

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Ф. Лазуткин, Аналитические интегралы полустандартного отображения и расщепление сепаратрис, *Алгебра и анализ*, 1989, том 1, выпуск 2, 116–131

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.174

19 марта 2025 г., 18:53:45



В. Ф. Лазуткин

## АНАЛИТИЧЕСКИЕ ИНТЕГРАЛЫ ПОЛУСТАНДАРТНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И РАСЩЕПЛЕНИЕ СЕПАРАТРИС

При малых возмущениях интегрируемой гамильтоновой системы в фазовом пространстве последней появляются стохастические слои. Если возмущение аналитично, то толщина стохастического слоя имеет порядок  $\exp(-\text{const}/\sqrt{\epsilon})$ , где  $\epsilon$  — малый параметр, характеризующий возмущение. Появление стохастического слоя связано с тем, что сепаратрисы возникающих гиперболических периодических траекторий имеют трансверсальные пересечения под углами, которые оцениваются указанной величиной. Ранее автором была получена асимптотика при  $\epsilon \rightarrow 0$  угла расщепления сепаратрис для одной, интенсивно изучаемой в последнее время, модельной динамической системы — стандартного отображения. Вывод формулы опирался на гипотезу о существовании аналитического интеграла в слое около сепаратрисы, так называемого полустандартного отображения. Настоящая статья содержит доказательство этой гипотезы.

### Введение

При малых возмущениях интегрируемой гамильтоновой системы большая часть квазипериодических движений по инвариантным торам сохраняется. Именно сохраняются торы, частоты движения по которым несоизмеримы, и, более того, удовлетворяют некоторому арифметическому условию нерезонансности. Изучением этого явления занимается теория КАМ [1]. В системах с числом степеней свободы  $> 1$  торы с „плотными” частотами в случае возмущения общего положения разрушаются. Опишем картину этого разрушения, ограничившись, для простоты, системами с двумя степенями свободы. В невозмущенной интегрируемой системе все траектории движения по резонансному тору периодические (отношение двух частот есть рациональное число). Они образуют однопараметрическое семейство окружностей на торе и поэтому являются вырожденными. В системах же общего положения вырожденных периодических траекторий нет [2]. Это означает, что при возмущении, как правило, от указанного семейства периодических траекторий остается лишь конечное число, часть которых приобретает эллиптический тип, часть — гиперболический.

Приведем необходимые определения. Для этого удобно перейти к так называемому „сечению Пуанкаре”. Рассматриваемый инвариантный тор целиком находится в инвариантном трехмерном подмногообразии постоянной энергии  $H^{-1}(E)$ , где  $H$  — функция Гамильтона. Существует двумерное подмногообразие  $\Pi$ , содержащееся целиком в  $H^{-1}(E)$ , такое, что пересечение  $\Pi$  с тором есть окружность  $S$  и траектории гамильтонового потока пересекают  $\Pi$  трансверсально. Тогда в некоторой окрестности  $\mathcal{U}$  окружности  $S$  в  $\Pi$  возникает диффеоморфизм последования  $f: \mathcal{U} \rightarrow \Pi$ , который сопоставляет

Ключевые слова: динамические системы, неинтегрируемые гамильтоновы системы, стохастичность, расщепление сепаратрис.

точке  $z \in \mathcal{U}$  следующую за ней точку пересечения с  $\Pi$  траектории потока, проходящей через  $z$ . Из гамильтоновости потока можно вывести существование на  $\Pi$  инвариантной относительно  $f$  2-формы (формы площади). Если рассматриваемый тор резонансный, то окружность  $S$  вся состоит из периодических точек фиксированного периода, скажем,  $n$ , т. е.  $f^n(z) = z$  для всех  $z \in S$ . Для произвольной периодической точки  $z_0$  периода  $n$  определим *мультипликаторы*  $\lambda$  и  $\lambda^{-1}$  как собственные числа касательного отображения  $T_{z_0} f^n : T_{z_0} \Pi \rightarrow T_{z_0} \Pi$ . Точка  $z_0$  называется *эллиптической*, если  $\lambda$  не вещественно (и  $|\lambda| = 1$ ), *гиперболической*, если  $\lambda$  не принадлежит единичной окружности на комплексной плоскости, *вырожденной*, если  $\lambda = \pm 1$ . Периодическая траектория отображения  $f$  есть след на  $\Pi$  периодической траектории исходного гамильтонового потока. Так как ее мультипликаторы не зависят от выбора секущей поверхности  $\Pi$ , то указанная терминология переносится на периодические траектории потока. Возмущенный поток также высекает на  $\Pi$  отображение последования, сохраняющее ту же форму площади. Для него вместо инвариантной окружности, состоящей из периодических точек периода  $n$ , возникает конечное множество эллиптических и гиперболических периодических траекторий того же периода. Как показывает анализ (см., например, [3]), это множество непусто, и число эллиптических траекторий совпадает с числом гиперболических. Каждая эллиптическая точка окружена системой новых инвариантных относительно  $n$ -й итерации преобразования маленьких окружностей, каждая гиперболическая точка обладает устойчивым  $W^s(z_0) = \{z \in \mathcal{U} : f^{nk}(z) \rightarrow z_0, k \rightarrow +\infty\}$  и неустойчивым  $W^u(z_0) = \{z \in \mathcal{U} : f^{nk}(z) \rightarrow z_0, k \rightarrow -\infty\}$  многообразиями (сепаратрисами), которые представляют собой образы инъективных погружений  $\mathbb{R}$  в  $\Pi$  и на которых преобразование  $f^n$  гладко сопряжено с умножением на  $\lambda$  и  $\lambda^{-1}$  соответственно. Устойчивые и неустойчивые многообразия всех гиперболических точек периода  $n$ , образовавшихся на месте окружности  $S$ , сплетаясь, формируют своего рода „ожерелье”, содержащее в своих звеньях острова устойчивости около эллиптических точек (рис. 1). Следует отметить, что такого рода ожерелья образуются на месте каждой вырожденной окружности невозмущенной интегрируемой системы. Поэтому „ожерелья” всевозможных порядков плотно насыщают секущую поверхность возмущенной системы.

Еще одно свойство системы общего положения заключается в том, что сепаратрисы гиперболических точек пересекаются трансверсально, что приводит к образованию так называемого *стохастического слоя* около сепаратрисы — ее замыкания, которое является, по-видимому, бесконечносвязным инвариантным множеством сложного строения, движение по которому носит хаотический характер.

Описанные два эффекта имеют совершенно разный порядок по величине. Если характеризовать величину возмущения малым положительным параметром  $\epsilon$ , то размеры ожерелья в поперечном направлении, или, что то же самое, поперечные диаметры островов, имеют порядок  $\sqrt{\epsilon}$ . Толщина же стохастического слоя в аналитическом случае оценивается величиной  $\exp\{-\text{const}/\sqrt{\epsilon}\}$ . Кроме того, эти размеры очень быстро стремятся к нулю с ростом периода  $n$ . Для выяснения природы второго описанного явления — экспоненциально малого расщепления сепаратрис, приводящего к образованию стохастического слоя, — полезно обратиться к исследованию модели, известной в литературе как отображение Тейлора—Чирикова—Грина [4, 5], или *стандартное преобразование*. Эта модель представляет собой сохраняющее площадь отображение  $f_{SM} : (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R} \rightarrow (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}$ , определяемое формулами

$$f_{SM}(x, y) = (x_1, y_1), \quad x_1 = x + y_1 \pmod{2\pi}, \quad y_1 = y + \epsilon \sin x. \quad (0.1)$$

При малых положительных  $\epsilon$  точка с координатами  $(0, 0) = (2\pi, 0)$  является неподвижной гиперболической точкой. Рассмотрим отрезки ее устойчивого и неустойчивого

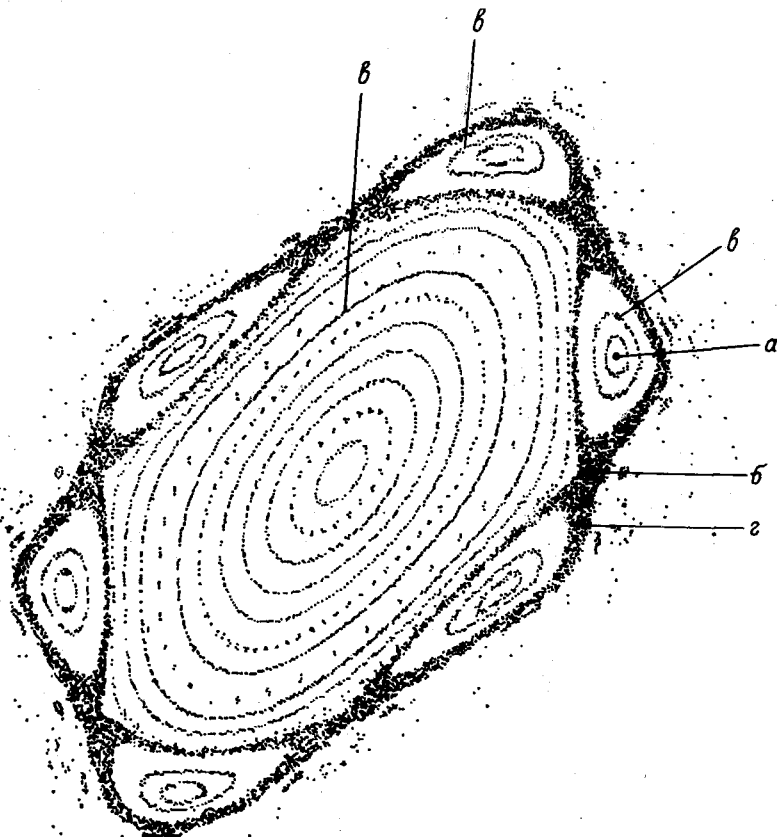


Рис. 1. Ожерелье, возникшее при возмущении окружности, составленной из периодических точек периода  $\delta$ .  
 $a$  — эллиптическая периодическая точка,  $b$  — гиперболическая периодическая точка,  $e$  — инвариантная кривая,  $z$  — стохастический слой, заметаемый сепаратрисой, его толщина имеет порядок  $\exp(-\text{const}/\sqrt{\epsilon})$ .

