Л. И. Питербарг, О прогнозе одного класса случайных полей,
Теория вероятн. и ее примен., 1983, том 28, выпуск 1, 175–182

16. *Ротарь В. И.* Неклассические оценки скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме. I.— Теория вероятн. и ее примен., 1977, т. XXII, в. 4, с. 774—790.

Поступила в редакцию
21.III.1980

ON THE EXIT OF RANDOM WALK OUT OF THE CURVILINEAR DOMAIN

GAFUROV M. U., ROTAR' V. I. (MOSCOW)

(*Summary*)

Let $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, where $X_1, X_2, \ldots$ are i. i. d. r. v.' s; let $\varphi(x)$, $g(x)$ be regularly varying strictly increasing positive functions and $g(n) n^{-1/2} \to \infty$, $n \to \infty$. Let $N_g = \min\{n: S_n > g(n)\}$, $S_g = S_{N_g}$, $\chi_g = S_g - g(N_g)$, $q_\infty = \mathbf{P}\{|S_k| \leqslant \leqslant g(k)\ \forall\ k\}$.

The typical result of the paper is the following

Theorem. *Let for any* $c > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(g(n))\, n^{-1} \exp\{-cg^2(n)\, n^{-1}\} < \infty. \tag{1}$$

Then $\mathbf{E}[\varphi(S_g) \mid N_g < \infty] < \infty$ *if* (*and in the case* $q_\infty > 0$ *only if*)

$$\mathbf{E}\varphi(X_1^+)\, G(X_1^+) < \infty, \quad \textit{where } G = g^{-1}.$$

The analogous results are obtained for N_g, χ_g.

О ПРОГНОЗЕ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

ПИТЕРБАРГ Л. И.

1. Пусть $\xi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ — непрерывное в среднем центрированное случайное поле, заданное в области G эвклидова пространства E^d размерности d. На протяжении всей статьи будет предполагаться, что корреляционная функция $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ поля ξ (как обобщенная функция) удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$L_2(\mathbf{x}, D)\, R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = L_1(\mathbf{x}, D)\, \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{1}$$

Здесь $\delta(\cdot)$ — δ-функция Дирака, L_1, L_2 — линейные дифференциальные операторы порядка $2n_1$ и $2n_2$ соответственно, $2n_2 - 2n_1 > d$,

$$L_i(\mathbf{x}, D) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2n_2} a_\alpha^{(i)}(\mathbf{x})\, D^\alpha, \quad i = 1, 2; \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial^{\alpha_1} x_1 \ldots \partial^{\alpha_d} x_d},$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \ |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d.$$

Будем также считать, что для операторов L_i выполнено условие (A) L_1, L_2 — сильно эллиптические формально самосопряженные операторы; коэффициенты $a_\alpha^{(i)}(\cdot)$ для всех α, i — бесконечно дифференцируемые функции; существует такая постоянная $c > 0$, что для всех функций $\varphi \in \mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathrm{G})$ из пространства Шварца $(L_1\varphi, L_1\varphi)_0 \geqslant (\varphi, \varphi)_0$, где $(\cdot, \cdot)_0$ — скалярное произведение в пространстве $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(\mathrm{G})$ интегрируемых в квадрате функций.

Отметим, что соотношение (1) означает:

$$(R(\mathbf{x}, \cdot), L_2\varphi)_0 = L_1\varphi(\mathbf{x}) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad \mathbf{x} \in \mathrm{G}.$$

Рассматриваемый класс случайных полей содержит ряд важных подклассов. Если коэффициенты операторов L_i постоянны, а $\mathrm{G} = E^d$, то поле ξ является однородным полем с рациональной спектральной плотностью. Если, кроме того, указанные операторы инвариантны относительно группы вращений пространства E^d, то мы имеем дело с однородными изотропными полями с рациональной спектральной плотностью. В [1] была дана характеризация таких полей через свойство линейного прогноза, именуемое сферической псевдомарковостью. В работе [2] рассматривалось интегральное уравнение с ядром, удовлетворяющим уравнению (1) в предположении, что операторы L_1 и L_2 обладают спектральными разложениями по спектральной мере, соответствующей некоторому самосопряженному дифференциальному оператору. Наконец, в случае $L_1(\mathbf{x}, D) = \mathrm{const}$ оператор, обратный к корреляционному, является дифференциальным оператором. Гауссовские поля такого типа известны как поля с марковским свойством [3—5].

