ такую, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\eta | M_{P_n}^n$ неограничен.

Возьмем $P \in M^n$ такой, что $|\eta(P)| > 1$. Поскольку проекторы в алгебре M образуют непрерывную геометрию (см. [2, теорема 6.5]), то $(1 - P_n) \wedge P \uparrow P$. Тогда, очевидно, $\eta((1 - P_n) \wedge P) \rightarrow \eta(P)$, т.е. существует $n_0 \in \mathbb{N}$ ($|\eta((1 - P_{n_0}) \wedge P)| > 1$).

Положим $Q_0 \equiv (1 - P_{n_0}) \wedge P$; тогда $1 - Q_{n_0} \geq P_{n_0}$. Итак, $\exists Q_0 \in M^n$ ($|\eta(Q_0)| > 1$, $\eta | M_{1-Q_0}^n$ неограничен). (I)

В силу произвольности алгебры M и заряда $\eta \in \Phi(M)$ свойство (I) будет выполнено и для заряда $\eta | M_{1-Q_0}^n$ на алгебре M_{1-Q_0} . Тогда существует $Q_1 \in M_{1-Q_0}^n$ такой, что $|\eta(Q_1)| > 1$ и $\eta | M_{1-Q_0-Q_1}^n$ неограничен.

Таким образом, продолжая этот процесс, мы получим последовательность попарно ортогональных проекторов $(Q_i)_{i=0}^\infty \subset M^n$, для которых $|\eta(Q_i)| > 1$, $i=0,1,\dots$, что, очевидно, противоречит определению заряда.

б) Общий случай. Как известно, $M = \prod_{i \in I} M_i$, где M_i — счетно-разложимая алгебра Неймана типа II_1 (см. [3, гл. I, § 6, предложение 9, (iii)]).

Согласно а) $\eta | M_i^n$ ограничен для каждого $i \in I$. Тогда по лемме 2.1 η ограничен. Теорема доказана.

3. Случай алгебры Неймана типа II_∞ . M — алгебра Неймана типа II_∞ , $\Phi(M)$ — множество, введенное в п. 2.

3.1. Л е м м а. Если $\Phi(N) \neq \emptyset$ для некоторой алгебры N типа II_∞ , то существует алгебра M_0 типа II_∞ и существует $\eta \in \Phi(M_0)$:

$$\forall P \in M_0^n (|\eta(P)| > 1 \Rightarrow \eta | (M_0)_{1-P}^n \text{ ограничен}). \quad (2)$$

Доказательство. Возьмем алгебру N и $\eta \in \Phi(N)$. Если для N и η свойство (2) выполнено, то лемма доказана. Поэтому будем считать, что свойство (2) для них не выполнено. Тогда существует $P_1 \in N^n$ такой, что $|\eta(P_1)| > 1$ и $\eta|N_{1-P_1}^n$ неограничен. Разлагая N_{1-P_1} в произведение алгебры типа II_1 и алгебры типа II_∞ , мы получим в силу теоремы 2.3, что существует $Q_1 \in N_{1-P_1}^n$ такой, что N_{Q_1} - алгебра типа II_∞ и $\eta|N_{Q_1}^n$ неограничен. Аналогично, если для алгебры N_{Q_1} и заряда $\eta|N_{Q_1}^n$ свойство (2) выполнено, то лемма доказана. Поэтому опять будем считать, что свойство (2) не выполнено. Значит, существует $P_2 \in N_{Q_1}^n$ такой, что $|\eta(P_2)| > 1$ и $\eta|N_{Q_1-P_2}^n$ неограничен. Снова существует $Q_2 \in N_{Q_1-P_2}^n$ такой, что N_{Q_2} - алгебра типа II_∞ и $\eta|N_{Q_2}^n$ неограничен.

Будем продолжать этот процесс; тогда на каком-то шаге рано или поздно получим искомую алгебру Неймана и искомый заряд. Действительно, если предположить, что этого не случится, то в результате процесса мы получим последовательность попарно ортогональных проекторов

$$(P_n)_{n=1}^\infty \subset M^n, \quad \text{для которых } |\eta(P_n)| > 1, \quad n=1, 2, \dots,$$

а это находится в очевидном противоречии с определением заряда.