многообразия, расположенные в верхней полуплоскости  $y \geq 0$  (рис. 2). Можно показать, используя соображения симметрии, что они имеют точку пересечения  $z_{\Gamma}$ , проектирующуюся в точку  $s$  с координатой  $\pi$  на оси  $x$ .

Примем за меру расщепления сепаратрис  $W^u$  и  $W^s$  величину угла  $\alpha$  их пересечения в точке  $z_{\Gamma}$ . В работе [6] выведена следующая асимптотическая при  $\epsilon \rightarrow 0$  формула для  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\pi |\Theta_1|}{\epsilon} e^{-\pi^2/\sqrt{\epsilon}} \left\{ 1 + O(\epsilon^{\frac{1}{8}-\delta}) \right\}. \quad (0.2)$$

Здесь  $\delta \in ]0, 1/8[$  произвольно, погрешность в (0.2) зависит от  $\delta$ . Константа  $|\Theta_1| = 1118,82770595$  вычислена в [7] с помощью ЭВМ. Приведем основные моменты вывода формулы (0.2). Изменение масштаба  $X = x$ ,  $Y = \epsilon^{-1/2}y$  приводит систему (0.1) к виду

$$\frac{X_1 - X}{\sqrt{\epsilon}} = Y_1, \quad \frac{Y_1 - Y}{\sqrt{\epsilon}} = \sin X, \quad (0.3)$$

что представляет собой разностную аппроксимацию системы дифференциальных уравнений маятника:

$$\dot{X} = Y, \quad \dot{Y} = \sin X. \quad (0.4)$$

Система (0.4) обладает сепаратрисным решением  $X_0(t) = \arctg e^t$ , которое хорошо аппроксимирует обе сепаратрисы  $W^u$  и  $W^s$  системы (0.3). Мы можем уточнить это приближение, пытаясь найти соответствующее решение (0.3) в виде ряда по степеням  $\epsilon$  и беря в качестве главного члена  $X_0(t)$ . Оказывается, что можно построить бесконечный ряд, и во всех членах, как и в первом, никакого расщепления сепаратрис не происходит. Это и неудивительно, так как истинная формула (0.2) для угла расщепления содержит экспоненту. Для выявления экспоненциально малых эффектов требуется выход в комплексную область по переменной  $t$ . Приближенное решение дифференциального уравнения (0.4) перестает годиться там, где оно имеет особенности. Ближайшие к вещественной оси особенности  $X_0(t)$  находятся в точках  $\pm i\pi/2$ . В отличие от (0.4) усы сепаратрис  $W^{u,s}$  системы разностных уравнений (0.3) можно записать в параметрическом виде  $X = X_{u,s}(t)$ ,  $Y = Y_{u,s}(t)$ ,  $t \in \mathbb{C}$ , где  $X_{u,s}$ ,  $Y_{u,s}$  — целые функции, причем преобразование  $(X, Y) \mapsto (X_1, Y_1)$  соответствует на сепаратрисе сдвигу параметра  $t \mapsto t + \ln \lambda$ , где  $\lambda = 1 + \epsilon/2 + \sqrt{\epsilon + \epsilon^2/4}$  — мультипликатор неподвижной точки  $(0, 0)$ . (Этот результат нетрудно вывести из теоремы Мозера [8]). В частности,  $X_{u,s}(t)$  не имеет никаких особенностей в окрестности точек  $\pm i\pi/2$ . Именно там  $X_u(t)$  и  $X_s(t)$  различаются достаточно сильно, чтобы этот эффект можно было измерить. Для этого надо построить их асимптотику в этих зонах другими средствами. Введем новые переменные  $u, v$  по формулам

$$x = -i \ln \frac{\epsilon}{2} + iu, \quad y = iv. \quad (0.5)$$

Тогда преобразование (0.1) примет следующий вид:

$$u_1 = u + v_1 \pmod{2\pi i}, \quad v_1 = v + e^u - \frac{\epsilon^2}{4} e^{-u}. \quad (0.6)$$

Интересующая нас область фазового пространства соответствует значениям переменных  $u, v$  порядка 1. При малых  $\epsilon$  последний член в (0.6) пренебрежимо мал, и мы получим хорошую аппроксимацию нашей системы, если его вычеркнем:

$$u_1 = u + v_1 \pmod{2\pi i}, \quad v_1 = v + \exp(u). \quad (0.7)$$

Преобразование  $f_{SSM} : (u, v) \mapsto (u_1, v_1)$  пространства  $(\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$  в себя, задаваемое формулами (0.7), называют *полустандартным*. Оно впервые было введено Гринном и Персивалем [9, 10] при исследовании естественной границы КАМ-кривых в комплексной области. Как показывает исследование (см. [6] и § 1 настоящей работы), полустандартное преобразование имеет две выделенные комплексные инвариантные кривые  $\Gamma^u$  и  $\Gamma^s$ , приближающие (после замены (0.5)) сепаратрисы  $W^u$  и  $W^s$  в интересующей нас области. Кривые  $\Gamma^{u,s}$  мы также будем называть сепаратрисами, хотя они и не являются устойчивыми или неустойчивыми многообразиями никаких периодических точек. Численное исследование показывает, что  $\Gamma^u$  и  $\Gamma^s$  представляют собой две различные инвариантные кривые, т. е. они в некотором смысле „расщеплены”.<sup>1</sup> Возникают два вопроса: 1) в каких терминах выразить и измерить это расщепление, 2) как затем измеренные расщепления пересчитать в угол расщепления сепаратрис  $W^u$  и  $W^s$ ? Ответ на первый вопрос следующий. Надо построить специальным образом нормированный аналитический интеграл  $\mathfrak{E}(u, v)$  в слое около сепаратрисы  $\Gamma^u$ , записать уравнение  $\Gamma^s$  параметрически в виде  $u = u_+(x)$ ,  $v = v_+(x)$ ,  $x \in \mathbb{C}$ , так, что преобразование (0.7) на

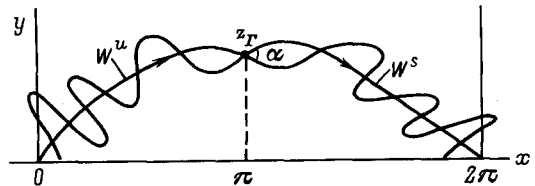


Рис. 2. Картина пересечения сепаратрис стандартного отображения.

<sup>1</sup> Недавно автором доказано, что для настоящих сепаратрис стандартного отображения факт расщепления (несовпадение  $W^u$  и  $W^s$ ) обусловлен геометрией фазового пространства (см. [11]).

$\Gamma^s$  выражается в терминах переменной  $x$  как сдвиг  $x \mapsto x + 1$ , и рассмотреть функцию  $\Theta(x) = \mathfrak{E}(u_+(x), v_+(x))$ . Если наложить на  $u_+(x), v_+(x)$  определенные асимптотические условия при  $\operatorname{Re} x \mapsto +\infty$ , то они определяются единственным образом. Функция  $\Theta$  периодическая по переменной  $x$  с периодом 1 и, как следует из свойств взаимного расположения  $\Gamma^s$  и  $\Gamma^u$ , определена вне некоторой полосы  $|\operatorname{Im} x| \leq \text{const}$ . Разлагая ее в ряд Фурье в нижней полуплоскости, имеем

$$\Theta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Theta_n e^{-i2\pi n x}. \quad (0.8)$$

Упомянутые условия нормировки  $\mathfrak{E}$  влекут за собой единственность первого коэффициента в (0.8). Этот коэффициент и является мерой расщепления  $\Gamma^s$  и  $\Gamma^u$ . Именно его модуль входит в формулу (0.2). Ю. Б. Сурис доказал из соображений симметрии, что  $\Theta_1 = -i|\Theta_1|$ .

На второй поставленный вопрос можно ответить так. Надо построить аналогичный интеграл для стандартного отображения в окрестности  $W^u$ , „сшить” его с  $\mathfrak{E}$  в комплексной области и „спустить” „вмороженный” в интеграл образ  $W^s$  на вещественную часть фазового пространства. Подробности описанной процедуры читатель может найти в [6].

Центральным фактом, на который опираются эти построения, является существование обладающего нужными свойствами интеграла  $\mathfrak{E}$  в слое около сепаратрисы полустандартного отображения. Точная формулировка содержится в § 2. В работе [6] это утверждение было сформулировано в виде гипотезы. Цель настоящей работы — дать доказательство существования интеграла  $\mathfrak{E}$ .