Основной результат настоящей работы составляет теорема 1, позволяющая описывать в гауссовском случае расщепляющую σ-алгебру для алгебр $\sigma_- = \sigma(\xi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in G)$ и $\sigma_+ = \sigma(\xi(\mathbf{x}), \mathbf{x} \notin G)$, где G — ограниченная подобласть G с гладкой границей. Ранее эти вопросы рассматривались для полей марковского типа [3—5] и для стационарных процессов с рациональным спектром [6], когда G — полупрямая. Из теоремы 1 следует, что расщепляющей σ-алгеброй в этом случае является σ-алгебра, порождаемая слабыми производными поля на границе до порядка $n_2 - n_1 - 1$ и случайными величинами вида $\int\limits_G \xi(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, где $u(\mathbf{x})$ — классическое решение уравнения $L_1(\mathbf{x}, D) u(\mathbf{x}) = 0$ в области G. Задача описания расщепляющих σ-алгебр полей с рациональным спектром была поставлена автору Г. М. Молчаном. Используя утверждение теоремы 1, удается получить явную формулу прогноза для изотропного случайного поля с рациональной спектральной плотностью по наблюдениям в области G (теорема 2). В случае $d = 1$ эта задача была решена в [7].

2. Для функций $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ определим скалярное произведение

$$(\varphi, \psi) = \int\limits_{\mathrm{G}} \int\limits_{\mathrm{G}} R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{x} \, d\mathbf{y}.$$

Предполагается, что поле невырожденно всюду, т. е. $(\varphi, \varphi) = 0$ лишь в случае $\varphi \equiv 0$. Пусть $H(G)$ — замыкание функций из $\mathscr{D}$, носители которых содержатся в открытом множестве G, по норме, порождаемой введенным скалярным произведением. Гильбертово пространство $H(G)$ изометрично пространству $\mathscr{H}(G)$ случайных величин, порождаемому значениями поля в G, с обычным скалярным произведением $(\xi_1, \xi_2) = \mathbf{E}\xi_1\xi_2$. Обозначим $H(\mathrm{G})$ и $\mathscr{H}(\mathrm{G})$ через H и $\mathscr{H}$ соответственно. Задача линейного прогнозирования поля по наблюдениям в области $G \subset \mathrm{G}$ сводится к ортогональному проектированию пространства $H^+ = H(G^+)$, где G^+ — открытое дополнение G, на $H^- = H(G)$. Оператор проектирования в H на H^- обозначим P^-; пусть $H^{+|-} = P^- H^+$.

Пространство $H_R = H^*$, сопряженное к H, является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром $R(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. В силу непрерывности поля элементы f пространства H_R можно отождествить с непрерывными функциями, допускающими оценку

$$|f(\mathbf{x})| < \sqrt{R(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \, \|f\|_*, \tag{2}$$

где $\|\cdot\|_*$ — норма в пространстве H^*. Корреляционный оператор

$$R\colon \varphi(\mathbf{x}) \to \int\limits_{\mathrm{G}} R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \varphi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}, \quad \varphi \in \mathscr{D}$$

продолжается по непрерывности на H и является естественным изоморфизмом пространств H и H^*, т. е. отображает элемент $h \in H$ в линейный непрерывный функционал $(h, \cdot)$ на H^*. Обозначим $H^*(G)$ пространство сужений функций из $\widetilde{H}^*(G) = RH(G)$ на G с нормой $\|f\|_* = \|\tilde{f}\|_*$, где $\tilde{f}$ — продолжение f на всю область G до функции из $\widetilde{H}^*(G)$. Отметим, что такое продолжение единственно и, если g — любая функция из H^*, совпадающая с f в области G, то $\tilde{f}$ есть ортогональная проекция g на $\widetilde{H}^*(G)$, [3]. Обозначим $\mathscr{D}' = \mathscr{D}(\mathrm{G})'$ пространство обобщенных функций на пространстве основных функций $\mathscr{D}$. Тогда H^* содержится в $\mathscr{D}'$ как подмножество. Предположим также, что и $H \subset \mathscr{D}'$. Пусть T_1, T_2 — линейные локальные операторы, определенные на H и H^* соответственно, области значений которых содержатся в $\mathscr{D}'$. Напомним, что оператор T, отображающий одно функциональное пространство в другое, называется *локальным*, если из того, что $f(\mathrm{x}) = 0$ для всех $\mathrm{x} \in G$ следует, что $(Tf)(\mathrm{x}) = 0$ для всех $\mathrm{x} \in G$ для любого открытого множества G. Здесь и далее обращение в нуль функций из H и H^* понимается так, как это принято в теории обобщенных функций. Обозначим $H^0_{T_1}$ подпространство элементов h из H^-, для которых $T_1 h = 0$ в G. Справедливо следующее утверждение, доказанное в [8].

Лемма 1. *Если корреляционный оператор R удовлетворяет уравнению*

$$T_2 R = T_1, \tag{3}$$

где T_1, T_2 — линейные локальные операторы, то для любого открытого множества G справедливо включение $H^{+|-} \subset H^0_{T_1}$.

