ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 103, № 2
май, 1995

 В.А. Гейлер, В.В. Демидов

СПЕКТР ТРЕХМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ЛАНДАУ, ВОЗМУЩЕННОГО ПЕРИОДИЧЕСКИМ ТОЧЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Изучается трехмерный оператор Шредингера с магнитным полем, возмущенный периодической суммой потенциалов нулевого радиуса. В случае рационального потока найден явный вид разложения резольвенты этого оператора по спектру неприводимых представлений группы магнитных трансляций. В случае целого потока найден явный вид законов дисперсии, дано описание спектра и проведено его качественное исследование (в частности, установлено существование не более одной лакуны).

Введение. В статье рассматривается гамильтониан заряженной частицы (заряд e, масса m^*) в магнитном поле $\mathbf{B}$, т.е. оператор Шредингера с магнитным полем $H_0 = (2m^*)^{-1}(\hat{\mathbf{p}} - ec^{-1}\mathbf{A})^2$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ (для векторного потенциала $\mathbf{A}$ мы выбираем симметричную калибровку . $\mathbf{A} = (\mathbf{B} \times \mathbf{r})/2$; в физической литературе H_0 называют также оператором Ландау). Нас будет интересовать спектр периодических возмущений H этого оператора : $H = H_0 + V$. Несмотря на всевозрастающий интерес математиков к спектральной теории периодических операторов Ландау (см., например, [1–3]), ряд принципиальных вопросов этой теории до сих пор не решен даже в случае рационального потока поля через грани элементарной ячейки решетки периодов Λ потенциала V. Например, для двумерного периодического оператора Ландау с нетривиальным гладким потенциалом остается недоказанной гипотеза об отсутствии собственных значений в его спектре [4].

В случае рационального потока возможен магнитный аналог блоховского анализа периодического оператора Ландау [1,2], который приводит к зонной картине спектра $\sigma(H)$ оператора H (заметим, что укрупнением решетки Λ упомянутый случай сводится к рассмотрению целого потока через грани элементарной ячейки). При такой структуре спектра важным является вопрос о числе лакун в спектре $\sigma(H)$. Если $\mathbf{A} = \mathbf{0}$, то известная гипотеза Бете – Зоммерфельда утверждает, что число лакун в $\sigma(H)$ конечно [5]; недавно эта гипотеза была обоснована М. М. Скригановым [6,7]. Результаты Скриганова обобщаются на случай операторов Шредингера и Дирака с периодическим векторным потенциалом $\mathbf{A}$ [8]. Заметим сразу, что в отличие от случая $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ для двумерных операторов Ландау гипотеза Бете – Зоммерфельда тривиальным образом неверна. Действительно, если $|V(x,y)| \leqslant \hbar\omega/3$, где $\omega = |eB|/cm^*$ – циклотронная частота, то уровни Ландау расплываются в непересекающиеся зоны, поэтому их число бесконечно. Более содержательный пример такого рода см. в [9].

Один из результатов настоящей статьи подтверждает гипотезу Бете – Зоммерфельда для возмущения трехмерного оператора Ландау периодическим точечным потенциалом [10,11] (отметим, что для операторов Шредингера ($\mathbf{A} = \mathbf{0}$) с точечным возмущением гипотеза Бете – Зоммерфельда была доказана в [12,13]). Этот результат основан на полученных в статье явных формулах для функции Грина оператора H и явных выражениях для его законов дисперсии, которые вытекают из энергетических и пространственных асимптотик функции Грина гамильтониана H_0. Основные результаты статьи опираются на технику разложения пространства состояний по спектру неприводимых представлений группы магнитных трансляций (эта группа введена в [14]); двумерный вариант упомянутой техники применялся для исследования спектра периодического оператора Ландау в [15 –17]. Используемое нами разложение есть аналог разложения $L^2(\mathbb{R}^3)$ в прямой интеграл по зоне Бриллюэна в p-представлении [18].

1. Здесь мы введем основные обозначения и кратко опишем конструкцию разложения пространства состояний $L^2(\mathbb{R}^3)$ в прямой интеграл по спектру неприводимых представлений группы магнитных трансляций, т.е. по магнитной зоне Бриллюэна. Следует отметить, что на физическом уровне строгости использование прямых интегралов сводится к переходу в представление квантовых чисел Ванье [19], что, по существу, делал уже Зак [20].

Пусть Λ – решетка в $\mathbb{R}^3$ с образующими $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$. Условимся в дальнейшем координаты вектора $\mathbf{v}$ относительно базиса $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ обозначать цифровыми индексами: $\mathbf{v} = v_1\mathbf{a}_1 + v_2\mathbf{a}_2 + v_3\mathbf{a}_3$, а относительно стандартного базиса $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ – буквенными: $\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$. Для перехода к безразмерным единицам введем векторы $\boldsymbol{\xi} = e\mathbf{B}/2\pi c\hbar$ и $\boldsymbol{\eta} = \Omega\boldsymbol{\xi}$, где $\Omega = \mathbf{a}_1(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)$ – ориентированный объем элементарной ячейки C_Λ решетки Λ, $C_\Lambda = \{t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + t_3\mathbf{a}_3 : 0 \leqslant t_1, t_2, t_3 < 1\}$. Координаты вектора $\boldsymbol{\eta}$ в базисе $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ суть числа квантов потока поля $\mathbf{B}$ через соответствующие грани ячейки C_Λ : $\eta_1 = \boldsymbol{\xi}(\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3), \ldots$ (квант магнитного потока $\Phi_0 = |e|/2\pi c\hbar$). Поле $\mathbf{B}$ называется рациональным (относительно решетки Λ), если все числа η_i рациональные [14,21]; это определение не зависит, очевидно, от выбора образующих решетки. Более того, при выполнении условия рациональности образующие $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ можно выбрать так, что $\eta_1 = \eta_2 = 0$; в дальнейшем считаем, что выбор образующих произведен именно таким образом и обозначаем $\eta_3 = \eta$, $\xi_z = \xi$. Кроме того, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ выбираем так, что $a_{1y} = a_{3x} = a_{3y} = 0$, $a_{1x}, a_{3y} > 0$.