## § 1. Сепаратрисы полустандартного отображения

Мы будем рассматривать полустандартное отображение  $f_{SSM} : (u, v) \mapsto (u_1, v_1)$  пространства  $(\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$  в себя, заданное формулами (0.7). Если  $\operatorname{Re} u \rightarrow -\infty$  и  $v$  мало, то траектории  $f_{SSM}$  похожи на траектории системы дифференциальных уравнений

$$u' = v, \quad v' = \exp(u). \quad (1.1)$$

Система (1.1) имеет следующие 2 специальных решения (мы выписываем только первую компоненту  $u$ ):

$$U_0(t) = -\ln(2 \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}), \quad U_{00}(t) = -\ln \frac{t^2}{2}. \quad (1.2)$$

Все остальные решения получаются из этих двух применением преобразования

$$u(x) \mapsto u(\alpha x + \beta) + \gamma, \quad \text{где } \alpha = \pm \exp(\gamma/2).$$

Из  $U_0$  получается общее двухпараметрическое решение, из  $U_{00}$  — особое однопараметрическое семейство. Так как во втором случае весь произвол сводится к сдвигу аргумента, фактически мы имеем дело с особой интегральной кривой системы (1.1).

Оказывается, система (0.7) также имеет „особые” интегральные кривые, но только две, а не одну, для которых  $U_{00}(x)$  является асимптотикой при  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$  соответственно. Записывая уравнение инвариантной кривой параметрически  $u = u_0(x)$ ,  $v = v_0(x)$  и требуя, чтобы  $f_{SSM}(u_0(x), v_0(x)) = (u_0(x+1), v_0(x+1))$ , мы получаем из (0.7), что задача об отыскании инвариантной кривой эквивалентна отысканию функции  $u_0(x)$ , удовлетворяющей уравнению

$$\Delta^2 u = \exp(u). \quad (1.3)$$

Здесь и далее мы используем следующие символы для разностных операторов

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= u(x+1) - u(x), \quad \bar{\Delta} u(x) = u(x) - u(x-1), \\ \Delta^2 u(x) &= \Delta \bar{\Delta} u(x) = u(x+1) + u(x-1) - 2u(x). \end{aligned} \quad (1.4)$$

**Лемма 1.** Существует и единственная инвариантная кривая  $\Gamma^u$  полустандартного отображения, задаваемая уравнениями  $u = u_0(x)$ ,  $v = v_0(x) = \Delta u_0(x)$ , где  $u_0$  есть целая функция, удовлетворяющая уравнению (1.3) и имеющая при  $x \rightarrow -\infty$  асимптотику  $u_0(x) = -\ln(x^2/2) + o(1)$ . Имеет место следующее асимптотическое разложение по степеням  $x^{-2}$  равномерное в секторе  $\alpha_0 \leq \arg x \leq 2\pi - \alpha_0$ , где  $\alpha_0 \in ]0, \pi/2[$  произвольное фиксированное число:

$$u_0(x) \sim -\ln \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4x^2} + \frac{91}{864} \frac{1}{x^4} - \frac{319}{2880} \frac{1}{x^6} + \dots \quad (1.5)$$

Доказательство леммы 1 содержится в [6].

Заметим, что, как следует из приведенных выше формул, отображение  $x \mapsto (u_0(x), v_0(x))$  есть аналитическое инъективное погружение  $\mathbb{C}$  в  $(\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ , образ которого есть  $\Gamma^u$  и которое сопрягает сужение полустандартного отображения на  $\Gamma^u$  со сдвигом  $x \mapsto x + 1$ .

Легко видеть, что кривая  $\Gamma^s$ , задаваемая уравнениями  $u = u_+(x) = u_0(-x)$ ,  $v = v_+(x) = -\Delta u_0(-x)$ , также инвариантна относительно  $f_{SSM}$  и определяющая ее функция  $u_+(x)$  имеет то же асимптотическое разложение (1.5), но в другом секторе:  $-\pi + \alpha_0 \leq \arg x \leq \pi - \alpha_0$ . Эти две кривые  $\Gamma^u$  и  $\Gamma^s$  мы будем называть *сепаратрисами полустандартного отображения*. Ясно, что они не совпадают, хотя и близки в точках соответствующих одинаковым большим значениям  $x$ , лежащим в пересечении указанных секторов. Из (1.4) следует, что разность  $u_0(x) - u_0(-x)$  стремится к нулю быстрее любой степени  $x^{-1}$ . Можно доказать (это в дальнейшем не используется), что в пересечении секторов при  $|x| \geq 1$  справедлива оценка

$$|u_0(x) - u_0(-x)| \leq \text{const } |x|^2 \exp(-2\pi |\text{Im } x|).$$

Нам далее понадобится два специальных решения линейного однородного уравнения

$$\Delta^2 u = u \cdot \exp(u_0). \quad (1.6)$$

Одно решение есть  $u'_0(x)$ , в чем легко убедиться, дифференцируя (1.3). Второе решение  $u_1(x)$  найдем, решая вместо (1.6) уравнение

$$W(u'_0, u_1) = 1, \quad (1.7)$$

где  $W$  есть разностный аналог определителя Вронского:

$$W(f, g) = f \Delta g - g \Delta f. \quad (1.8)$$

Записывая  $u_1(x) = a(x) \cdot u'_0(x)$ , получаем из (1.7), что

$$\Delta a(x) = [u'_0(x) \cdot u'_0(x+1)]^{-1} = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} + O(1/x^2). \quad (1.9)$$

Выделим решение соотношения (1.9) с правильной асимптотикой при  $x \rightarrow -\infty$

$$a(x) = \frac{1}{12} x^3 + \frac{1}{24} x + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ [u'_0(x-k) u'_0(x+1-k)]^{-1} - \frac{1}{4} (x-k)^3 - \frac{1}{4} (x-k) - \frac{1}{8} \right\}.$$

Мы получаем существование второго решения  $u_1(x)$  уравнения (1.6), удовлетворяющего условию (1.7) и имеющего в секторе  $\alpha_0 \leq \arg x \leq 2\pi - \alpha_0$  асимптотику

$$u_1(x) \sim -\frac{1}{6} x^2 - \frac{1}{24} - \frac{1}{162} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{180} \frac{1}{x^4} + \dots \quad (1.10)$$

## § 2. Формулировка теоремы об интеграле и доказательство существования функции $\Theta$

Фиксируем числа  $m > 3$  и  $\alpha_0 \in ]0, \pi/2[$ . Введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathfrak{D}(R) &= \{x \in \mathbb{C} : \alpha_0 \leq \arg(x+R) \leq 2\pi - \alpha_0\}, \\ \Omega(R) &= \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^2 : x \in \mathfrak{D}(R), |\xi| \leq |x|^{-m}\}, \\ \Gamma_R^u &= \{(u, v) : u = u_0(x), v = v_0(x), x \in \mathfrak{D}(R)\}. \end{aligned}$$

**Теорема.** Существуют положительные числа  $R > 1$ ,  $c$  и аналитическое инъективное погружение  $F: \Omega(R) \rightarrow (\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ , обладающее следующими свойствами:

(а)  $F$  симплектично, т. е.  $F^*du \wedge dv = dx \wedge d\xi$  (аналог сохранения площади).

(б)  $F$  сопрягает  $f_{SSM}$  и стандартный сдвиг  $\sigma: (x, \xi) \mapsto (x+1, \xi)$  в  $\mathbb{C}^2$ . Это означает, что имеет место равенство  $F \circ \sigma = f_{SSM} \circ F$  там, где определены обе суперпозиции.

(в)  $F(\Omega(R))$  содержит  $\Gamma_R^u$ . Более того, сужение отображения  $F$  на прямую  $\xi = 0$  совпадает с отображением  $x \mapsto (u_0(x), v_0(x))$ , определенным в § 1, ограниченным на  $\mathfrak{D}(R)$ .

(г) Вместе с каждой точкой  $(u_0(x), v_0(x))$ ,  $x \in \mathfrak{D}(R)$ , множество  $F(\Omega(R))$  содержит бицилиндр

$$\left\{ (u, v) : |x|^{-2} |u - u_0(x)| + |x|^{-1} |v - v_0(x)| \leq |x|^{-m-1} \right\}.$$

(д) Частные производные компонент обратного к  $F$  отображения  $F^{-1}(u, v) = (x(u, v), \xi(u, v))$  удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} x'_u &\sim x, & x'_v &\sim x^2, \\ \xi'_u &\sim x^{-2}, & \xi'_v &\sim x^{-1}, \\ \xi''_{u^2} &\sim x^{-2}, & \xi''_{uv} &\sim x^{-1}, & \xi''_{v^2} &\sim 1. \end{aligned}$$

Здесь запись  $f \sim x^a$  есть сокращение для  $|f(u, v)| \leq c|x(u, v)|^a$ .

Из сформулированной теоремы нетрудно вывести существование периодической функции  $\Theta(x)$ , о которой шла речь во Введении. Сепаратриса  $\Gamma^s$  задается параметрическими уравнениями  $u = u_+(x) = u_0(-x)$ ,  $v = v_+(x) = -\Delta u_0(-x)$ , причем преобразование  $f_{SSM}$  выглядит на  $\Gamma^s$  как сдвиг  $x \mapsto x+1$ . Функции  $u_+(x)$  и  $v_+(x)$  обладают теми же асимптотическими разложениями, что и  $u_0(x)$ ,  $v_0(x)$ , задающие  $\Gamma^u$ , в двух секторах:  $\alpha_0 \leq \arg x \leq \pi - \alpha_0$  и  $-\pi + \alpha_0 \leq \arg x \leq -\alpha_0$ . Из утверждения (г) теоремы следует, что при  $|\operatorname{Im} x| \geq R_1$ , где  $R_1$  — достаточно большое число, точки  $(u_+(x), v_+(x))$  принадлежат  $F(\Omega(R))$ . Так как  $\xi(u, v)$  — интеграл, то  $\xi(u_+(x), v_+(x))$  не меняется при сдвиге  $x \mapsto x+1$ , т. е. является периодической функцией в двух полуплоскостях  $|\operatorname{Im} x| \geq R_1$ . В частности, справедливо разложение (0.8). Разумеется, численное значение коэффициента  $\Theta_1$  теория не дает, его можно найти, только производя численный эксперимент.