Отметим, что условия леммы не меняются при умножении слева обеих частей (3) на локальный линейный оператор, поэтому выбор операторов T_1, T_2 в некоторой степени произволен.

Пусть $M_k = \sum\limits_{|\alpha|=2k} D^\alpha + D^0$. Для $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ положим $(\varphi, \psi)_k = (M_k \varphi, \psi)_0$, $\|\varphi\|_k^2 = (\varphi, \varphi)_k$. Обозначим $\overset{0}{W}_k = \overset{0}{W}{}^{k,2}(\mathrm{G})$ замыкание $\mathscr{D}$ по норме $\|\cdot\|_k$, а через $W_k = W^{k,2}(\mathrm{G})$ — обычное пространство Соболева, отвечающее норме $\|\cdot\|_K$. Положим $p = n_2 - n_1$ и $q = n_2 + n_1$. Пусть $\overset{0}{V}_p \subset \overset{0}{W}_p$ — образ L_1 как оператора на $\overset{0}{W}_q$.

Лемма 2. *Если для корреляционной функции $R(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ поля справедливо соотношение (1) с операторами L_i, удовлетворяющими условию (A), а G — ограниченная область, то*

$$\overset{0}{V}_p \subset H^* \subset W_p, \tag{4}$$

причем оба вложения непрерывны и для элементов $f_0 \in \overset{0}{V}_p$ справедливы неравенства

$$c_1 \|f_0\|_p \leqslant \|f_0\|_* \leqslant c_2 \|f_0\|_p. \tag{5}$$

Доказательство. Соотношение (1) означает, что

$$RL_2\varphi = L_1\varphi \tag{6}$$

для любой функции $\varphi \in \mathscr{D}$. Тогда функция

$$f_0 = L_1\varphi \tag{7}$$

принадлежит H^*. В самом деле, если $h = L_2\varphi$, то $h \in H$ и $Rh = RL_2\varphi = L_1\varphi = f_0 \in H^*$. Далее,

$$\|f_0\|_*^2 = (L_2 L_1 \varphi, \varphi)_0, \tag{8}$$

так как $\|f_0\|_*^2 = (Rh, h)_0 = (L_1\varphi, L_2\varphi)_0$. Из (8) и неравенства Гординга [9, с. 245] следует, что для некоторых положительных постоянных c_3, c_4

$$\|f_0\|_*^2 + c_3\|\varphi\|_0^2 \geqslant c_4 \|\varphi\|_q^2,$$

а из гладкости коэффициентов L_i получаем: $\|f_0\|_p^2 \leqslant c_5 \|\varphi\|_q^2$, что влечет неравенство

$$\|f_0\|_*^2 + c_3\|\varphi\|_0^2 \geqslant c_6 \|f_0\|_p^2. \tag{9}$$

Из условия A и соотношения (7) следует, что

$$\|\varphi\|_0^2 \leqslant c_7 \|f_0\|_0^2. \tag{10}$$

Сопоставляя (9), (10) и соотношение (2), получим, что для f_0 вида (7) справедлива оценка (5) нормы $\|f_0\|_*$ снизу. Докажем оценку сверху. Из (8) следует неравенство $\|f_0\|_*^2 \leqslant c_8\|\varphi\|_q^2$, а из неравенства Гординга — неравенство $\|f_0\|_p^2 + c_9\|\varphi\|_0^2 \geqslant c_{10}\|\varphi\|_q^2$, откуда $\|f_0\|_*^2 \leqslant c_{11}\|f_0\|_p^2 + c_{12}\|\varphi\|_0^2$. Последнее неравенство вместе с (10) завершает доказательство соотношения (5) для функций вида (7). По непрерывности оно распространяется на все $\varphi \in \overset{0}{W}_q$, а следовательно, и на все $f_0 \in \overset{0}{V}_p$.

Каждый элемент $f \in H^*$ можно представить в виде $f = f_0 + F$, где $f_0 \in \overset{0}{V}_p$, а F — бесконечно дифференцируемая функция, являющаяся в G решением уравнения $L_2 F = 0$. (Это разложение отвечает разложению поля ξ на регулярную и сингулярную составляющие.) Действительно, если F ортогональна всем функциям вида (7), то $0 = (F, h)_0 = (F, L_2\varphi)_0$. Из теоремы Фридрихса [9, с. 247] о дифференцируемости слабых решений эллиптических операторов следует, что F — бесконечно дифференцируемая функция, и значит, $F \in W_p$. Следуя [3, с. 66], для F получим оценку $\| F \|_p \leqslant c_{13} \| F \|_*$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если G — область, строго лежащая внутри* G *(т. е. расстояние от границы G до границы* G *положительно) и выполнены условия леммы 2, то $H^* (G) = W_p (G)$ с точностью до эквивалентности норм.*