3.2. Л е м м а . Если $\eta \in \Phi(M)$, τ - точный нормальный полуконечный след на M^+ , $(P_n)_{n=1}^\infty \subset M^n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} |\eta(P_n)| = +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(P_n) = +\infty$.

Доказательство. Пусть, напротив, $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(P_n) \neq \infty$.

Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что $\tau(P_n) \leq C$,

$n=1, 2, \dots$. Переходя, если надо, к подпоследовательности, будем считать, что $|\eta(P_n)| > n \cdot 2^n$, $n=1, 2, \dots$

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ построим 2^n эквивалентных попарно ортогональных проекторов $(Q_j^n)_{j=1}^{2^n} \subset M^n$, таких, что $P_n = \sum_{j=1}^{2^n} Q_j^n$.

Очевидно, для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует $1 \leq j_0(n) \leq 2^n$ такой, что $|\eta(Q_{j_0(n)}^n)| > n$; положим $Q = \bigvee_{n=1}^{\infty} Q_{j_0(n)}^n$. Тогда $\eta|_{M_Q}$ неограничен и $\tau(Q) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tau(Q_{j_0(n)}^n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tau(P_n)}{2^n} \leq C \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = C < +\infty$, т.е. M_Q - алгебра Неймана типа II₁. Полученное противоречие и доказывает лемму.

3.3. Замечание. Пусть $\eta \in \Phi(M)$ и τ - нормальный полуконечный след на M^+ . Тогда существует $P \in M^+$ такой, что $\tau(P) < \infty$ и $|\eta(P)| > 1$.

Доказательство. Возьмем $Q \in M^+$ ($|\eta(Q)| > 1$).

Рассмотрим множество $\mathcal{P} \equiv \left\{ (G_i)_{i \in I} \subset M^+ \mid G_i G_j = 0 (i \neq j), G_i \leq Q, G_i \neq 0 \text{ и } \tau(G_i) < +\infty \text{ для каждого } i \in I \right\}$. Так как элементами \mathcal{P} являются наборы проекторов, то введем в \mathcal{P} порядок по включению. Тогда \mathcal{P} индуктивно; при этом $\mathcal{P} \neq \emptyset$. В самом деле, так как τ полуконечен, то существует $G \in M^+ \setminus \{0\}$ такой, что $G \leq Q$ и $\tau(G) < +\infty$; значит, $\{G\} \in \mathcal{P}$.

По лемме Цорна, в \mathcal{P} существует максимальный элемент $(G_i^0)_{i \in I}$. Покажем, что $\sum_{i \in I} G_i^0 = Q$. Действительно, если это не так, то опять в силу полуконечности τ существует $G^0 \in M^+ \setminus \{0\}$ такой, что $G^0 \leq Q - \sum_{i \in I} G_i^0$ и $\tau(G^0) < \infty$. Тогда $\{G^0\} \cup (G_i^0)_{i \in I} \in \mathcal{P}$, т.е. мы получаем противоречие с максимальнойностью семейства $(G_i^0)_{i \in I}$.

Итак, $Q = \sum_{i \in I} G_i^0$, $G_i^0 \in M^+ \setminus \{0\}$, $G_i^0 G_j^0 = 0 (i \neq j)$ и $\tau(G_i^0) < +\infty$.

Так как $\eta(Q) = \sum_{i \in I} \eta(G_i^0)$, то существует δ - конечное подмножество I , для которого $|\eta(\sum_{i \in \delta} G_i^0)| > 1$. Таким образом, проектор $P \equiv \sum_{i \in \delta} G_i^0$ - искомый.

3.4. Теорема. Всякий заряд, заданный на ортопроекторах алгебры Неймана M типа II_∞ , ограничен.

Доказательство. Предположим противное: $\Phi(M) \neq \emptyset$. Пусть тогда алгебра M_0 типа II_∞ и заряд $\eta \in \Phi(M_0)$ удовлетворяют требованиям леммы 3.1; τ - точный нормальный полуконечный след на M_0^+ .