**З а м е ч а н и е 1.** Интеграл, существование которого утверждается в теореме, вообще говоря, неединствен. Поэтому функция  $\Theta(x)$  не определяется единственным образом. Однако из свойства (а) можно вывести, что первый коэффициент  $\Theta_1$  разложения (0.8) определен однозначно (см. § 6 работы [7]).

**З а м е ч а н и е 2.** Утверждение теоремы было сформулировано в [6] в качестве гипотезы. Гипотеза А работы [6] содержала, кроме того, еще утверждение о справедливости некоторого асимптотического разложения для  $\xi(u, v)$ . Это разложение было использовано для вычисления коэффициента  $\Theta_1$  на ЭВМ. Для доказательства существования  $\Theta(x)$  оно не нужно. Кроме того, в [7] приведен альтернативный способ вычисления  $\Theta_1$ , опирающийся только на факты, содержащиеся в теореме. Результаты для  $\Theta_1$ , полученные этими двумя способами, совпадают с точностью до  $10^{-8}$ .

Остальная часть статьи посвящена доказательству теоремы.

### § 3. Приближенный интеграл

Запишем искомое отображение  $F$  в виде  $(x, \xi) \mapsto (u(x, \xi), v(x, \xi))$ . Условие (б) эквивалентно тому, что  $u(x, \xi)$  как функция переменной  $x$  удовлетворяет уравнению (1.3). Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы, начав с некоторого приближенного решения этого уравнения, методом Ньютона построить точное решение, удовлетворяющее требуемым условиям. Эта простая идея наталкивается на следующую трудность. Соответствующая линейная задача хорошо решается, только если область определения функции содержит бесконечные „концы” по переменной  $x$ . Однако пересечение  $\Omega(R)$  с любой прямой  $\xi = \text{const} \neq 0$  есть ограниченная область, и те методы, которые



были применены в [6] для доказательства леммы 1, здесь неприменимы. Поэтому требуется расширить первоначальную область определения.

Опишем сначала область определения приближенного решения. Помимо переменных  $x$ ,  $\xi$  мы будем использовать еще другие переменные  $t$ ,  $h$ , связанные со старыми переменными формулами:

$$x = t/h, \quad \xi = h^2/2. \quad (3.1)$$

Замена (3.1) симплектическая:  $dx \wedge d\xi = dt \wedge dh$ . Фиксируем числа  $\alpha_i$ ,  $i=0, 1, I, II$ , удовлетворяющие неравенствам  $0 < \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_I < \alpha_{II} < \pi/2$ , и определим области

$$\mathfrak{D}_I = \mathbb{C} \setminus (S_+ \cup S_-),$$

где

$$\begin{aligned} S_{\pm} &= \{t \in \mathbb{C} : |\arg t \mp \pi/2| < \alpha_1, |\operatorname{Im} t| > \alpha_1\}; \\ E_I &= \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \leq \xi_0 < 1, |\arg \xi| \leq \pi - 2\alpha_1\}; \\ E_{II} &= \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| \leq \xi_0, |\arg \xi - \pi| \leq 2\alpha_{II}\}; \\ \tilde{\Omega}_s &= \{(x, \xi) \in \mathbb{C}^2 : x \in \mathfrak{D}(R), \xi \in E_s, t = x\sqrt{2\xi} \in \mathfrak{D}_I\}, \quad s = I, II. \end{aligned}$$

Область  $\mathfrak{D}(R)$  определена в § 2. Мы построим два выражения для приближенного решения, определенные соответственно в  $\tilde{\Omega}_I$  и  $\tilde{\Omega}_{II}$ . Их различие, хотя и небольшое, связано с появлением в формулах  $\ln \xi$  и с необходимостью фиксировать ветвь этого логарифма.

Следующая ниже формула представляет собой гибрид двух приближенных решений, каждое из которых получено как отрезок формального ряда по степеням малого параметра: первое,  $u$ , в переменных  $x$ ,  $\xi$ , роль малого параметра играет  $\xi$ ; второе,  $U$ , в переменных  $t$ ,  $h$  с  $h$  в роли малого параметра. При получении  $u(x, \xi)$  надо решать рекуррентную последовательность разностных уравнений, содержащих оператор  $\Delta^2$  (см. (1.4)), и это приближение хорошо при  $|t| \ll 1$ . При получении  $U(t, h)$  на каждом шаге приходится решать обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, и это второе приближение хорошо при  $|x| \gg 1$ . Если из их суммы вычесть их общую асимптотику, годящуюся в области  $1 \ll |x| \ll |h|^{-1}$ , то получившееся выражение будет аппроксимировать точное решение в более широкой области.

Фиксируем натуральное число  $N \geq 5$ . Приближенное решение  $\tilde{u}$ , определенное в одной из областей  $\tilde{\Omega}_s$ , имеет вид

$$\tilde{u} = u + U - \mathcal{K}. \quad (3.2)$$

Первое слагаемое имеет вид

$$u(x, \xi) = \sum_{n=0}^N (n!)^{-1} \xi^n u_n(x), \quad (3.3)$$

$u_0(x)$ ,  $u_1(x)$  определены в § 1 (лемма 1 и формула (1.10)),  $u_n(x)$ ,  $n \geq 2$ , — целые функции, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta^2 u_n = e^{u_0} Y_n(u_1, u_2, \dots, u_n), \quad (3.4)$$

где  $Y_n$  — полиномы Белла [12], и имеющие следующие асимптотики при  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \in \mathfrak{D}(R)$ :

$$u_n(x) = \sum_{k=-n}^{N-n} a_{nk} x^{-2k} + \tilde{O}(x^{-2(N+1-n)}). \quad (3.5)$$

Здесь и далее символ  $\tilde{O}(x^m)$  обозначает функцию, удовлетворяющую неравенству  $|\tilde{f}(x)| \leq c_1 |\ln x|^{c_2} |x|^m$ , где  $c_1$  и  $c_2$  — некоторые константы. Аналогичный понятный смысл имеет  $\tilde{O}$  и в других ситуациях. Коэффициенты  $a_{nk}$  в (3.5) могут полиномиально зависеть от  $\ln x$  при  $n \geq 3$ ,  $k \geq 2$ , при остальных значениях индексов  $a_{nk}$  — числа. Определим  $a_{0k}$  и  $a_{1k}$  как соответствующие коэффициенты в разложениях (1.5) и (1.10).

Член

$$\mathcal{K}(x, \xi) = -\ln \frac{x^2}{2} + \sum_{n=0}^N \sum_{k=-n}^{N-n} (n!)^{-1} \xi^n a_{nk} x^{-2k} \quad (3.6)$$

в формуле (3.2) играет роль компенсатора, убывающего  $u$  при больших  $x$ . Слагаемое  $U$  удобно записать в переменных  $t, h$ :

$$U(t, h) = \ln h^2 + \sum_{n=0}^N (n!)^{-1} h^{2n} U_n(t), \quad (3.7)$$

где  $U_0(t)$  определено формулой (1.2),  $U_n(t), n \geq 1$ , удовлетворяют рекуррентным дифференциальным уравнениям

$$\sum_{k+j=n} \frac{2n!}{k!(2j+2)!} U_k^{(2j+2)} = e^{U_0} \cdot Y_n(U_1, \dots, U_n). \quad (3.8)$$

**З а м е ч а н и е 3.** Уравнения (3.4) и (3.8) можно записать в виде  $\Delta^2 u_n - u_n \exp(u_0) = f$  и  $U_n'' - U_n \exp(U_0) = f$  соответственно, где  $f$  зависит от функций с меньшими номерами. Если мы будем их последовательно решать, то на каждом шаге мы можем прибавлять решение однородного уравнения. Мы потребуем, чтобы решение имело асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  (соответственно  $t \rightarrow 0$ ), содержащую лишь четные степени переменной. При этом, все равно, к решению первого уравнения можно добавлять  $\text{const} \cdot u_1$ , к решению второго —  $\text{const} (1 - (t/2) \text{cth}(t/2))$ . Мы фиксируем произвольным образом константы при решении уравнений (3.4), а соответствующие константы и ветви в решениях (3.8) определим из условия, чтобы слагаемое  $\mathcal{K}$  было асимптотикой и для  $U$  при  $t \rightarrow 0$ .

