И. С. Гуцул, В. С. Макаров, Об одном свойстве федоровских групп пространства Лобачевского, *Тр. МИАН СССР*, 1978, том 148, 106–108

И. С. ГУЦУЛ, В. С. МАКАРОВ

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФЕДОРОВСКИХ ГРУПП ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

1. Одной из основных теорем математической кристаллографии является теорема Шенфлиса—Бибербаха, состоящая в том, что каждая федоровская группа Г n-мерного евклидова пространства, т. е. дискретная группа движений с компактной фундаментальной областью, содержит федоровскую подгруппу H, состоящую целиком из параллельных переносов. Не так давно появились относительно простые доказательства этой теоремы [1, 2]. Аналогом теоремы Шенфлиса—Бибербаха для n-мерного пространства Лобачевского могло бы служить утверждение: всякая федоровская группа Г движений n-мерного пространства Лобачевского содержит федоровскую подгруппу H, состоящую целиком из сдвигов. В настоящей заметке мы покажем, что теорема Шенфлиса—Бибербаха верна (в формулировке, приведенной выше) для двумерного пространства Лобачевского и неверна при $n \geqslant 3$, более того, при $n \geqslant 3$ вообще не существует федоровской группы, состоящей из одних сдвигов.

2. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма*. *Пусть Г — группа матриц порядка n с конечным числом образующих (матрицы не обязаны быть вещественными, и от Г не требуется дискретности); тогда Г содержит нормальный делитель H конечного индекса, который не содержит элементов конечного порядка, отличных от единичного элемента* [3].

Покажем, что теорема Шенфлиса—Бибербаха верна для двумерного пространства Лобачевского. Пусть Г — федоровская группа плоскости Лобачевского. Обозначим через G ее подгруппу собственных движений — нормальный делитель индекса 2 в Г. Согласно лемме *, Г содержит нормальный делитель K конечного индекса, не имеющий элементов конечного порядка, отличных от единичного элемента (представление группы движений плоскости Лобачевского группой вещественных унимодулярных матриц второго порядка легко получить [4]). Пересечение $G \cap K = H$ есть нормальный делитель конечного индекса в Г. Все его элементы — сдвиги, ибо только они являются собственными движениями бесконечного порядка плоскости Лобачевского (орициклических поворотов не допускает компактность фундаментальной области). Поскольку индекс H в Г конечен, то H — федоровская группа. Следовательно, нормальный делитель H удовлетворяет всем требованиям теоремы.

3. Теорема. *В трехмерном пространстве Лобачевского не существует федоровской группы, все элементы которой являются сдвигами.*

Лемма 1. *Произведение поворота V_1 на угол $\varphi = \pi$ вокруг оси u_1 и сдвига t на вектор* **a** *вдоль прямой u, пересекающей ортогонально пря-*

мую u_1, есть поворот V_2 на тот же угол $\varphi=\pi$ вокруг прямой u_2, являющейся образом прямой u_1 при сдвиге на вектор $\mathbf{a}/2$.

Доказательство леммы 1 легко усматривается из разложения движений V_1 и t на отражения; разложим вращение V_1 и сдвиг t на отражения от плоскостей: $V_1=m_2m_1$, $t=m_4m_3$, и подберем плоскость ω_2 отражения m_2 совпадающей с плоскостью ω_3 отражения m_3, т. е. возьмем ее так, чтобы она содержала ось U_1 и была перпендикулярна оси U. Тогда $tV_1=m_4m_3m_2m_1=m_4m_1$. Но так как произведение двух отражений в пересекающихся плоскостях есть поворот на удвоенный угол между ними вокруг прямой их пересечения и так как плоскости ω_1 и ω_4 ортогональны, то $tV_1=V_2$ — поворот на угол $\varphi=\pi$ вокруг прямой U_2.

Лемма 2. *Произведение двух поворотов, V_1 и V_2, на угол $\varphi=\pi$ вокруг скрещивающихся осей есть винтовое движение.*

Пусть U_1 и U_2 — оси поворотов V_1 и V_2, причем U_1 и U_2 — скрещивающиеся прямые и U_3 — их общий перпендикуляр.

Обозначим через t_3 сдвиг на вектор $\mathbf{a}$, равный удвоенному расстоянию от прямой U_1 до прямой U_2, и через V — поворот на угол $\varphi=\pi$ вокруг прямой U, являющейся образом прямой U_2 при сдвиге на вектор $-\mathbf{a}/2$. В этих обозначениях, согласно лемме 1, будем иметь $V_2=t_3V$, а для результирующего движения мы получим $V_2V_1=t_3VV_1$. Но так как U и U_1 перпендикулярны U_3, V_1 и V — повороты на угол $\varphi=\pi$, то произведение VV_1 является поворотом V_3 на удвоенный угол между пересекающимися прямыми U_1 и U вокруг прямой U_3. Окончательно: $V_2V_1=t_3VV_1=t_3V_3$, т. е. произведение двух поворотов на угол $\varphi=\pi$ со скрещивающимися осями есть винтовое движение, осью которого является общий перпендикуляр исходных прямых, вектор хода винта равен удвоенному расстоянию, а угол поворота равен удвоенному углу между осями.