Доказательство. Докажем вначале совпадение $H^* (G)$ и $W_p (G)$ как множеств. Включение $H^* (G) \subset W_p (G)$ следует из второго включения в (4). Пусть $f \in W_p (G)$ и g — некоторое решение уравнения $L_1 g = f$ в области G. Тогда функция g принадлежит $W_q (G)$ и может быть продолжена до функции g_0 из $\overset{0}{W}_q$. Положим $f_0 = L_1 g_0$, тогда $f_0 \in \overset{0}{V}_p$ и в силу первого включения в (4) имеет место включение $f_0 \in H^*$. Проекция $\tilde{f}$ функции f_0 на $\tilde{H}^* (G)$ совпадает с f_0 на G в силу сделанного выше замечания, а f_0 совпадает с f на G, следовательно, $f \in H^* (G)$. Пусть I — тождественное отображение пространства $H^* (G)$ на $W_p (G)$. В силу непрерывности вложения $H^* \subset W_p$ отображение I — ограниченный оператор. Тогда по теореме Банаха о непрерывности обратного отображения оператор, обратный к I, ограничен, а значит, нормы $\| \cdot \|_p$ и $\| \cdot \|_*$ эквивалентны.

Лемма доказана.

Пусть $W_{-k} (E^d)$ — пространство, сопряженное к $W_k (E^d)$, а $W_{-k} (G)$ — подпространство обобщенных функций из $W_{-k} (E^d)$, носители которых содержатся в G. В силу сопряженности $H (G)$ и $H^* (G)$ справедлив следующий результат.

Следствие 1. *В условиях леммы 3 пространства $H (G)$ топологически эквивалентны пространствам Соболева с негативной нормой $W_{-p} (G)$.*

Пусть G — область, лежащая строго внутри G и имеющая границу S класса гладкости C^p. Положим $\mathscr{H} (S) = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathscr{H} (S_\varepsilon)$, где S_ε — ε-окрестность S, а $\partial_p \mathscr{H}$ — пространство, порождаемое слабыми нормальными производными поля ξ до порядка $p - 1$ на S. Более точно, следуя [4], определим на пространстве $\mathscr{L}_2 (S)$ интегрируемых в квадрате функций $f (\mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in S$, линейный непрерывный в среднем случайный функционал

$$F_h (f) = \int\limits_S \xi (\mathbf{s} + h\mathbf{n}) f (\mathbf{s})\, d\sigma,$$

где $d\sigma$ — элемент поверхности, $\mathbf{n} = \mathbf{n} (\mathbf{s})$ — единичный вектор нормали в точке $\mathbf{s}$, а h — малый положительный параметр. Если у $F_h (f)$ как функции от h существует $k - 1$ среднеквадратичная производная в точке $h = 0$, $F_0^{(i)} (f)$, $i = 0, \ldots, k - 1$, то случайный функционал $F_0^{(i)} (f)$ на $\mathscr{L}_2 (S)$ будем называть i-й слабой нормальной производной на границе и обозначать ее $\int\limits_S f (\mathbf{s})\, \xi^{(i)} (\mathbf{s})\, d\sigma$. Тогда $\partial_k \mathscr{H}$ — линейное замыкание множества случайных величин $\{\int\limits_S f (\mathbf{s})\, \xi^{(i)} (\mathbf{s})\, d\sigma, i = 0, \ldots, k - 1, f \in \mathscr{L}_2 (S)\}$.

Из леммы 3 вытекает [3, с. 62], см. также [4], [5].

Следствие 2. *Для подобласти* G *с жордановой границей класса гладкости C^p, строго лежащей внутри* G, *справедливо равенство $\mathscr{H} (S) = \partial_p \mathscr{H}$.*

Предположим, что граница S области G является бесконечно дифференцируемой жордановой поверхностью. Обозначим $\mathscr{H}_{L_1}^{(0)}$ подпространство $\mathscr{H}$, порождаемое случайными величинами вида $\int\limits_G u (\mathbf{x})\, \xi (\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$, где $u (\mathbf{x})$ — классическое решение уравнения $L_1 (\mathbf{x}, D)\, u (\mathbf{x}) = 0$ в области G и $u \in C^\infty (\overline{G})$, и пусть $\mathscr{H}^{+|-}$ — образ пространства $H^{+|-}$ в $\mathscr{H}$. Отметим, что в гауссовском случае минимальная расщепляющая σ-алгебра для σ_- и σ_+ порождается пространством $\mathscr{H}^{+|-}$.