В дальнейших оценках символ  $f \sim (A, B)$  использован для краткого обозначения двух неравенств

$$|f(x)| \leq c |A(x)| \text{ при } |x| \leq |h|^{-1} \text{ и}$$

$$|f(x)| \leq c |B(x)| \text{ при } |x| \geq |h|^{-1}.$$

**Л е м м а 2.** В каждой из областей  $\tilde{\Omega}_s, s = \text{I, II}$ , формулами (3.3), (3.6), (3.7) определена аналитическая функция  $\tilde{u}(x, \xi)$ . Упомянутые в замечании 3 константы можно выбрать так, что справедливы следующие оценки, равномерные в  $\tilde{\Omega}_s$ :

$$|\Delta^2 \tilde{u} - e^{\tilde{u}}| \leq c \begin{cases} |h|^{N+1} |\ln h|^c \cdot |x|^{-2} \text{ при } |x| \leq |h|^{-1/2}, \\ |h|^N |\ln x|^c \cdot |x|^{-4} \text{ при } |x| \geq |h|^{-1/2}, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$|u - \mathcal{K}| \leq c |\ln x|^c \cdot |h|^N |x|^{-2} \text{ при } |x| \geq |h|^{-1/2}, \quad (3.10)$$

$$|U - \mathcal{K}| \leq c |\ln h|^c \cdot |h|^{N+1} \text{ при } |x| \leq |h|^{-1/2}, \quad (3.11)$$

$$\left. \begin{aligned} \exp \tilde{u} &\sim (x^{-2}, h^2 \exp(-\text{Re } |t|), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} &\sim (x^{-1}, h), \quad \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \xi} \sim (x^2, x/h), \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x^2} &\sim (x^{-2}, x^{-2}), \quad \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \xi^2} \sim (x^4, xh^{-3}), \\ \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x \partial \xi} &\sim (x, h^{-1}). \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Константа  $c$  в (3.9) и (3.10) и константы в оценках (3.12) зависят от  $\tilde{\Omega}_s$  и от  $N$ .

Набросок доказательства леммы 2. Убедиться в возможности согласованного выбора констант при решении рекуррентных уравнений можно, переходя к переменной  $\tau = \sqrt{h} x$ . В области  $0 < \tau_0 \leq |\tau| \leq \tau_1$  оба выражения  $u$  и  $U$  являются асимптотическим при  $h \rightarrow 0$  решением уравнения (1.3). Разлагая их по степеням  $h$ , видим, что коэффициенты удовлетворяют одной и той же системе рекуррентных дифференциальных уравнений типа  $v_n'' - 2\tau^{-2} v_n = f(v_1, v_2, \dots, v_{n-1})$ . Решения последней суть полиномы от  $\tau, \tau^{-1}$  и  $\ln \tau$  (отметим, что  $v_n$  могут полиномиально зависеть от  $\ln h$ ). Сравнивая  $v_n$ , порождаемые  $u$  и  $U$ , получаем алгоритм нахождения рассматриваемых констант.

Оценка (3.10) следует из (3.5). Для получения (3.11) используем асимптотику  $U_n(t)$  при  $t \rightarrow 0$  и описанную выше согласованность констант. Оценки (3.12) следуют из (3.10), (3.11) и явного выражения для  $\tilde{u}$ . Остановимся более подробно на доказательстве оценки (3.9) для невязки. Пусть  $|x| \leq |h|^{-1/2}$ . Представим невязку в виде

$$\tilde{f} = \Delta^2 \tilde{u} - e^{\tilde{u}} = (\Delta^2 u - e^u) + e^u \cdot (1 - e^{U-\mathcal{X}}) + \Delta^2(U - \mathcal{X}). \quad (3.13)$$

Из (3.11) и (3.12) вытекает оценка для последних двух членов в (3.13). Каждый из них имеет порядок  $\tilde{O}(x^{-2}h^{N+1})$ . Оценим первый член. Учитывая (3.3) и (3.4), получаем

$$\Delta^2 u - \exp(u) = \left[ \sum_{n=0}^N (n!)^{-1} \xi^n Y_n(u_1, \dots, u_n) - \exp\left(\sum_{n=0}^N (n!)^{-1} \xi^n u_n\right) \right] \cdot \exp u_0.$$

В рассматриваемой области  $u_n \xi^n = \tilde{O}(h^n)$ . Поэтому в силу определения полиномов Белла выражение в квадратных скобках оценивается величиной  $\tilde{O}(h^{N+1})$ , что вместе с (3.12) дает нужную оценку.

Пусть теперь  $|x| \geq |h|^{-1/2}$ . Поменяем ролями  $u$  и  $U$ .

$$\tilde{f} = \Delta^2 U - e^U + e^U(1 - e^{u-\mathcal{X}}) + \Delta^2(u - \mathcal{X}).$$

Члены, содержащие  $u - \mathcal{X}$ , рассматриваются аналогично предыдущему случаю. Остается оценить выражение  $\Delta^2 U - \exp(U)$ . Используя формулу

$$\Delta^2 f(t) \sim \sum_{k=0}^m \frac{h^{2k+2} f^{(2k+2)}(t)}{(2k+2)!},$$

погрешность которой имеет порядок  $|h|^{2m+4} \max |f^{(2m+4)}(t')|$ ,  $t' \in [t, t+h]$ , и учитывая уравнения (3.8), находим

$$|\Delta^2 U - \exp U| \leq \text{const} \sum_{n=0}^N |h|^{2N+4} \max_{t' \in [t, t+h]} |U_n^{(2N-2n+4)}(t')|. \quad (3.14)$$

Для функций  $U_n^{(k)}(t)$  нетрудно получить по индукции оценку  $\tilde{O}(\exp(-|\text{Re } t|))$  при  $|t| \geq 1$  и  $\tilde{O}(t^{-2n-k})$  при  $|t| \leq 1$ . Подставляя эти оценки в (3.14), получаем требуемую оценку невязки. •

Большую роль в дальнейшем будут играть производные приближенного интеграла:  $\tilde{\xi} = \partial \tilde{u} / \partial x$ ,  $\tilde{\eta} = \partial \tilde{u} / \partial \xi$ . Они являются приближенными решениями однородного уравнения  $\Delta^2 \xi = \xi \cdot \exp \tilde{u}$ . Выражения для невязок  $\tilde{f}_\xi = \Delta^2 \tilde{\xi} - \tilde{\xi} \cdot \exp \tilde{u}$  и  $\tilde{f}_\eta = \Delta^2 \tilde{\eta} - \tilde{\eta} \exp \tilde{u}$  можно получить, дифференцируя невязку  $\tilde{f}$  соответственно по  $x$  и  $\xi$ . Справедлива следующая общая лемма об оценке производных, которая доказывается очевидным применением формулы Коши.

**Лемма 3.** Пусть область  $\tilde{\Omega}'_s \subset \tilde{\Omega}_s$  определена, так же как и  $\tilde{\Omega}_s$ , но для значений параметров  $\alpha'_k = \alpha_k + \varepsilon$ ,  $k=0, 1$ ,  $\alpha'_k = \alpha_k - \varepsilon$ ,  $k=1, \text{II}$ ,  $\xi'_0 = \xi_0(1 - \varepsilon)$ ,  $R' = R + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ . Тогда справедливы следующие оценки для производных в области  $\tilde{\Omega}'_s$  функции и аналитической в  $\tilde{\Omega}_s$ :

$$|u'_x| \leq c_1^{-1} \varepsilon^{-1} |x|^{-1} \max_A |u|, |u'_\xi| \leq c_1^{-1} \varepsilon^{-1} |\xi|^{-1} \max_B |u|.$$

Здесь

$$A = A(x, \xi) = \{ (x', \xi) : |x' - x| \leq c_1 \varepsilon |x| \}, \\ B = B(x, \xi) = \{ (x, \xi') : |\xi' - \xi| \leq c_1 \varepsilon |\xi| \}.$$

Константа  $c_1$  выбрана так, чтобы  $A$  и  $B$  содержались в  $\tilde{\Omega}_s$ . Константа  $c_1$  не зависит от  $(x, \xi) \in \tilde{\Omega}_s$  и от  $\varepsilon$ .

**Замечание 4.** Практически применение леммы 3 сводится к умножению правых частей оценок вида (3.9) на  $\varepsilon^{-1} |x|^{-1}$  для производной по  $x$  и на  $\varepsilon^{-1} |\xi|^{-1}$  для производной по  $\xi$ .

Используя лемму 3, оценки (3.9), асимптотики для  $\tilde{u}$  и формулу  $\bar{\Delta} W = \tilde{f}_\eta \tilde{\xi} - \tilde{f}_\xi \tilde{\eta}$  для определителя Вронского  $W = W(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$  (см. (1.8)), нетрудно получить оценку

$$|W(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - 1| \leq \text{const} |h|^{N-1}. \quad (3.15)$$

Рассмотрим отображение  $\tilde{F}_s : \Omega(R) \cap \tilde{\Omega}_s \rightarrow (\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ , определяемого формулой  $(x, \xi) \rightarrow (\tilde{u}(x, \xi), \tilde{v}(x, \xi))$ ,  $\tilde{v} = \Delta \tilde{u}$ . Якобиан  $\tilde{F}_s$  совпадает с  $W(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ , поэтому, как следует из (3.15), при больших  $R$  это отображение будет аналитическим погружением.

**Лемма 4.** При достаточно больших  $R$  отображение  $\tilde{F}_s$  будет инъективным, для обратного к нему отображения справедливы оценки из пункта (д) теоремы.