Используя введенные обозначения, гамильтониан H_0 с точностью до множителя $\hbar^2/2m^*$, который в дальнейшем опускаем, можно записать в виде

$$H_0 = (-i\partial/\partial x + \pi\xi y)^2 + (-i\partial/\partial y - \pi\xi x)^2 - \partial^2/\partial z^2.$$

Через $W(\boldsymbol{\xi})$ обозначаем группу магнитных трансляций, т.е. множество $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{S}$, где $\mathbb{S} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\}$, наделенное умножением

$$(\mathbf{v}, \zeta)(\mathbf{v}', \zeta') = \big(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \zeta\zeta' \exp\left[\pi i\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}')\right]\big)$$

(см. [14]. Пусть $(\mathbf{v}, \zeta) \in W(\boldsymbol{\xi})$; через $[\mathbf{v}, \zeta]$ обозначим оператор, действующий на функции f, определенные в $\mathbb{R}^3$, по формуле

$$[\mathbf{v}, \zeta]f(\mathbf{r}) = \zeta \exp[-\pi i\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})]f(\mathbf{r} - \mathbf{v}). \tag{1.1}$$

Легко проверить, что отображение $(\mathbf{v},\zeta)\mapsto[\mathbf{v},\zeta]$ есть унитарное представление группы $W(\boldsymbol{\xi})$ в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$, относительно которого оператор H_0 инвариантен.

Пусть V – периодическое возмущение оператора H_0 с решеткой периодов Λ, тогда $H=H_0+V$ остается инвариантным относительно операторов $[\boldsymbol{\lambda},\zeta]$, где $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$. Обозначим через $W(\boldsymbol{\xi},\Lambda)$ подгруппу группы $W(\boldsymbol{\xi})$, состоящую из всех элементов вида $(\boldsymbol{\lambda},\zeta)$, где $\boldsymbol{\lambda}\in\Lambda$, а $\zeta=\exp(\pi i\sum n_k\eta_k)$, $n_k\in\mathbb{Z}$. Если одно из чисел η_i иррационально, то унитарные представления группы $W(\boldsymbol{\xi},\Lambda)$ неоднозначно разлагаются на неприводимые представления [22] (т.е. $W(\boldsymbol{\xi},\Lambda)$ – группа типа II), и гармонический анализ на этой группе не приносит существенной пользы в исследовании оператора H. В связи с этим предположение рациональности магнитного поля относительно решетки Λ – стандартное предположение теории периодических операторов Ландау [1,14,21], которое мы в дальнейшем и принимаем. Рациональное число η впредь будем считать положительным и заданным несократимой дробью: $\eta=N/M$ $(N,M\in\mathbb{N})$.

С базисом $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ связан полный ортонормированный набор (обобщенных) собственных функций $\psi_0(\mathbf{r};l,q,s)$ (функций Ландау), зависящий от трех параметров l, q, s $(l\in\mathbb{N},\ q,s\in\mathbb{R})$; вид этих функций таков [22]:

$$\psi_0(\mathbf{r};l,q,s)=A(l,q,s)\exp\left[2\pi i\left(a_{3z}^{-1}sz+\xi x(y/2+\beta q+\gamma s)\right)\right]\times$$
$$\times\, u_l\left[(2\pi|\xi|)^{1/2}(y+\beta q+\gamma s)\right],$$

где $u_l(x)=\exp(-x^2/2)H_l(x)$ – функция Эрмита; $\beta=a_{2y}/\eta$; $\gamma=-a_{1z}a_{2y}/a_{3z}\eta$; $A(l,q,s)=(2|\xi|)^{1/4}\exp\left[\pi i(\sigma_1q^2+\sigma_2qs)\right](a_{1x}a_{3z}2^l l!)^{-1/2}$; $\sigma_1=a_{2x}/a_{1x}\eta$; $\sigma_2=2\times(a_{1x}a_{2z}-a_{1z}a_{2x})/a_{1x}a_{3z}\eta$. Обозначим $\alpha=4\pi^2/a_{3z}^2$, тогда

$$H_0\psi_0(\cdot;l,q,s)=(\varepsilon_l+\alpha s^2)\psi_0(\cdot;l,q,s),$$

где $\varepsilon_l=4\pi|\xi|(l+1/2)$ – уровни Ландау.

Введем преобразование Фурье – Ландау $\mathcal{F}_L$, являющееся гильбертовым изоморфизмом пространства состояний $L^2(\mathbb{R}^3)$ на пространство $l^2(\mathbb{N})\otimes L^2(\mathbb{R}^2)$ по формуле

$$(\mathcal{F}_Lf)(l,q,s)=\int_{\mathbb{R}^3}f(\mathbf{r})\psi_0^*(\mathbf{r};l,q,s)\,d\mathbf{r},$$

тогда для действия оператора $[\mathbf{v},\zeta]$ получаем [22]

$$(\mathcal{F}_L[\mathbf{v},\zeta]f)(l,q,s)=\zeta\exp[-2\pi i(v_1q+v_3s+\eta v_1v_2/2)]\mathcal{F}_Lf(l,q+\eta v_2,s). \tag{1.2}$$

Будем обозначать через $\mathbb{T}^3_\eta$ трехмерный тор, разверткой которого является параллелепипед $[0,M^{-1})\times[0,1)\times[0,1)$. Обозначим теперь через $\mathcal{H}'$ прямой интеграл $\mathcal{H}'=\int^{\oplus}_{\mathbb{T}^3_\eta}\mathcal{H}'(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}$, где слой $\mathcal{H}'(\mathbf{p})$ имеет вид $\mathcal{H}'(\mathbf{p})=\mathbb{C}^M\otimes\mathbb{C}^N\otimes l^2(\mathbb{Z})$, а через $\mathcal{H}$ – прямой интеграл $\mathcal{H}=\int^{\oplus}_{\mathbb{T}^3_\eta}\mathcal{H}(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}$ со слоями $\mathcal{H}(\mathbf{p})=\mathbb{C}^M\otimes\mathbb{C}^N\otimes l^2(\mathbb{N})\otimes l^2(\mathbb{Z})$. Элементы пространства $\mathcal{H}$ нам будет удобно рассматривать как функции $f(\mathbf{p};j,k,l,n)$ пяти переменных $\mathbf{p}=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{T}^3_\eta$, $j\in\{0,1,\dots,M-1\}$, $k\in\{0,1,\dots,N-1\}$, $l\in\mathbb{N}$,