Лемма 3. *Произведение двух сдвигов со скрещивающимися осями есть винтовое движение.*

Пусть нам даны два сдвига, t_1 и t_2, на векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ вдоль скрещивающихся осей U_1 и U_2. Пусть прямая U служит их общим перпендикуляром. Для того чтобы найти движение, являющееся произведением сдвигов t_1 и t_2, разложим данные сдвиги на пары отражений от плоскостей, ортогональных соответствующим осям: $t_1=m_2m_1$, $t_2=m_4m_3$; подберем плоскость ω_2 второго отражения m_2 у первого сдвига t_1 и плоскость ω_3 первого отражения m_3 у второго сдвига t_2 так, чтобы эти плоскости ω_2 и ω_3 пересекались по прямой U — общему перпендикуляру осей U_1 и U_2. Тогда $t_2t_1=m_4m_3m_2m_1$; произведение m_3m_2 есть поворот вокруг прямой U на удвоенный угол между плоскостями ω_2 и ω_3, равный углу между прямыми U_1 и U_2 (U_1 перпендикулярна ω_2 и U_2 перпендикулярна ω_3). Этот поворот можно представить и как произведение двух отражений, m_2' и m_3', в плоскостях ω_2' и ω_3', определяемых прямой U и осями U_1 и U_2 соответственно. Тогда $t_2t_1=m_4m_3'm_2'm_1$. Но произведение $m_2'm_1$ есть поворот V' на угол $\varphi=\pi$ вокруг прямой U' пересечения плоскостей ω_1 и ω_2'. Аналогично m_4m_3' есть поворот на угол $\varphi=\pi$ вокруг оси U'', по которой пересекаются плоскости ω_4 и ω_3'. Вопрос, таким образом, сводится к нахождению произведения двух поворотов на угол $\varphi=\pi$ вокруг осей U' и U''.

Покажем, что оси U' и U'' скрещиваются. Предположим противное, т. е. что они лежат в одной плоскости τ. Тогда прямые U', U'', U являются прямыми попарных пересечений плоскостей ω_2', ω_3', τ (которые обязательно различны, так как прямые U_1 и U_2 скрещиваются) и принадлежат одной связке [4]. Но они не могут принадлежать эллиптической или параболической связке, ибо прямые U и U' (а также U и U'') не пересекаются и не параллельны. Не могут они принадлежать и гиперболической связке, ибо в этом случае прямая U_1, являющаяся общим перпендикуляром прямых U, U', и прямая U_2, являющаяся общим перпендикуляром прямых U, U'', должны быть компланарными [5], а это противоречит условию. Следовательно, прямые U' и U'' скрещиваются. Тогда, по лемме 2, произведение двух поворотов на угол $\varphi=\pi$ вокруг скрещивающихся осей будет винтовым движением.

Доказательство теоремы. Пусть Γ — федоровская группа движений пространства Лобачевского, все элементы которой являются сдвигами. Покажем, что в группе Γ имеются два сдвига со скрещивающимися осями. Действительно, возьмем два сдвига, оси которых не совпадают (они существуют, так как Γ — федоровская группа). Если оси их скрещиваются, то получим требуемое утверждение; если же их оси компланарны, то возьмем третий сдвиг, ось которого не лежит в плоскости осей первых двух (так как Γ — трехмерная федоровская группа, то такой сдвиг существует). Если ось третьего сдвига скрещивается с осью одного из первых двух, то получим нужное утверждение; в противном случае оси всех сдвигов входят в эллиптическую или гиперболическую связку (они не могут входить в параболическую связку ввиду того, что группа федоровская). Но тогда образ оси первого сдвига при втором сдвиге также будет осью сдвига из Γ и, кроме того, будет скрещиваться с осью третьего сдвига. Итак, в Γ всегда имеются два сдвига, t_1 и t_2, оси которых скрещиваются.

По лемме 3, $g=t_2t_1$ будет винтовым движением, т. е. мы получили противоречие с тем, что все элементы группы Γ — сдвиги. Полученное противоречие доказывает теорему.

4. Легко видеть, что эта теорема верна в n-мерном пространстве Лобачевского при $n \geqslant 3$. Отсюда следует неверность теоремы Шенфлиса—Бибербаха для n-мерного пространства Лобачевского при $n \geqslant 3$.

Заметим, что при доказательстве основной теоремы существенно использовалась только n-мерность группы, поэтому доказано более сильное утверждение: в n-мерном пространстве Лобачевского ($n \geqslant 3$) не существует n-мерной группы движений, состоящей только из сдвигов.

Литература

1. Делоне Б. Н., Штогрин М. И. Упрощение доказательства теоремы Шенфлиса.— Докл. АН СССР, 1974, т. 219, № 1, с. 95—98.
2. Винберг Э. Б. О теореме Шёнфлиса—Бибербаха.— Докл. АН СССР, 1975, т. 221, № 5, с. 1013—1015.
3. Selberg A. On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces.— In: Contributions of function theory. Bombay, 1960, p. 147—164.
4. Selberg A. Recent developments in the theory of discontinuous groups of motions of symmetric spaces.— Lect. Notes Math., 1970, vol. 118, p. 99—120.
5. Каган В. Ф. Основания геометрии. Т. I. М.—Л., 1949. 492 с.