**Доказательство.** Пусть  $(x_i, \xi_i) \in \Omega(R) \cap \tilde{\Omega}_s$ ,  $i = 1, 2$ , таковы, что  $\tilde{F}_s(x_1, \xi_1) = \tilde{F}_s(x_2, \xi_2)$  и  $|x_1| \leq |x_2|$ . Так как в рассматриваемой области  $\tilde{u} = -\ln(x^2/2) + O(x^{-m+2})$ , мы получаем, что  $\Delta x = x_2 - x_1 = O(x_1^{-m+3})$ . Разлагая  $0 = \tilde{u}(x_2, \xi_2) - \tilde{u}(x_1, \xi_1)$  и  $0 = \tilde{v}(x_2, \xi_2) - \tilde{v}(x_1, \xi_1)$  по степеням  $\Delta x = \alpha x_1^{-m+3}$  и  $\Delta \xi = \xi_2 - \xi_1 = \beta x_1^{-m}$ , получаем, используя оценки (3.12),

$$|\alpha| + |\beta| \leq \text{const} (|\alpha|^2 + |\beta|^2) |x_1|^{-m+2}. \quad (3.16)$$

По условию  $\alpha$  и  $\beta$  ограничены. При достаточно больших  $R$  из (3.16) следует, что  $\alpha = \beta = 0$ , т. е.  $\tilde{F}_s$  инъективно. Оценки на производные обратного отображения следуют из (3.12) и (3.15). •

Мы собираемся построить интеграл полустандартного отображения, применяя к уравнению (1.3) метод Ньютона и беря в качестве начального приближения функцию  $\tilde{u}$ . На каждом шаге метода Ньютона приходится решать линеаризованную задачу, которая имеет свою специфику, связанную с геометрией области  $\tilde{\Omega}_s$ . В следующем параграфе будут рассмотрены способы решения простейшего разностного уравнения, к которому сводится упомянутая линеаризованная задача.

#### § 4. Разностное уравнение

Рассмотрим разностное уравнение

$$\Delta u(x, \xi) = f(x, \xi), \quad (4.1)$$

где  $\Delta$  — разностный оператор по переменной  $x$ , определенный в (1.4), функция  $f$  определена в некоторой части  $\tilde{\Omega}_s$ . Мы будем использовать две формулы, дающие решения уравнения (4.1):

$$u(x, \xi) = L^I f(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} f(x-k, \xi), \quad (4.2)$$

$$u(x, \xi) = L_{\pm}^{II} f(x, \xi) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_x} f(x', \xi) [\text{ctg } \pi(x-x') \pm i] dx'. \quad (4.3)$$

Интегрирование в (4.3) происходит по контуру  $\Gamma_x$ , проходящему в плоскости переменной  $x'$  из нижней полуплоскости в верхнюю между полюсами  $x-1$  и  $x$  котангенса. Для того чтобы применять (4.2), нужно, чтобы область определения  $f$  содержала вместе с точкой  $(x, \xi)$  весь луч  $(x-p, \xi)$ ,  $p \geq 0$ . Чтобы применять (4.3), нужно иметь возможность увести концы контура  $\Gamma_x$  на бесконечность так, чтобы сходимость интеграла обеспечивалась убыванием  $f$ . Для того чтобы удовлетворить этим условиям, мы уменьшим область  $\tilde{\Omega}_s$  следующим образом. Определим область  $\Omega_I$  как состоящую из всех точек  $(x, \xi) \in \tilde{\Omega}_I$ , для которых луч  $l_-(x) = \{(x', \xi) : x' = x-p, p \geq 0\}$ , исходящий из точки  $x$  в отрицательном направлении, целиком содержится в  $\tilde{\Omega}_I$ . В переменных  $(t, h)$  сечение области  $\Omega_I$  прямой  $h = \text{const}$ ,  $h^2/2 \in E_I$ ,  $|\arg h| < \pi/2$ , получается из сечения этой прямой всей области  $\tilde{\Omega}_I$  удалением „теней”, отбрасываемых обрезанными секторами  $S_{\pm}$  в направлении  $h$  (рис. 3, а). Область  $\Omega_{II}$  состоит из всех  $(x, \xi) \in \tilde{\Omega}_{II}$ , для которых отрезок прямой  $\{t \in \mathbb{C} : t = h(x+p), p \in \mathbb{R}\}$ ,  $h^2/2 \in E_{II}$ ,  $|\arg h - \pi/2| < \pi/2$ , в плоскости  $t$ , соединяющий  $hx$  с точкой пересечения этой прямой с вещественной осью, не пересекает  $S_{\pm}$ . Другими словами, на плоскости  $t$  надо исключить „тени”, отбрасываемые сектором  $S_+$  в направлении  $h$  и сектором  $S_-$  в направлении  $(-h)$  (рис. 3, б).

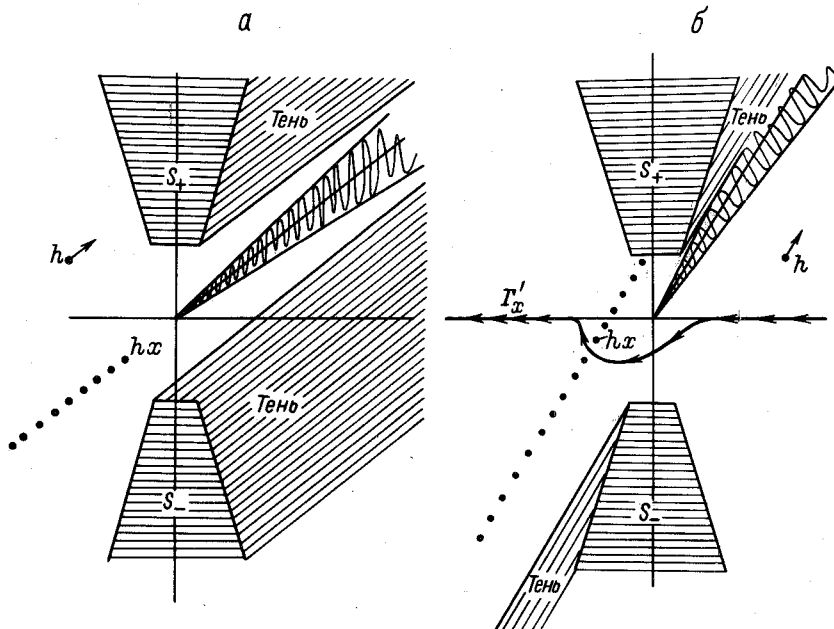


Рис. 3. Картина сечения областей  $\Omega_s$ ,  $s = I, II$ , прямой  $h = \text{const}$  в плоскости переменной  $t$ .

$a$  — случай области  $\Omega_I$ , тени от секторов  $S_{\pm}$  идут в одну сторону, точками показаны образы аргументов слагаемых в формуле (4.2);  $b$  — случай области  $\Omega_{II}$ , тени от секторов  $S_{\pm}$  идут в противоположные стороны, жирной линией со стрелками показан образ  $\Gamma'_x$  контура интегрирования в формуле (4.3).

Мы будем пользоваться формулой (4.2) в области  $\Omega_I$ , а формулой (4.3) — в области  $\Omega_{II}$ . При этом контур  $\Gamma_x$  выберем так, чтобы его образ  $\Gamma'_x$  на плоскости  $t$  шел от  $+\infty$  к  $-\infty$  по вещественной оси, за исключением конечного отрезка, изогнутого так, чтобы проходить между нужными полюсами  $\text{ctg } \pi(x' - x)$  и не пересекать запрещенных областей (на рис. 3, б запрещенные области заштрихованы).

Легко установить, что при таком выборе  $\Omega_{I,II}$  и  $\Gamma_x$  операторы  $L^I$  и  $L^II_{\pm}$  корректно определены, если правая часть (4.1) определена соответственно в  $\Omega_{I,II}$  и удовлетворяет оценке  $|f(x, \xi)| \leq \text{const } |x|^{-2}$ . При применении  $L^II_{\pm}$  получается решение, стремящееся к нулю соответственно при  $\text{Re } t \rightarrow \pm\infty$ ,

$$L^II_{+} f - L^II_{-} f = \int_{\Gamma_x} f(x', \xi) dx'. \quad (4.4)$$

Правая часть (4.4) не зависит от  $x$ .

З а м е ч а н и е 5. Для получения оценок решения уравнения (4.1) практически достаточно проинтегрировать оценку для правой части по лучу  $l_{-}(x)$  в случае использования оператора  $L^I$  и по контуру  $\Gamma_x^{\pm}$  в случае использования оператора  $L^II_{\pm}$ . Здесь  $\Gamma_x^{\pm}$  — половинки контура, получающиеся при рассеении его прямой, проходящей через  $x$  в вещественном направлении, причем  $\Gamma_x^{\pm}$  лежит снизу.

## § 5. Метод Ньютона

Мы построим последовательность областей  $\Omega^{(n)}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\Omega^{(0)} = \Omega_s$ ,  $\Omega^{(n+1)} \subset \Omega^{(n)}$ , и отображений  $\Psi_n : \Omega^{(n+1)} \rightarrow \Omega^{(n)}$ , близких к тождественному, так, что последовательность функций  $u_n = \tilde{u} \circ \Phi_n$ ,  $\Phi_0 = id$ ,  $\Phi_{n+1} = \Phi_n \circ \Psi_n$ , сходится к решению уравнения (1.3), определенному в области  $\Omega_s^{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega^{(n)}$ ,  $s = I, II$ . Обозначим

невязку на  $n$ -м шаге через  $f_n = \Delta^2 u_n - \exp(u_n)$ . Преобразование  $\Psi_n : (x, \xi) \rightarrow (x + a(x, \xi), \xi + b(x, \xi))$  определим формулами

$$a = L^s_{(-)} W^{-1} \eta f_n, \quad b = -L^s_{(-)} W^{-1} \xi f_n. \quad (5.1)$$

Здесь

$$\xi = \partial u_n / \partial x, \quad \eta = \partial u_n / \partial \xi, \quad W = W(\xi, \eta). \quad (5.2)$$

Определим норму невязки равенством

$$\|f\| = \sup_{(x, \xi) \in \Omega^{(n)}} |x|^{7/2} |h|^{-5} |f(x, \xi)|. \quad (5.3)$$