$n \in \mathbb{Z}$; элементы пространства $\mathcal{H}'(\mathbf{p})$ будем трактовать аналогично. Преобразованием Зака называется гильбертов изоморфизм $\mathcal{Z}_\eta$ пространства $L^2(\mathbb{R}^2)$ на пространство $\mathcal{H}'$, имеющий вид [23] ($f = f(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$)

$$(\mathcal{Z}_\eta f)(\mathbf{p}; j, k, n) = N^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[2\pi i m(p_2 + k)/N] f(p + m + jn, p_3 + n).$$

Композиция отображений $\mathcal{F}_L$ и $\mathcal{Z}_\eta \otimes I_{l^2(\mathbb{N})}$ есть гильбертов изоморфизм пространств $L^2(\mathbb{R}^3)$ и $\mathcal{H}$, который будем называть преобразованием Ландау–Зака и обозначать $\mathcal{L}_\eta$. Это преобразование диагонализует оператор Ландау H_0 и одновременно разлагает представление $(\boldsymbol{\lambda}, \zeta) \mapsto [\boldsymbol{\lambda}, \zeta]$ группы $W(\boldsymbol{\xi}, \Lambda)$ на примарные. А именно, пусть $\Delta(\cdot; \mathbf{p})$, где $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3_\eta$, – неприводимое представление группы $W(\boldsymbol{\xi}, \Lambda)$ в конечномерном пространстве $\mathbb{C}^M$, матрицы которого на образующих определены следующим образом [14]:

$$\Delta((\mathbf{a}_1, 1); \mathbf{p}) = \mathrm{diag}[\exp(-2\pi i p_1), \exp(-2\pi i(p_1 + \eta)), \ldots, \exp(-2\pi i(p_1 + (M-1)\eta))];$$
$$\Delta((\mathbf{a}_2, 1); \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 0 & I_{M-1} \\ \exp(-2\pi i p_2) & 0 \end{bmatrix};$$
$$\Delta((\mathbf{a}_3, 1); \mathbf{p}) = \exp(-2\pi i p_3) I_M; \qquad \delta((\mathbf{0}, \zeta); \mathbf{p}) = \zeta I_M$$

(здесь I_n – единичная матрица порядка $n \times n$).

В дальнейшем какой-либо оператор S в $L^2(\mathbb{R}^3)$ и его образ $\mathcal{L}S\mathcal{L}^{-1}$ в пространстве $\mathcal{H}$ будем обозначать, поскольку это не ведет к недоразумениям, одним и тем же символом S.

ТЕОРЕМА 1. *В представлении Ландау-Зака операторы H_0 и $[\boldsymbol{\lambda}, \zeta]$ ($[\boldsymbol{\lambda}, \zeta] \in W(\boldsymbol{\xi}, \Lambda)$) действуют послойно. При этом справедливы утверждения:* 1) *слой $H_0(\mathbf{p})$ оператора H_0 над точкой $\mathbf{p}$ есть компактный оператор, являющийся оператором умножения на последовательность $\left(\varepsilon_l + \alpha(p_3 + n)^2\right)_{l,n}$;* 2) *каждое собственное число $E^0_{ln}(\mathbf{p}) = \varepsilon_l + \alpha(p_3 + n)^2$ оператора $H_0(\mathbf{p})$ имеет кратность, делящуюся на MN (вырождение по индексам j и k). Точнее, кратность собственного числа $E^0_{ln}(\mathbf{p})$ равна νMN, где ν – число пар (l', n'), таких что $E^0_{l'n'}(\mathbf{p}) = E^0_{ln}(p)$;* 3) *операторы $[\boldsymbol{\lambda}, \zeta]$ в слое над $\mathbf{p}$ действуют только по переменной j умножением на матрицу $\Delta(\mathbf{p}; [\boldsymbol{\lambda}, \zeta])$.*

Доказательство этой теоремы проводится прямыми вычислениями с использованием формулы (1.2).

Из пункта 3 теоремы вытекает, что вырождение по индексу k случайное и снимается сколь угодно малым периодическим возмущением оператора H_0, в то время как любое возмущение оператора H_0, коммутирующее с группой магнитных трансляций, оставляет слой над $\mathbf{p}$ вырожденным с кратностью, делящейся на M.

2. Здесь мы определим оператор H, формально имеющий вид

$$H = H_0 + \sum_{\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda} \varepsilon_{\boldsymbol{\lambda}} \delta(\mathbf{r} - \boldsymbol{\lambda}), \tag{2.1}$$

где $\delta(\mathbf{r})$ – δ-функция Дирака. Для математически корректного определения оператора H заметим вначале, что в силу леммы 1 (см. ниже) $D(H_0)$ – область определения H_0 –

состоит из непрерывных функций. Пусть теперь $D_S = \{\varphi \in D(H_0)\colon \varphi(\boldsymbol{\lambda}) = 0\ \forall \boldsymbol{\lambda} \in \Lambda\}$, S – сужение оператора H_0 на D_S, и H – некоторое самосопряженное расширение оператора S, дизъюнктное с H_0 (последнее означает, что $D(H) \cap D(H_0) = D(S)$). Тогда резольвента $R(z) = (H - z)^{-1}$ оператора H задается формулой Крейна [10]

$$R(z) = R_0(z) - \Gamma_z[Q(z) + T]^{-1}\Gamma_{\bar{z}}^*, \tag{2.2}$$

где $R_0(z)$ – резольвента оператора H_0, $Q(z)$ и Γ_z – так называемые Q-функция и Γ-поле, которые определяются следующим образом. Пусть $\mathcal{G}$ – некоторое вспомогательное гильбертово пространство, размерность которого совпадает с размерностью дефектного пространства $\operatorname{Ker}(S^* - i)$. При $z = i$ в качестве Γ_z можно взять произвольный линейно-топологический изоморфизм $\mathcal{G}$ на $\operatorname{Ker}(S^* - i)$, для остальных $z \in \rho(H_0)$ ($\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \sigma(A)$ – множество регулярных значений оператора A) полагаем $\Gamma_z = (H_0 - i)(H_0 - z)^{-1}\Gamma_i$. Q-функция есть голоморфное по z, $z \in \rho(H_0)$, семейство ограниченных линейных операторов в $\mathcal{G}$, которое с точностью до самосопряженного слагаемого однозначно определяется условием

$$Q(\zeta) - Q(z)^* = (\zeta - \bar{z})\Gamma_z^*\Gamma_\zeta. \tag{2.3}$$

Наконец, T есть самосопряженный (не обязательно ограниченный) оператор в $\mathcal{G}$, параметризующий самосопряженные расширения H, его можно определить граничными значениями в точках из Λ, задающими оператор H [10].