Теорема 1. *Если корреляционная функция $R (x, y)$ случайного поля, заданного в области* G, *удовлетворяет уравнению (1) и для операторов L_i выполнено условие A, то для всякой строго лежащей в* G *ограниченной области G с жордановой бесконечно* *дифференцируемой границей, имеет место включение*

$$\mathscr{H}^{+1-} \subset \partial_p \mathscr{H} + \mathscr{H}^0_{L_1}. \tag{11}$$

Так как $\partial_p \mathscr{H} \subset \mathscr{H}^-$ в силу среднеквадратической непрерывности поля, а $\mathscr{H}^{(0)}_{L_1} \subset \subset \mathscr{H}^-$ по построению, то имеет место следующий результат.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Если ξ — гауссовское поле, то σ-алгебра, порождаемая слабыми производными поля на S до порядка $p-1$ включительно и случайными величинами из $\mathscr{H}^{(0)}_{L_1}$, является расщепляющей σ-алгеброй для σ_- и σ_+.*

Замечание. Так как выбор оператора L_1 неоднозначен, то включение (11), вообще говоря, строгое.

Доказательство теоремы 1. Из уравнения (1) и следствия 1 леммы 3 вытекает, что оператор удовлетворяет соотношению (2) с $T_i = L_i(\mathbf{x}, D)$, $i = 1, 2$. Не ограничивая общности, можно считать, что область G ограниченна, так как

$$P^- H(G') = H^{+1-} \tag{12}$$

для любого открытого множества $G' \subset G^+$. В самом деле, если соотношение (12) не выполнено, то существует такой ненулевой элемент $h \in H^{+1-}$, что $(h, P^- g') = 0$ для всех $g' \in H(G')$. Поэтому $h \perp H(G')$, и значит, функция $f = Rh$ обращается в нуль в G'. С другой стороны, $L_2 f = L_1 h = 0$ в G^+, так как $h \in H(G)$ и оператор L_1 локален. Из A-свойства сильноэллиптического оператора [11, с. 172] следует, что $f = 0$ в G^+, а значит, $h \perp H(G^+)$, откуда $h = 0$. Полученное противоречие доказывает (12).

Применяя следствие 1 и лемму 1, получим, что любой элемент $h \in H^{+1-}$ можно отождествить с функционалом из $W_{-p}(G)$, удовлетворяющим уравнению $(h, L_1\varphi)_0 = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(G)$. Так как $h \in W_{-p}(G)$, то $h = M_p g$, где g — функция, принадлежащая $\mathscr{L}_2(G)$. Такое представление следует из вида преобразования Фурье для функционалов из $W_{-p}(G)$. Тогда для g выполнено равенство $(g, M_p L_1 \varphi)_0 = 0$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}(G)$, а значит, g можно отождествить с бесконечно дифференцируемой в G функцией. В силу равенства $h = M_p g$ то же справедливо и для h, а тогда $L_1 h = 0$ в G в классическом смысле. Пусть $u(\mathbf{x})$ — продолжение по непрерывности функции $h(\mathbf{x})$ на $\overline{G}$, тогда $u \in C^\infty(\overline{G})$. Этот факт, а также существование предела у $h(\mathbf{x})$, когда $\mathbf{x}$ стремится к точке на S, вытекает из теорем вложения [10] и гладкости S. Положим $h_s(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})$, тогда

$$h(\mathbf{x}) = h_s(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}). \tag{13}$$

Так как $h_s(\mathbf{x}) = 0$ для всех $\mathbf{x}$, не принадлежащих S, то $h_s \in H(S)$ и $h_s \in \partial_p H$ по следствию 2 леммы 3. Из представления (13) следует (11).

Теорема доказана.

3. Пусть теперь $\xi(\mathbf{x})$ — однородное изотропное случайное поле со спектральной плотностью

$$f(\lambda) = \frac{P_m(|\lambda|^2)}{Q_n(|\lambda|^2)}, \tag{14}$$

где $P_m(\cdot)$ и $Q_n(\cdot)$ — несократимые полиномы степени m и n соответственно. Тогда условия теоремы 1 выполнены, если положить $L_1 = P_m(-\Delta)(2\pi)^d$, $L_2 = Q_n(-\Delta)$, где Δ — оператор Лапласа. Из формулы Грина для операторов $P = P_m(-\Delta)$ и $Q = Q_n(-\Delta)$ в этом случае можно получить явную формулу прогноза, используя соотношение (11). Определим последовательность операторов $\delta^{(i)}$, $i = 0, 1, \ldots$, следующим образом:

$$\delta^{(0)}\varphi = \varphi, \quad \delta^{(1)}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}, \quad \delta^{(2)}\varphi = \Delta\varphi, \quad \delta^{(3)}\varphi = \frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}\Delta\varphi$$