Из замечания 3.3 вытекает, что существует $P_0 \in M_0^n$ такой, что

$$\mathcal{L} \equiv \tau(P_0) < +\infty \quad \text{и} \quad |\eta(P_0)| > 1; \quad \text{пусть} \quad C_1 \equiv \sup_{P \in (M_0)_{1-P_0}^n} |\eta(P)|.$$

По лемме 3.2, существует константа $C_2 > 0$ такая, что если $\tau(P) \leq \mathcal{L}$, то $|\eta(P)| \leq C_2$ ($P \in M_0^n$).

$$\begin{aligned} & \text{Возьмем } Q \in M_0^n \left(|\eta(Q)| > C_1 + C_2 \right) \text{ и положим } G = \\ & = Q \wedge (P_0 \vee (1-Q)). \quad \text{Тогда } Q - G = Q \wedge G^\perp = Q \wedge ((1-Q) \vee (P_0^\perp \wedge Q)) = \\ & = Q \wedge (1-Q + P_0^\perp \wedge Q) = Q \wedge (P_0^\perp \wedge Q) = Q \wedge (1-P_0). \end{aligned}$$

Таким образом, $Q = G + Q \wedge (1-P_0)$.

Так как $Q \wedge (1-P_0) \leq 1-P_0$, то $|\eta(Q \wedge (1-P_0))| \leq C_1$;

и так как $\tau(G) = \tau((P_0 \vee (1-Q)) \wedge (1-Q)^\perp) =$

$$= \tau(P_0 \vee (1-Q) - (1-Q)) \leq \tau(P_0) = \mathcal{L}, \quad \text{то} \quad |\eta(G)| \leq C_2.$$

Теперь $|\eta(Q)| \leq |\eta(G)| + |\eta(Q \wedge (1-P_0))| \leq C_1 + C_2$
- противоречие. Теорема доказана.

Л и т е р а т у р а

1. Ш е р с т н е в А.Н. О понятии заряда в некоммутативной схеме теории меры // Вероятностные методы и кибернетика. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. Вып.10 - II. С.68 - 72.

2. К а р л а н с к у I. Projections in Banach algebras // Ann. of Math. 1951. V.53. No.2. P.235 - 249.

3. Д и х м и е р J. Les algebres d' operateurs dans l' espace Hilbertien (algebres de von Neumann) // Paris, Gauthier - Villars Editeur. 1969.

4. М а т в е й ч у к М.С. Конечные заряды в алгебрах Неймана // Изв.вузов. Матем. 1980. № 9. С.81 - 82.

5. M a t v e y c h u k M.S. Theorems of the measures extension on the quantum logics // Первый всемирный конгресс общества мат.статистики и теории вероятн. им. Бернулли. М., 1986. Т.2. С.693.

В.П.Кадушин

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНО СОПРЯЖЕННЫМИ НЕИЗВЕСТНЫМИ И МОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Настоящая работа является продолжением работ автора [1], [2], в которых рассматриваются приближенные методы решения как линейных, так и нелинейных сингулярных интегральных уравнений (с.и.у.) с комплексно сопряженными неизвестными.

Среди методов решения различных операторных уравнений особое место занимают интенсивно разрабатываемые в последние годы [3], [4] методы решения уравнений с монотонными операторами, что вполне естественно, так как эти уравнения обладают рядом таких замечательных свойств, как существование, единственность решения, сходимость прямых и итеративных методов и др. В настоящей работе делается попытка приближенного решения уравнений с определением монотонности в комплексном гильбертовом пространстве.

I. Вспомогательные результаты. Рассмотрим сначала случай линейного с.и.у. с постоянными коэффициентами без вполне непрерывной части

$$K\varphi \equiv a\varphi(t) + b\overline{\varphi(t)} + c S\varphi(t) + d \overline{S\varphi(t)} = f(t), \quad (1)$$

где a, b, c, d - комплекснозначные постоянные; $f(t)$ - заданная, суммируемая с квадратом на γ , функция; γ - единичная окружность с центром в начале координат; $S\varphi(t)$ - сингулярный интеграл с ядром Коши; $\varphi(t)$ - неизвестная функция.

Обозначим через $L_2(\gamma)$ пространство суммируемых с квадратом на γ функции со скалярным произведением