Для того чтобы в нашем случае найти явный вид операторов $Q(z)$ и Γ_z, нам потребуется функция Грина оператора H_0 (т.е. интегральное ядро $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \zeta)$ резольвенты $R_0(\zeta)$). Поскольку переменная z в операторе H_0 отделяется от переменных x, y, постольку выражение для G_0 легко получить следующими двумя способами: 1) из функции Грина двумерного оператора Ландау и собственных функций оператора $-d^2/dz^2$; 2) из проекторов на собственные подпространства двумерного оператора Ландау и функции Грина оператора $-d^2/dz^2$. Это приводит к следующим выражениям (в которых $\mathbf{r}_\perp = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, $\mathbf{r}_\| = z\mathbf{k}$):

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \zeta) = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')F_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; \zeta) = \Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')F_2(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; \zeta), \tag{2.4}$$

где

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (|\xi|/16\pi)^{1/2} \exp\left[-i\pi\boldsymbol{\xi}(\mathbf{r} \times \mathbf{r}') - \pi|\xi|(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp)^2/2\right],$$

$$F_1(\mathbf{r}; \zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\exp\left[-(4\pi|\xi|(l + 1/2) - \zeta)^{1/2}|\mathbf{r}_\||\right]}{(l + 1/2 - \zeta/4\pi|\xi|)^{1/2}} L_l(\pi|\xi|\mathbf{r}_\perp^2),$$

$$F_2(\mathbf{r}; \zeta) = \pi^{-1/2}\int_0^\infty \frac{\exp\left[-\pi|\xi|\left(\mathbf{r}_\perp^2/(e^t - 1) + \mathbf{r}_\|^2 t^{-1}\right)\right] dt}{(1 - e^{-t})\exp\left[(1/2 - \zeta/4\pi|\xi|)t\right]\sqrt{t}}.$$

Лемма 1. 1. *Ряд F_1 равномерно сходится в достаточно малой окрестности любой точки $(\mathbf{r}; \zeta)$, где $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$, $\zeta/4\pi|\xi| - 1/2 \notin \mathbb{N}$; тем самым $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \zeta)$ непрерывна по аргументам $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ и голоморфна по ζ при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, $\zeta/4\pi|\xi| - 1/2 \notin \mathbb{N}$.* 2. *Пусть $\zeta_0 \in \rho(H_0)$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся константы δ, $c_1, c_2 > 0$ такие, что*

$|G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';\zeta)| \leqslant c_1 \exp[-c_2|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|]$, *как только* $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| \geqslant \varepsilon$, $|\zeta-\zeta_0| \leqslant \delta$. 3. *Если* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^3)$, *то интеграл* $\int G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';\zeta)\varphi(\mathbf{r}')\,d\mathbf{r}'$ *есть непрерывная функция от* $\mathbf{r}$.

В силу леммы 1 применимы результаты [24], согласно которым семейство функций $g_{\boldsymbol\lambda}(z)$ ($\boldsymbol\lambda \in \Lambda$), $g_{\boldsymbol\lambda}(z)(\mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r},\boldsymbol\lambda;z)$ образует базис Рисса в дефектном пространстве $\mathrm{Ker}(S^*-z)$. Поэтому мы можем считать, что $\mathcal{G} = l^2(\Lambda)$, и отображение Γ_z определить формулой

$$\Gamma_z(x) = \sum_{\boldsymbol\lambda\in\Lambda} \xi_{\boldsymbol\lambda} g_{\boldsymbol\lambda}(z) \qquad \left(x = (\xi_{\boldsymbol\lambda}) \in l^2(\Lambda)\right). \tag{2.5}$$

Среди операторов H, определяемых формулой (2.1), выделяются те, у которых матрица оператора T в стандартном базисе пространства $l^2(\Lambda)$ диагональна: это в точности операторы, которые представимы как пределы в смысле сильной резольвентной сходимости локальных возмущений оператора H_0 [11]. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением именно таких операторов H, считая тем самым, что формула (2.2) по определению задает оператор, формально имеющий вид (2.3). При этом требование периодичности оператора H, точнее требование инвариантности H относительно группы магнитных трансляций, приводит к совпадению всех элементов матрицы T, стоящих на главной диагонали; этот общий элемент мы в дальнейшем обозначаем τ. Наконец, стандартные вычисления с использованием формул (2.3) – (2.5) и резольвентного тождества Гильберта приводят к следующему виду матрицы $Q(\boldsymbol\lambda,\boldsymbol\lambda';z)$ оператора $Q(z)$ в стандартном базисе пространства $l^2(\Lambda)$:

$$Q(\boldsymbol\lambda,\boldsymbol\lambda';z) = \begin{cases} \frac{1}{4}(|\xi|/\pi)^{1/2}\zeta(1/2, 1/2 - z/4\pi|\xi|), & \text{если } \boldsymbol\lambda = \boldsymbol\lambda'; \\ G_0(\boldsymbol\lambda,\boldsymbol\lambda';z), & \text{если } \boldsymbol\lambda \neq \boldsymbol\lambda' \end{cases} \tag{2.6}$$

(здесь $\zeta(u,z)$ – обобщенная ζ-функция Римана [25]); заметим, что диагональный элемент матрицы Q с помощью аналогичных вычислений был получен в [26]. Теперь формула (2.2) приводит к следующему виду функции Грина оператора H:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}';z) = G_0(\mathbf{r},\mathbf{r}';z) - \sum_{\boldsymbol\lambda,\boldsymbol\mu\in\Lambda} [Q(z)+\tau]^{-1}_{\boldsymbol\lambda\boldsymbol\mu} G_0(\mathbf{r},\boldsymbol\lambda;z)G_0(\boldsymbol\mu,\mathbf{r}';z). \tag{2.7}$$