и т. д., где $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ — дифференцирование по внутренней нормали к S. Далее, пусть

$$T^{[L]}\varphi = (-1)^{L+1} \sum_{k-L/2 \leqslant i \leqslant k} t_i \delta^{(2i-2k+L)}\varphi,$$

где $T = \sum_{i=0}^{k} t_i \Delta^i$ — оператор порядка $2k$. Отметим, что для оператора T справедлива формула Грина

$$\int_G (uTv - vTu)\, d\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{2k-1} \int_S \delta^{(i)} u T^{[2k-1-i]} v\, d\sigma, \tag{15}$$

которую легко получить из формулы Грина для оператора Δ. Обозначим $\mu_P(\cdot, \cdot)$, $\mu_Q(\cdot, \cdot)$ функции Грина операторов P, Q для области G, $\overline{\mu}_Q$ обозначим функцию Грина Q для области G^+. Функции μ_Q, μ_Q и $\overline{\mu}_Q$ отвечают нулевым граничным условиям на поверхности S. Введем обозначения

$$p_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = P_{\mathbf{y}}^{[2m-1-j]} (P_{\mathbf{x}}^{[2m-1-i]} \mu_P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{s}})_{\mathbf{y}=\mathbf{s}'},$$
$$q_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = \delta_{\mathbf{y}}^{(j)} (Q_{\mathbf{x}}^{[2n-1-i]} \mu_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{s}})_{\mathbf{y}=\mathbf{s}'},$$
$$r_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') = P_{\mathbf{y}} \delta_{\mathbf{y}}^{(j)} (Q_{\mathbf{x}}^{[2n-1-i]} \mu_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |_{\mathbf{x}=\mathbf{s}'})_{\mathbf{y}=\mathbf{s}},$$
$$L_i(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = Q_y^{[2n-1-i]} \overline{\mu}_Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) |_{\mathbf{y}=\mathbf{s}}.$$

Индекс у оператора указывает переменную, к которой он применяется. Буквой $\mathbf{s}$ обозначается точка на S. В формуле для l_i дифференцирование производится по внешней нормали.

Теорема 2. *Если $\xi(\mathbf{x})$ — однородное изотропное случайное поле с рациональной спектральной плотностью вида (14), то наилучший в среднем квадратичном линейный прогноз $\hat{\xi}(\mathbf{x})$ по наблюдениям поля в ограниченной области G с гладкой жордановой границей S, где $\mathbf{x} \notin G$, может быть вычислен по формуле*

$$\hat{\xi}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{n-m-1} \int_S a_i(\mathbf{s}) \xi^{(i)}(\mathbf{s})\, d\sigma + \int_G \xi(\mathbf{z}) u(\mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \tag{16}$$

где $u(\mathbf{z})$ — P-гармоническая в G функция, т. е. $Pu = 0$ в G, неизвестные коэффициенты $a_i(\mathbf{s}) = a_i(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ принадлежат $\mathscr{L}_2(S)$ и граничные значения $u^{(i)}(\mathbf{s}) = u^{(i)}(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \delta^{(i)} u(\mathbf{z}) |_{\mathbf{z}=\mathbf{s}}$ могут быть определены из векторного интегрального уравнения

$$\int_S \mathbf{K}(\mathbf{s}', \mathbf{s}) \mathbf{h}(\mathbf{s}')\, d\sigma' = \mathbf{b}(\mathbf{s}), \tag{17}$$

где $\mathbf{h}(\mathbf{s}) = (a_0(\mathbf{s}), \ldots, a_{n-m-1}(\mathbf{s}), \; u^{(0)}(\mathbf{s}), \ldots, u^{(m-1)}(\mathbf{s}))^T$ — вектор-столбец неизвестных параметров, компоненты вектора-строки $\mathbf{b}(\mathbf{s})$ равны $b_i(\mathbf{s}) = P_{\mathbf{x}} l_i(\mathbf{s}, \mathbf{x})$, $i = 0, \ldots, n-1$, а элементы матрицы $\mathbf{K}$ равны

$$K_{ij}(\mathbf{s}', \mathbf{s}) = \begin{cases} r_{ij}(\mathbf{s}', \mathbf{s}), & j = 0, \ldots, n-m-1, \\ -\sum_{k=0}^{2m-1} \int_S p_{jk}(\mathbf{s}', \mathbf{s}'') q_{ik}(\mathbf{s}'', \mathbf{s})\, d\sigma'', & j = n-m, \ldots, n-1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы 2. Применяя теорему 1, получаем, что $\hat{\xi}(\mathbf{x})$ можно представить в виде (16), где $a_i \in \mathscr{L}_2(S)$, $u \in C^\infty(\overline{G})$, $Pu = 0$. Умножив (16) на $\xi(\mathbf{y})$, где $\mathbf{y} \in G$, и взяв от обеих частей равенства математическое ожидание, получим, следуя [4]:

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n-m-1} \int_S a_i(\mathbf{s}) \delta_{\mathbf{s}}^{(i)} R(\mathbf{s}, \mathbf{y})\, d\sigma + \int_G u(\mathbf{z}) R(\mathbf{z}, \mathbf{y})\, d\mathbf{z}. \tag{18}$$

Пусть $R_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — корреляционная функция, соответствующая спектральной плотности $1/Q_n(|\lambda|^2)$. Тогда

$$R(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P_{\mathbf{x}} R_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \tag{19}$$

Применяя это соотношение к первому слагаемому в (18), и выражая производные произвольного порядка $R_0^{(i)}(\mathbf{s}, \mathbf{y}) = \delta_{\mathbf{z}}^{(i)} R_0(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ через функцию Грина $\mu_Q(\cdot, \cdot)$, получим, что оно имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_S R_0^{(i)}(\mathbf{s}', \mathbf{y}) \sum_{j=0}^{n-m-1} \int_S r_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}') a_j(\mathbf{s})\, d\sigma\, d\sigma'. \tag{20}$$

Во втором слагаемом заменим R (z, y) по формуле (19) и выразим u (z) как решение уравнения $Pu = 0$ через производные $\mu_p(\cdot, \mathbf{z})$ и $u(\cdot)$ на границе. Применяя затем формулу (15) к оператору $\mathbf{P}$, получаем, что второе слагаемое представляется в виде

$$-\sum_{j=0}^{2m-1}\int_S R_0^{(j)}(\mathbf{s}', \mathbf{y})\sum_{i=0}^{m-1}\int_S u^{(i)}(\mathbf{s})\,p_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\,d\sigma\,d\sigma'.$$

Учитывая равенство

$$R_0^{(j)}(\mathbf{s}', \mathbf{y}) = \sum_{k=0}^{n-1}\int_S R_0^{(k)}(\mathbf{s}'', \mathbf{y})\,q_{kj}(\mathbf{s}', \mathbf{s}'')\,d\sigma''$$

получим, что второе слагаемое равно

$$-\sum_{k=0}^{n-1}\int_S R_0^{(k)}(\mathbf{s}'', \mathbf{y})\sum_{j=0}^{2m-1}\int_S q_{kj}(\mathbf{s}', \mathbf{s}'')\sum_{i=0}^{m-1}\int_S u^{(i)}(\mathbf{s})\,p_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{s}')\,d\sigma\,d\sigma'\,d\sigma''. \qquad (21)$$

Соотношения (20), (21) дают разложение R (x, y) по базисной системе $\mathscr{P} = \{R_0^{(i)}(\mathbf{s}, \mathbf{y})\}_{i=0\div n-1}$. Коэффициенты разложения определяются при этом однозначно. В самом деле, если для некоторых $c_i(\mathbf{s}) \in \mathscr{L}_2(S)$ имеем:

$$I(\mathbf{y}) = \int_S \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\mathbf{s})\,R_0^{(k)}(\mathbf{s}, \mathbf{y})\,d\sigma = 0 \quad \text{при} \quad \mathbf{y} \in G,$$

то для случайного поля $\xi_0(\mathbf{y})$, отвечающего корреляционной функции $R_0(\cdot, \cdot)$, получим: $\sum_{k=0}^{n-1}\int_S c_k(\mathbf{s})\,\xi^{(k)}(\mathbf{s})\,d\sigma = 0$, а значит, $I(\mathbf{y}) = 0$ для всех $\mathbf{y} \in E^d$. Умножая последнее равенство на $Q(-\Delta)\varphi(\mathbf{y})$, где φ — любая функция из $\mathscr{D}$, получим, учитывая, что $(2\pi)^d Q(-\Delta) R_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$:

$$\int_S \sum_{k=0}^{n-1} c_k(\mathbf{s})\,\delta^{(k)}\varphi(\mathbf{s})\,d\sigma = 0,$$

откуда $c_i(\mathbf{s}) \equiv 0$, $i = 0, \ldots, n-1$. Другое разложение R_0 (x, y) по системе $\mathscr{P}$ можно получить следующим образом.