Области  $\Omega^{(n)}$  определяются теми же неравенствами, что и  $\Omega_s$ , но с другими параметрами:  $R^{(n)}, \xi_0^{(n)}, \alpha_i^{(n)}, i=0, 1, I, II$ . Фиксируем положительное число  $\mu$  из интервала  $]0, 1/4[$  и положим  $R^{(0)} = R, \xi_0^{(0)} = \xi_0, \alpha_i^{(0)} = \alpha_i, R^{(n+1)} = R^{(n)} + \partial \xi, \xi_0^{(n+1)} = \xi_0^{(n)}(1 - \alpha \xi), \alpha_i^{(n+1)} = \alpha_i^{(n)} + \alpha \xi, i=0, 1, \alpha_i^{(n+1)} = \alpha_i^{(n)} - \alpha \xi, i=I, II, \alpha \xi = \|f_n\|^\mu$ . Из результатов § 3 следует, что

$$\|f_0\| \leq c |h|^{N-5}. \quad (5.4)$$

Индукционная лемма. Пусть  $\|f_n\| \leq 1$  и пусть  $u_n$  удовлетворяют оценкам вида (3.12) с константой  $C^{(n)} \leq 2c$ . Тогда в случае  $s=I$  функции  $a, b$ , определенные равенствами (5.1), удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} a &\sim \|f_n\| (h^5 x^{-1/2}, h^4 x^{-3/2}), \\ b &\sim \|f_n\| (h^5 x^{-7/2}, h^6 x^{-5/2}). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Здесь использовано обозначение, введенное на с. 124. В случае  $s=II$  оценки (5.5) верны в левой половине области (рис. 3, б). В правой половине такие же оценки справедливы для  $a - \hat{a}, b - \hat{b}$ , где  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  — не зависящие от  $x$  функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|\hat{a}| \leq c_1 \|f_n\| |h|^{9/2}, \quad |\hat{b}| \leq c_1 \|f_n\| |h|^{15/2}. \quad (5.6)$$

Невязка  $f_{n+1} = \Delta^2 u_{n+1} - \exp(u_{n+1})$  в области  $\Omega^{(n+1)}$  удовлетворяет неравенству

$$\|f_{n+1}\| \leq c_1 |h|^3 \|f_n\|^{2-\mu}. \quad (5.7)$$

Производные функции  $u_{n+1}$  удовлетворяют в области  $\Omega^{(n+1)}$  оценкам вида (3.12) с константой

$$C^{(n+1)} = C^{(n)} + c_1 \|f_n\|^{1-2\mu}. \quad (5.8)$$

Доказательство. Оценки (5.5) и (5.6) следуют немедленно из замечания 5 и формулы (4.4). Приведем вывод оценки (5.7). Рассмотрим сначала случай, когда в (5.7) не присутствуют  $\hat{a}, \hat{b}$ . Для этого представим  $u_{n+1}$  в виде

$$u_{n+1} = u_n \circ \Psi_n = u_n + \gamma + Q, \quad (5.9)$$

где  $\gamma = a\xi + b\eta$ ,  $Q$  квадратично зависит от  $a$  и  $b$  и допускает оценку

$$Q \sim \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} a^2 + 2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial \xi} ab + \frac{\partial^2 u_n}{\partial \xi^2} b^2. \quad (5.10)$$

Функция  $\gamma$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta^2 \gamma - e^{u_n} \gamma = a \frac{\partial f_n}{\partial x} + b \frac{\partial f_n}{\partial \xi} - f_n, \quad (5.11)$$

которое следует из (5.1). Подставляя (5.9) в выражение для невязки и учитывая (5.11), получаем

$$f_{n+1} = I + II + III,$$

где

$$I = -[\exp(\gamma + Q) - 1 - (\gamma + Q)] \exp u_n,$$

$$II = a \frac{\partial f_n}{\partial x} + b \frac{\partial f_n}{\partial \xi},$$

$$III = \Delta^2 Q - Q \cdot \exp u_n.$$

Из (5.10), (5.1) – (5.3) и (3.12) следует, что

$$|\gamma| \leq \text{const} \|f_n\| |h|^5 |x|^{-3/2}, \quad |Q| \leq \text{const} \|f_n\|^2 |h|^{10} |x|^{-3},$$

откуда получаем требуемые оценки для I и III. Оценим производные невязки, используя лемму 3 и замечание 4:

$$\begin{aligned} |f'_{nx}| &\leq \text{const} \|f_n\|^{1-\mu} |h|^5 |x|^{-9/2}, \\ |f'_{n\mathbb{E}}| &\leq \text{const} \|f_n\|^{1-\mu} |h|^3 |x|^{-7/2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Подстановка (5.12) и (5.5) в выражение для II дает оценку для этого оставшегося члена.

В случае, когда в оценках (5.5) стоит  $a - \hat{a}$ ,  $b - \hat{b}$ , необходимо совершить сдвиг аргументов в  $u_n(x, \mathbb{E})$  на малые константы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  соответственно и производить последующие операции с  $a - \hat{a}$ ,  $b - \hat{b}$  вместо  $a$  и  $b$ .

Неравенство (5.8) следует из (5.9) и из полученных выше оценок для  $\gamma$  и  $Q$ . •

Если  $|h|^2 \leq 2\mathbb{E}_0$  и  $\mathbb{E}_0$  достаточно мало, то, как следует из (5.4) и (5.7), начальная невязка мала и  $\|f_n\|$  со сверхстепенной скоростью стремится к нулю. Процесс сходится, и мы получаем предельные функции  $u_s = \tilde{u} \circ \Phi_s$ ,  $s = I, II$ , заданные на некоторых предельных областях  $\Omega_s^\infty$ . Последние определяются так же, как и  $\Omega_s$ , но со слегка измененными значениями параметров. Предельные отображения  $\Phi_s: \Omega_s^\infty \rightarrow \Omega_s$  мало отличаются от тождественных. Они имеют вид  $\Phi_s(x, \mathbb{E}) = (x + \varphi_s, \mathbb{E} + \Psi_s)$ , где  $\varphi_s$  и  $\Psi_s$  удовлетворяют оценкам вида (5.5) с  $\|f_0\|$  вместо  $\|f_n\|$ . Отсюда нетрудно вывести, что при достаточно малом  $\mathbb{E}_0$  отображения  $\Phi_s$  будут аналитическими вложениями.

## § 6. Сшивание решений

Пересечение секторов  $E_I$  и  $E_{II}$  в плоскости  $\mathbb{E}$  распадается на два сектора  $E_A$  и  $E_B$  соответственно в нижней и верхней полуплоскости. Обозначим  $\Omega'_\alpha = \{(x, \mathbb{E}) : x \in \mathcal{D}(R), \mathbb{E} \in E_\alpha, |\mathbb{E}| \leq |x|^{-m}\}$ ,  $\alpha = I, II, A, B$ . Можно считать (изменив соответственным образом константы в определении областей), что оба полученных в § 5 решения  $u_s = \tilde{u} \circ \Phi_s$  определены в  $\Omega'_s$ ,  $s = I, II$ . Отображение  $F_s: (x, \mathbb{E}) \mapsto (u_s, \Delta u_s)$  сопрягает сдвиг  $\sigma: (x, \mathbb{E}) \mapsto (x+1, \mathbb{E})$  с полустандартным отображением. Из этого следует, что  $F_{II}^{-1} \circ F_I$ , которое мы будем считать определенным в  $\Omega'_A \cup \Omega'_B = \Omega'_I \cap \Omega'_{II}$ , коммутирует с  $\sigma$  и, следовательно, имеет вид  $(x, \mathbb{E}) \mapsto (x + \varphi_{\alpha}, \mathbb{E} + \Psi_{\alpha}(x, \mathbb{E}))$ , где  $\varphi_\alpha, \Psi_\alpha$  – периодические по переменной  $x$  с периодом 1 функции, определенные в области  $\Omega'_\alpha$ ,  $\alpha = A, B$ . Из результатов § 3 и 5 следует, что

$$|\varphi_\alpha| + |\Psi_\alpha| \leq \text{const} |h|^{N'}, \quad (6.1)$$

где  $N'$  можно считать достаточно большим. Глобальное решение, определенное в области  $\Omega(R) = \Omega'_I \cup \Omega'_{II}$  (см. начало § 2), будем искать в виде

$$\hat{F} = \begin{cases} F_I \circ \Lambda_I & \text{в области } \Omega'_I, \\ F_{II} \circ \Lambda_{II} & \text{в области } \Omega'_{II}, \end{cases} \quad (6.2)$$

где  $\Lambda_\alpha$ ,  $\alpha = I, II$ , коммутирует с  $\sigma$ . Последнее условие обеспечивает то, что  $\hat{F}$  также сопрягает  $\sigma$  и  $f_{SSM}$ . Из (6.2) вытекает, что на областях  $\Omega'_A$  и  $\Omega'_B$  совпадают два разных выражения для  $\hat{F}$  или что

$$\Lambda_{II} \circ \Lambda_I^{-1} |_{\Omega'_{A,B}} = F_{II}^{-1} \circ F_I |_{\Omega'_{A,B}}. \quad (6.3)$$

В правой части (6.3) стоят диффеоморфизмы, коммутирующие с  $\sigma$  и мало отличающиеся от тождественного. Это уравнение можно рассматривать как уравнение относительно неизвестных отображений  $\Lambda_\alpha: \Omega'_\alpha \rightarrow \mathbb{C}^2$ ,  $\alpha = I, II$ , также близких к тождественному и коммутирующих с  $\sigma$ . Полагая  $\Lambda_\alpha = (x + \varphi_\alpha, \mathbb{E} + \Psi_\alpha)$ ,  $\alpha = I, II$ , где  $\varphi_\alpha$  и  $\Psi_\alpha$  малы, получаем, что в линейном приближении наша задача сводится к следующей. По заданным (векторным) функциям  $f_A, f_B$ , определенным в областях  $\Omega'_A$  и  $\Omega'_B$  соответственно,

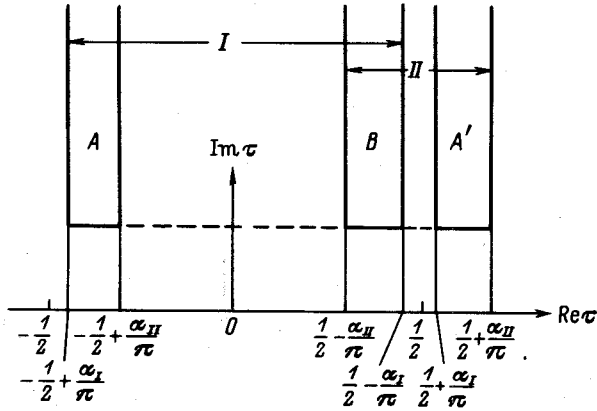


Рис. 4. Области I, II, A, B в плоскости переменной  $\tau$ .