3. Спектральный анализ оператора H будет основан на формуле (2.7), записанной в представлении Ландау – Зака. Чтобы найти вид функции Грина G в этом представлении, нам потребуется изучить дискретный аналог введенного в п. 1 представления группы $W(\boldsymbol\xi,\Lambda)$. Элементы пространства $\mathcal{G} = l^2(\Lambda)$ будем рассматривать как функции $\varphi = \varphi(\boldsymbol\mu)$ дискретного переменного $\boldsymbol\mu \in \Lambda$; каждому элементу $(\boldsymbol\lambda,\zeta)$, $(\boldsymbol\lambda,\zeta) \in W(\boldsymbol\xi,\Lambda)$, сопоставим оператор $[\boldsymbol\lambda,\zeta]$, действующий по формуле

$$[\boldsymbol\lambda,\zeta]\varphi(\boldsymbol\mu) = \zeta\exp\left[-\pi i\eta(\mu_1\lambda_2 - \mu_2\lambda_1)\right]\varphi(\boldsymbol\mu - \boldsymbol\lambda), \tag{3.1}$$

являющийся аналогом формулы (1.1). Заметим, что одинаковое обозначение $[\boldsymbol\lambda,\zeta]$ для различных операторов (1.1) и (3.1) не приведет в дальнейшем к недоразумениям, поскольку смысл этого обозначения всегда будет ясен из контекста. Магнито-блоховское разложение оператора H основано, по сути дела, на разложении представления (3.1) на неприводимые представления, которое мы сейчас и опишем.

Пусть $\tilde{\mathcal{G}} = \int^{\oplus}_{\mathbb{T}^3_\eta} \tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}$, где каждый слой $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p})$ совпадает с пространством $\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M$ (таким образом, при $M = 1$ пространство $\tilde{\mathcal{G}}(\mathbf{p})$ одномерно). Зафиксируем $\mathbf{p}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3_\eta$, и определим представление $\Delta_\eta(\mathbf{p})$ группы $W(\boldsymbol{\xi}, \Lambda)$ в пространстве $\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M$, задав его на образующих следующим образом: $\Delta_\eta(\mathbf{p}; (\mathbf{a}_j, 1)) = \Delta(\mathbf{p}; (\mathbf{a}_j, 1)) \otimes I_{\mathbb{C}^M}$ при $j = 1$ и $j = 3$; $\Delta_\eta(\mathbf{p}; (\mathbf{0}; \zeta)) = \zeta I$; действие же оператора $\Delta_\eta(\mathbf{p}; (\mathbf{a}_2, 1))$ на элементах $\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ $(j, k = 0, 1, , \dots, M-1)$ стандартного базиса пространства $\mathbb{C}^M \otimes \mathbb{C}^M$ зададим формулой

$$\Delta_\eta(\mathbf{p}; (\mathbf{a}_2, 1))(\mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k) = \exp[-2\pi i p_2 \delta_{k,M-1}]\mathbf{e}_{j\ominus 1} \otimes \mathbf{e}_{k\oplus 1},$$

в которой символы $\oplus$ и $\ominus$ означают сложение и вычитание по модулю M во множестве $\{0, 1, \dots, M-1\}$. Нетрудно проверить корректность определения этого представления, пользуясь формулой коммутации

$$(\mathbf{v}, \zeta)(\mathbf{v}', \zeta') = \big(\mathbf{0}, \exp\big[2\pi i \boldsymbol{\xi}(\mathbf{v} \times \mathbf{v}')\big]\big)\,(\mathbf{v}', \zeta')(\mathbf{v}, \zeta),$$

а также справедливость следующего утверждения:

Предложение 1. *Представление $\Delta_\eta(\mathbf{p})$ кратно (с кратностью M) представлению $\Delta(\mathbf{p})$.*

Определим теперь гильбертов изоморфизм $\mathcal{F}_\eta$ пространства $\mathcal{G} = l^2(\Lambda)$ на пространство $\tilde{\mathcal{G}}$ следующей формулой:

$$(\mathcal{F}_\eta \varphi)(\mathbf{p}; j, m) = \sum_{\lambda_i \in \mathbb{Z}} \varphi(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + (\lambda_2 M + m)\mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3) \times$$
$$\times \exp\big[-2\pi i\,(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + (\eta/2)\lambda_1(M\lambda_2 + m + 2j))\big].$$

Представим решетку Λ в виде суммы двумерной Λ_1 и одномерной Λ_2 решеток: $\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2$, где Λ_1 натянута на векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, а Λ_2 – на вектор $\mathbf{a}_3$; тогда $l^2(\Lambda)$ разлагается в тензорное произведение $l^2(\Lambda) = l^2(\Lambda_1) \otimes l^2(\Lambda_2)$. Этому разложению соответствует разложение представления (3.1) в произведение, второй сомножитель которого есть представление сдвигами. Теперь из теоремы 14 работы [17] получаем следующее утверждение:

Теорема 2. *Оператор $\mathcal{F}_\eta$ сплетает представление* (3.1) *с прямым интегралом по тору $\mathbb{T}^3_\eta$ представлений $\Delta_\eta(\cdot; \mathbf{p})$ и тем самым разлагает представление* (3.1) *на неприводимые.*

Пусть теперь V – ограниченный оператор в $\mathcal{G}$, инвариантный относительно представления (3.1) группы магнитных трансляций; и пусть $(V(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}'))_{\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda}' \in \Lambda}$ – его матрица. Легко проверить, что оператор $\tilde{V} = \mathcal{F}_\eta V \mathcal{F}_\eta^{-1}$ имеет следующее ядро (являющееся, вообще говоря, операторнозначной обобщенной функцией от $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3_\eta$ со значениями в пространстве матриц порядка $M^2 \times M^2$):

$$\tilde{V}(\mathbf{p}; j, m; j', m') = \delta_{jj'} \times \sum_{\lambda_i \in \Lambda} V(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + (\lambda_2 M + m)\mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3, m' \mathbf{a}_2) \times$$
$$\times \exp\left[-2\pi i(\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 + (\eta/2)\lambda_1(M\lambda_2 + m + 2j))\right]. \tag{3.2}$$

Эта формула показывает, что при фиксированном $\mathbf{p}$ матрица $\tilde{V}(\mathbf{p};j,m;j',m')$ имеет следующую блочную структуру: ее можно представить как диагональную по индексу j матрицу $(\delta_{jj'}\tilde{V}_j(m,m'))$, элементы которой – матрицы $(\tilde{V}_j(m,m'))_{m,m'}$, имеющие вид $\tilde{V}_j(m,m') = \tilde{V}(\mathbf{p};j,m;j,m')$.