Функцию R_0 (x, y) как решение уравнения $Q_{\mathbf{x}} R_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ при фиксированном **y** в области G^+ можно представить в следующем виде:

$$R_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=0}^{n-1}\int_S R_0^{(i)}(\mathbf{s}, \mathbf{y})\,L_i(\mathbf{s}, \mathbf{x})\,d\sigma$$

Применяя к обеим частям последнего равенства оператор P по переменной **x**, получим разложение R (x, y) по $\mathscr{P}$. Приравнивая друг к другу коэффициенты для двух разложений, получаем уравнение (17) для определения неизвестных параметров.

Пусть теперь $\{a_i(\mathbf{s}),\ i = 0, \ldots, n-m-1;\ u^{(i)}(\mathbf{s}),\ i = 0, \ldots, m-1\}$ — некоторое решение уравнения (17). Существование такого решения было указано выше. Проводя изложенные выкладки в обратном порядке, мы получим, что для любого решения (17) справедливо (18), а значит, выражение справа в (16) действительно есть $\tilde{\xi}(\mathbf{x})$.

Теорема 2 доказана.

Автор благодарит Г. М. Молчана за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Питербарг Л. И.* Псевдомарковские гауссовские случайные поля.— Вестник МГУ, 1976, № 1, с. 18—26.
2. *Рамм А. Г.* Исследование одного класса интегральных уравнений.— Докл. АН СССР, 1976, т. 230, № 2, с. 283—286.
3. *Молчан Г. М.* Гауссовские случайные поля с марковским свойством: Дисс. на соиск. уч. ст. канд. физ.-матем. наук, М., 1974, 150 с.

4. *Pitt L. D.* A Markov property for Gaussian processes with a multidimensional parameter.— Arch. Rational Mech. Anal., 1971, v. 43, № 5, p. 367—391:
5. *Розанов Ю. А.* Марковские случайные поля. М.: Наука, 1981, 254 с.
6. *Levinson N., McKean H. P. Jr.* Weighted trigonometrical approximation on R^1 with application to the germ field of a stationary Gaussian noise.— Acta Math., 1964, v. 112, p. 99—143.
7. *Яглом А. М.* Экстраполирование, интерполирование и фильтрация стационарных случайных процессов с рациональной спектральной плотностью.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1955, с. 237—278.
8. *Питербарг Л. И.* Структура пространства прогноза одного класса случайных полей.— В сб.: Случайные процессы и поля. М.: МГУ, 1980, с. 71—77.
9. *Иосида К.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1967, 624 с.
10. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965, 757 с.
11. *Шварц Л.* Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения. М.: Мир, 1964, 142 с.

Поступила в редакцию
30.I.1980

ON THE PREDICTION OF A CLASS OF RANDOM FIELDS

PITERBARG L. I. (MOSCOW)

(*Summary*)

We consider a class of random fields which is a generalization of a class of homogeneous random fields with rational spectral density. This class contains Gaussian Markov fields. In the Gaussian case the splitting σ-algebras for a bounded region with smooth boundary are described. We deduce also an explicit linear prediction formula (based on the observations in the bounded region) for a homogeneous isotropic field with rational spectral density.

ПОЛУМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ВЕКТОРНЫМИ ДОХОДАМИ

ВИНОГРАДСКАЯ Т. М., ГЕНИНСОН Б. А., РУБЧИНСКИЙ А. А.

Рассматриваются полумарковские процессы принятия решений (ПМППР) с векторными доходами; используемые терминология и предположения относительно ПМППР следуют [1]. За единицу времени пребывания в состоянии i $(i \in S = \{1, \ldots, N\})$ при решении $k \in K_i$ система получает векторный доход $\mathbf{r}_i^k = (r_i^k(1), \ldots, r_i^k(m))$. Определим аналоги среднего дохода и оптимальной стратегии в векторном случае. Рассмотрим ПМППР$_j$ с одномерными доходами $r_i^k = r_i^k(j)$; при начальном состоянии $i \in S$ и стратегии π получим доход $v_i^j(t, \pi)$, накопленный за время t и $u_i^j(\pi) = \lim\limits_{t\to\infty} (v_i^j(t, \pi)/t)$ — средний доход за единицу времени. Аналогами скалярных величин $v_i^j(t, \pi)$ и $u_i^j(\pi)$ являются m-мерные векторы

$$\mathbf{v}^i(t, \pi) = (v_i^1(t, \pi), \ldots, v_i^m(t, \pi)), \quad \mathbf{u}^i(t, \pi) = (u_i^1(t, \pi), \ldots, u_i^m(t, \pi)).$$

Введем понятия оптимальности для ПМППР с векторными доходами.

Определение 1. Пусть R — бинарное отношение на E_m. Стратегию π^* назовем *R-оптимальной*, если

$$(\forall i \in S, \forall \pi) [\neg\, \mathbf{u}^i(\pi) R \mathbf{u}^i(\pi^*)].$$