найти функции  $\varphi_I$  и  $\varphi_{II}$ , определенные в областях  $\Omega_I'$  и  $\Omega_{II}'$  соответственно, удовлетворяющие системе равенств

$$\varphi_I - \varphi_{II} = f_s \text{ в } \Omega_s', \quad s = A, B. \quad (6.4)$$

Удобно вместо  $\xi$  ввести новую переменную  $\tau$  по формуле  $\xi = \exp(2\pi i \tau)$ . В плоскости  $\tau$  сечение  $x = \text{const}$  будет изображаться полуплоскостью  $\text{Im } \tau \geq \text{const}$ . Соответствующие образы сечений  $\Omega_{A, B}'$  будут полосами

$$A, B : \alpha_I/\pi \leq \frac{1}{2} \pm \text{Re } \tau \leq \alpha_{II}/\pi, \quad \text{Im } \tau \geq \text{const},$$

и полосами, получающимися из них целочисленными сдвигами вдоль вещественной оси.

Аналогично образы сечений  $\Omega_{I, II}'$  будут порождаться полосами (рис. 4):

$$I : -\frac{1}{2} + \frac{\alpha_I}{\pi} \leq \text{Re } \tau \leq \frac{1}{2} - \frac{\alpha_I}{\pi}, \quad \text{Im } \tau \geq \text{const},$$

$$II : |\text{Re } \tau - \frac{1}{2}| \leq \alpha_{II}/\pi, \quad \text{Im } \tau \geq \text{const}.$$

Представим  $f_s$  в виде  $f_s = f_{s\Pi} + f_{sI}$ ,  $s = A, B$ , где

$$f_{s,j} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial s} \chi_{sj}(\tau') \frac{f_s(\tau')}{\tau' - \tau} d\tau' + \frac{1}{2\pi i \tau} \oint_{\partial s} \chi_{sj}(\tau') f_s(\tau') d\tau'$$

и где  $\chi_{sj}$ ,  $j = \Pi, I$  — подходящая пара гладких функций, заданных на границе  $s$ , удовлетворяющих тождеству  $\chi_{s\Pi} + \chi_{sI} = 1$ , и таких, что  $\chi_{s\Pi} = 0$  на правой стороне  $s$ , а  $\chi_{sI} = 0$  — на левой. Решение системы (6.4) имеет вид

$$\varphi_s = \varphi_{s\Pi} + \varphi_{sI}, \quad s = I, II,$$

где

$$\varphi_{II}(\tau) = f_{A\Pi}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} (f_{A\Pi}(\tau+k) - f_{B\Pi}(\tau+k))$$

определено при  $\text{Re } \tau \geq -\frac{1}{2} + \alpha_I/\pi$ ,

$$\varphi_{II}(\tau) = f_{B\Pi}(\tau) - \sum_{k=1}^{\infty} (f_{A\Pi}(\tau-k) - f_{B\Pi}(\tau-k))$$

определено при  $\text{Re } \tau \leq \frac{1}{2} - \alpha_I/\pi$ ,

$$\varphi_{II\Pi}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (f_{A\Pi}(\tau+k) - f_{B\Pi}(\tau+k))$$

определено при  $\text{Re } \tau \geq \frac{1}{2} - \alpha_{II}/\pi$ ,

$$\varphi_{II I}(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (f_{B\Pi}(\tau-k) - f_{A\Pi}(\tau-k))$$

определено при  $\text{Re } \tau \leq \frac{1}{2} + \alpha_{II}/\pi$ .



Обычный метод Ньютона, примененный к (6.3), дает решение, удовлетворяющее оценкам, аналогичным (6.1).

### § 7. Завершение доказательства теоремы

Рассмотрим отображение  $\hat{F}: \Omega(R) \rightarrow (\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ , построенное в § 6. Нетрудно получить, что якобиан  $W$  этого отображения отличается от 1 на величину порядка  $h^{N-2}$ . Те же рассуждения, что и при доказательстве леммы 4, доказывают инъективность  $\hat{F}$ . По построению  $\hat{F}$  сопрягает сдвиг  $\sigma: (x, \xi) \mapsto (x+1, \xi)$  и полустандартное отображение. Отсюда следует, что  $W(x, \xi)$  — периодическая функция по переменной  $x$  с периодом 1. Суперпозиция  $\hat{F}$  с преобразованием вида  $(x, \xi) \mapsto (x, \tilde{\xi}(x, \xi))$ , где  $\tilde{\xi} = \int_0^x W^{-1}(x, \xi') d\xi'$  приводит к отображению  $F$ , имеющему якобиан, равный 1, и не меняет остальных свойств  $\hat{F}$ . Из вышесказанного следует, что полученное отображение  $F$  удовлетворяет условиям (а) и (б) теоремы. Выполнение условия (в) очевидно. Так как производные до второго порядка включительно функции  $\Phi - \text{id}$  оцениваются величиной порядка  $h^{N-4}$ , то оценки пункта (д) следуют из оценок (3.12) леммы 2. Осталось проверить условие (г). Пусть  $x_0 \in \mathcal{D}(R)$ . Рассмотрим точку  $(u, v) \in (\mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ , координаты которой удовлетворяют неравенству

$$|x_0|^{-2} |u - u_0(x)| + |x_0|^{-1} |v - v_0(x)| \leq |x_0|^{-m-1}.$$

Покажем, что система  $u(x, \xi) = u, v(x, \xi) = v$ , где  $u(x, \xi), v(x, \xi)$  — компоненты  $F(x, \xi)$ , имеет решение, если  $R$  достаточно велико.

Положим  $x = x_0 + x_0 \xi, \xi = x_0^{-2} \eta, u = u_0(x_0) + \alpha, v = v_0(x_0) + x_0^{-1} \beta$  и преобразуем систему к виду

$$\left. \begin{aligned} u(x_0 + x_0 \xi, x_0^{-2} \eta) - u_0(x_0) &= \alpha, \\ x_0 [v(x_0 + x_0 \xi, x_0^{-2} \eta) - v_0(x_0)] &= \beta. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

Масштабы подобраны так, что производные до второго порядка включительно по  $\xi$  и  $\eta$  левых частей уравнений (7.1) ограничены константами, не зависящими от  $x_0$ . Якобиан левой части (7.1) равен 1. Так как

$$|\alpha| + |\beta| \leq |x_0|^{-m+1} \leq R^{-1} |x_0|^{-m+2}$$

и область определения левых частей содержит множество  $\{(\xi, \eta): |\xi| + |\eta| \leq |x_0|^{-m+2}\}$ , то при достаточно больших  $R$  система (7.1) разрешима.

### Литература

- [1] Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. М.: ВИНТИ, 1985. 304 с.
- [2] Robinson C. Generic properties of conservative systems // Amer. J. Math. 1970. Vol. 92. P. 562–603, 897–906.
- [3] Дворин М. М., Лазуткин В. Ф. Существование бесконечного числа эллиптических и гиперболических траекторий для выпуклого бильярда // Функцион. анализ и его прил. 1977. Т. 7. С. 20–27.
- [4] Chirikov B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Physics Reports. 1979. Vol. 52. P. 263–379.
- [5] Gheene J. M. A method for determining a stochastic transition // J. Math. Physics. 1979. Vol. 20. P. 1183–1201.
- [6] Лазуткин В. Ф. Расщепление сепаратрис стандартного отображения Чирикова. Деп. в ВИНТИ 24.09.84, № 6372-84.
- [7] Лазуткин В. Ф., Табанов М. Б., Шахманский И. Г. Расщепление сепаратрис стандартного и полустандартного отображений. Деп. в ВИНТИ 10.06.85, № 4027-85.
- [8] Moser J. The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point // Comm. Pure and Appl. Math. 1956. Vol. 9. P. 673–692.
- [9] Greene J. M., Percival I. C. Hamiltonian maps in the complex plane // Physica. 1981. Vol. 3D. P. 530–548.
- [10] Percival I. C. Chaotic boundary of a Hamiltonian map // Physica. 1982. Vol. 6D. P. 67–77.
- [11] Лазуткин В. Ф. Расщепление комплексных сепаратрис // Функцион. анализ и его прил. 1988. Т. 22, вып. 2. С. 83–84.
- [12] Риордан Дж. Введение в комбинаторный анализ. М.: Физматгиз, 1963. 287 с.