Обозначим через $\tilde{g}_{\boldsymbol{\lambda}}(z)$ образ функции $g_{\boldsymbol{\lambda}}(z)$ (см. п. 2) при преобразовании Ландау – Зака: $\tilde{g}_{\boldsymbol{\lambda}}(z) = \mathcal{L}_\eta g_{\boldsymbol{\lambda}}(z)$. Нас будут интересовать элементы $\tilde{g}_{\boldsymbol{\lambda}}$ при $\boldsymbol{\lambda} = m\mathbf{a}_2$ ($m = 0,1,\dots,M-1$), которые будем обозначать просто $\tilde{g}_m$. Прямым вычислением нетрудно показать, что

$$\tilde{g}_{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{p};j,k,l,n;z) = (\varepsilon_l + \alpha(p_3+n)^2 - z)^{-1}\delta_m(\mathbf{p};j,k,l,n), \tag{3.3}$$

где

$$\delta_m(\mathbf{p};j,k,l,n) = \\ = N^{-1/2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp[2\pi i m(p_2+k)/N]\psi_0^*(m\mathbf{a}_2;l,p_1+m+j\eta,p_3+n). \tag{3.4}$$

Наконец, через $\tilde{R}(z)$ обозначим преобразование Ландау – Зака оператора $R(z)$: $\tilde{R}(z) = \mathcal{L}_\eta R(z)\mathcal{L}_\eta^{-1}$ (см. (2.2)). Основной в этом пункте является следующая

Теорема 3. *Оператор $\tilde{R}(z)$ в пространстве $\mathcal{H} = \int_{\mathbb{T}^3_\eta}^{\oplus}\mathcal{H}(\mathbf{p})\,d\mathbf{p}$ действует послойно; его ядро $\tilde{G}$ (т.е. функция Грина оператора H в представлении Ландау – Зака) в слое $\mathbb{C}^M\otimes\mathbb{C}^N\otimes l^2(\mathbb{N})\otimes l^2(\mathbb{Z})$ над точкой $\mathbf{p}$ имеет вид*

$$\tilde{G}(\mathbf{p};j,k,l,n;j',k',l',n';z) = \\ = (\varepsilon_l+\alpha(p_3+n)^2-z)^{-1} - \delta_{jj'}\sum_{m,m'=0}^{M-1}\Big[\tilde{Q}_j(\mathbf{p};z)+\tau\Big]^{-1}(m,m')\times \\ \times\frac{\delta_m(\mathbf{p};j,k,l,n)}{(\varepsilon_l+\alpha(p_3+n)^2-z)}\frac{\tilde{\delta}^*_{m'}(\mathbf{p};j',k',l',n')}{(\varepsilon_{l'}+\alpha(p_3+n')^2-z)}. \tag{3.5}$$

Здесь матрица $\tilde{Q}_j(\mathbf{p};z) = \tilde{Q}_j(\mathbf{p};m,m';z)$ получается из матрицы $Q(\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\lambda}';z)$ (см. (2.6)) по формуле (3.2) с учетом следующего за ней замечания.

Следствие. *Спектр оператора H при фиксированном квазиимпульсе $\mathbf{p}$ имеет кратность νM, где натуральное число ν ($\nu \geqslant 1$) зависит от $\mathbf{p}$.*

4. В этом пункте мы проведем исследование спектра оператора H с помощью формулы (3.5). Впредь для простоты ограничимся случаем целого потока: $\eta = N$ ($M = 1$). В этом случае индексы j и m принимают только значение 0, поэтому они из обозначений исключаются. Формулы (3.2), (3.4) и (3.5) упрощаются и принимают вид

$$\tilde{G}(\mathbf{p};k,l,n;k',l',n';z) = (\varepsilon_l+\alpha(p_3+n)^2-z)^{-1} - \Big[\tilde{Q}(\mathbf{p};z)+\tau\Big]^{-1}\times \\ \times\frac{\tilde{\delta}(\mathbf{p};k,l,n)}{(\varepsilon_l+\alpha(p_3+n)^2-z)}\frac{\tilde{\delta}^*(\mathbf{p};k',l',n')}{(\varepsilon_{l'}+\alpha(p_3+n')^2-z)},$$

где

$$\tilde{Q}(\mathbf{p};z) = \frac{1}{4}(|\xi|/\pi)^{1/2}\zeta(1/2, 1/2 - z/4\pi|\xi|) + \sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \lambda\neq\mathbf{0}}} G_0(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{0}; z)\exp[-2\pi i(\boldsymbol{\lambda}\mathbf{p} + N\lambda_1\lambda_2/2)],$$

$$\tilde{\delta}(\mathbf{p};k,l,n) = N^{-1/2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\exp\left[2\pi i m(p_2+k)/N\right]\psi_0^*(\mathbf{0};l,p_1+m,p_3+n).$$

В соответствии с (3.3) обозначим $\tilde{g}(\mathbf{p};k,l,n;z) = (\varepsilon_l + \alpha(p_3+n)^2 - z)^{-1}\tilde{\delta}(\mathbf{p};k,l,n)$. Отметим следующее утверждение.

Лемма 2. 1. *Функция $\tilde{Q}(\mathbf{p};z)$, а также при фиксированных k, l, n функции $\tilde{g}(\mathbf{p};k,l,n;z)$ и $\tilde{\delta}(\mathbf{p};k,l,n)$ вещественно-аналитичны по аргументам p_1, p_2, p_3 и голоморфны по z в своих областях определения. 2. Справедлива формула*

$$\partial\tilde{Q}(\mathbf{p};z)/\partial z = \sum_{l,n}(\varepsilon_l + \alpha(p_3+n)^2 - z)^{-2}\sum_{k=0}^{N-1}|\delta(\mathbf{p};k,l,n)|^2.$$

3. *При любом $\mathbf{p}$ имеет место асимптотика*

$$\tilde{Q}(\mathbf{p};z) = \frac{1}{4}(|\xi|/\pi)^{1/2}\zeta(1/2, 1/2 - z/4\pi|\xi|) + O(r(z)),$$

где $r(z)\to 0$ при $\operatorname{Re} z\to -\infty$ равномерно относительно $\mathbf{p}$, пробегающих компакты из $\mathbb{R}^3$. 4. Пусть $U_l = \{\mathbf{p}\in\mathbb{T}^3_\eta\colon \delta(\mathbf{p};\cdot,l,n)\neq 0$ в пространстве $\mathbb{C}^N$ при всех $n\in\mathbb{Z}\}$. Тогда U_l – открытое подмножество $\mathbb{T}^3_\eta$ полной лебеговой меры и $\bigcup_{l=1}^{\infty} U_l = \mathbb{T}^3_\eta$.

Далее нам понадобятся такие обозначения. Через $H(\mathbf{p})$ обозначим слой над точкой $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}\in\mathbb{T}^3_\eta$, оператора H. Через $(\mathcal{E}_j(\mathbf{p}))_{j\geqslant 0}$ будем обозначать упорядоченную по возрастанию последовательность всех чисел вида $\varepsilon_l + \alpha(p_3+n)^2$ с учетом их кратности в спектре оператора $H_0(\mathbf{p})$, которую обозначим $d_j^0(\mathbf{p})$; положим также $\mathcal{E}_{-1}(\mathbf{p}) = -\infty$. Пусть $\varepsilon_{l_0}(\mathbf{p}) < \varepsilon_{l_1}(\mathbf{p}) < \dots < \varepsilon_{l_m}(\mathbf{p}) < \dots$ – последовательность всех уровней Ландау, для которых $\tilde{\delta}(\mathbf{p};\cdot,l_m,n)\neq 0$ в пространстве $\mathbb{C}^N$ при всех $n\in\mathbb{Z}$. Обозначим через $(\mathcal{E}'_j(\mathbf{p}))_{j\geqslant 0}$ упорядоченную по возрастанию последовательность всех чисел вида $\varepsilon_{l_m}(\mathbf{p}) + \alpha(p_3+n)^2$.

Лемма 3. 1. *При каждом $\mathbf{p}$ функция $E\mapsto\tilde{Q}(\mathbf{p};E)$ $(E\in\mathbb{R})$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на каждом из промежутков $\bigl(\mathcal{E}'_{j-1}(\mathbf{p}), \mathcal{E}'_j(\mathbf{p})\bigr)$. 2. Для каждого собственного числа E оператора $H_0(\mathbf{p})$, лежащего внутри какого-либо промежутка вида $\bigl(\mathcal{E}'_{j-1}(\mathbf{p}), \mathcal{E}'_j(\mathbf{p})\bigr)$, существует предел $\tilde{Q}(\mathbf{p};E) = \lim_{\delta\to 0+}\tilde{Q}(\mathbf{p};E+i\delta)$.*

Спектр оператора $H(\mathbf{p})$ описывает следующая теорема.

Теорема 4. *Спектр оператора $H(\mathbf{p})$ дискретный и состоит из двух (возможно пересекающихся) множеств.*

1. *Простые собственные числа $E_j(\mathbf{p})$,*

$$E_0(\mathbf{p}) < \mathcal{E}'_0(\mathbf{p}) < E_1(\mathbf{p}) < \mathcal{E}'_1(\mathbf{p}) < \dots < E_j(\mathbf{p}) < \mathcal{E}'_j(\mathbf{p}) < \dots,$$

каждое из которых есть единственный корень $z = E_j(\mathbf{p})$ дисперсионного уравнения

$$\tilde{Q}(\mathbf{p}; z) + \tau = 0, \tag{4.1}$$

лежащий в промежутке $\left(\mathcal{E}'_{j-1}(\mathbf{p}), \mathcal{E}'_j(\mathbf{p})\right)$. Соответствующий собственный вектор имеет вид $(\varepsilon_l + \alpha(p_3+n)^2 - E_j(\mathbf{p}))^{-1}\tilde{\delta}(\mathbf{p}; k, l, n)$.

2. *Собственные числа E вида $\mathcal{E}_j(\mathbf{p}) = \varepsilon_l + \alpha(p_3+n)^2$, кратность которых $d_j(\mathbf{p})$ в спектре $H(\mathbf{p})$ определяется следующим образом:* i) *если лежащий в $\mathbb{C}^N$ вектор $\tilde{\delta}(\mathbf{p}; \cdot, l, n)$ отличен от нуля, то $d_j(\mathbf{p}) = d_j^0(\mathbf{p}) - 1$;* ii) *если $\tilde{\delta}(\mathbf{p}; \cdot, l, n) = 0$, но $\tilde{Q}(\mathbf{p}; E) + \tau \neq 0$, то $d_j(\mathbf{p}) = d_j^0(\mathbf{p})$;* iii) *если $\delta(\mathbf{p}; \cdot, l, n) = 0$ и $\tilde{Q}(\mathbf{p}, E) + \tau = 0$, то $d_j(\mathbf{p}) = d_j^0(\mathbf{p}) + 1$. Соответствующее собственное подпространство описывается так:* i) *ортогональное дополнение вектора $\tilde{\delta}(\mathbf{p}; \cdot, l, n)$ в пространстве $\mathbb{C}^N \otimes e'_l \otimes e''_n$ (e'_l, e''_n – стандартные орты в $l^2(\mathbb{N})$ и в $l^2(\mathbb{Z})$, соответственно);* ii) *пространство $\mathbb{C}^N \otimes e'_l \otimes e''_n$;* iii) *линейная оболочка $\mathbb{C}^N \otimes e'_l \otimes e''_n$ и вектора $\left(\left(\varepsilon_{l'} + \alpha(p_3+n')^2 - E\right)^{-1}\tilde{\delta}(\mathbf{p}; k', l', n')\right)_{k', l', n'}$.*

В силу леммы 2 на множестве $X = \bigcap_{l=1}^{\infty} U_l$ полной лебеговой меры функции $E = E_j(\mathbf{p})$ определены при всех $\mathbf{p}$, при этом их можно перенумеровать так, что будут выполняться неравенства $\mathcal{E}_{j-1}(\mathbf{p}) < E_j(\mathbf{p}) < \mathcal{E}_j(\mathbf{p})$ (среди индексов j функций $E_j(\mathbf{p})$ встречаются, вообще говоря, не все натуральные числа). Можно доказать (методом, аналогичным примененному в [17]), что каждая функция $E_j(\mathbf{p})$ допускает непрерывное продолжение на весь тор $\mathbb{T}^3_\eta$, которое будет вещественно-аналитической функцией в некотором открытом всюду плотном подмножестве $\mathbb{T}^3_\eta$. Для продолженных функций $E_j(\mathbf{p})$ справедливы следующие утверждения.

Лемма 4. *Пусть j' – наименьший из индексов k, $k > j$, для которого определена функция $E_k(\mathbf{p})$. Тогда* 1) *$E_j(\mathbf{p}) < \mathcal{E}_j(\mathbf{p}) < E_{j'}(\mathbf{p})$, если и только если $\mathcal{E}_j(\mathbf{p})$ есть полюс функции $z \mapsto \tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$;* 2) *если $\mathcal{E}_j(\mathbf{p})$ не является полюсом функции $\tilde{Q}(\mathbf{p}; z)$, то*

$$\begin{aligned}
E_j(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_j(\mathbf{p}) < E_{j'}(\mathbf{p}) \qquad &\textit{при} \qquad \tilde{Q}(\mathbf{p}; \mathcal{E}_j(\mathbf{p})) + \tau < 0,\\
E_j(\mathbf{p}) < \mathcal{E}_j(\mathbf{p}) = E_{j'}(\mathbf{p}) \qquad &\textit{при} \qquad \tilde{Q}(\mathbf{p}; \mathcal{E}_j(\mathbf{p})) + \tau > 0,\\
E_j(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_j(\mathbf{p}) = E_{j'}(\mathbf{p}) \qquad &\textit{при} \qquad \tilde{Q}(\mathbf{p}; \mathcal{E}_j(\mathbf{p})) + \tau = 0;
\end{aligned}$$

3) *если $\mathcal{E}_{j-1}(\mathbf{p}) < E_j(\mathbf{p}) < \mathcal{E}_j(\mathbf{p})$, то $z = E_j(\mathbf{p})$ – единственный корень уравнения (4.1), лежащий в промежутке $(\mathcal{E}_{j-1}(\mathbf{p}), \mathcal{E}_j(\mathbf{p}))$.*

Лемма 4 позволяет расширить последовательность $E_j(\mathbf{p})$ до последовательности, определенной для всех индексов j из $\mathbb{N}$, так, что будет справедлива лемма 5.

Лемма 5. 1. *Каждая функция $E_j(\mathbf{p})$ непостоянна, непрерывна на торе $\mathbb{T}^3_\eta$ и вещественно-аналитична в некотором открытом всюду плотном подмножестве $\mathbb{T}^3_\eta$.* 2. *$\mathcal{E}_{j-1}(\mathbf{p}) \leqslant E_j(\mathbf{p}) \leqslant \mathcal{E}_j(\mathbf{p})$ при всех j.*

Из лемм 4 и 5 уже нетрудно вывести следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. 1. *Спектр $\sigma(H)$ оператора H абсолютно непрерывный и имеет зонную структуру; зона I_j, $I_j \subset \sigma(H)$, есть множество значений непрерывной функции $E_j(\mathbf{p})$ на торе $\mathbb{T}^3_\eta$. 2. Полупрямая $[2\pi|\xi|, +\infty)$ целиком содержится в $\sigma(H)$. 3. Спектр $\sigma(H)$ имеет не более одной лакуны.*

Сделаем несколько замечаний по поводу доказательства этой теоремы. Очевидно, пункт 3 есть следствие пункта 2. При $N > 1$ пункт 2 данной теоремы вытекает из теоремы 1 и пункта 2 леммы 5. При $N = 1$ нужно воспользоваться леммой 4 и следующим утверждением, непосредственно вытекающим из предложения 6 в работе [17]: для любого l, $l \in \mathbb{N}$, найдется такое $\mathbf{p}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{T}^3_\eta$, что $\tilde{\delta}(\mathbf{p}; 0, l, n) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Небезынтересно отметить, что природа "схлопывания лакун" в условиях теоремы 5 различна при $N = 1$ и $N > 1$; это различие тесно связано с явлением, аналогичным особенностям Ван Хова в зонах Бриллюэна [27]. Следуя [28], точку $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_0 \in \mathbb{T}^3_\eta$, назовем особенностью Ван Хова 2-го рода для оператора H, если в ней пересекаются две различные ветви $E_{j_1}(\mathbf{p})$ и $E_{j_2}(\mathbf{p})$ законов дисперсии этого оператора. Из леммы 5 вытекает, что особенности Ван Хова 2-го рода возникают по крайней мере в тех точках $\mathbf{p}_0$, в которых пересекаются три ветви законов дисперсии $\mathcal{E}_j(\mathbf{p})$ невозмущенного оператора H_0. Именно за счет точек такого типа возникает конечнозонность оператора H при $N > 1$, а также в случае отсутствия магнитного поля (см. обсуждение этого вопроса в [11]). Для случая $N = 1$ нетрудно доказать следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Для того чтобы в магнитной зоне Бриллюэна $\mathbb{T}^3_\eta$ существовала точка $\mathbf{p}_0$, в которой пересекаются по крайней мере три ветви законов дисперсии $\mathcal{E}_j(\mathbf{p})$, необходимо и достаточно, чтобы отношение $a^2_{3z}|\xi|/\pi$ было рациональным. Если это условие выполнено, то множество всех таких точек $\mathbf{p}_0$ всюду плотно в $\mathbb{T}^3_\eta$.*

В заключение остановимся на следующем вопросе, связанном с так называемым приближением сильной связи. Упомянутое приближение основано на интуитивном представлении об энергетических зонах кристаллов как расплывшихся уровнях одиночных атомов, сидящих в узлах кристаллической решетки. Это представление нашло строгое математическое обоснование в ряде недавних работ (см., например, [29,30]). В связи с этим рассмотрим уровень ζ_0 возмущения гамильтониана H_0 одиночным точечным потенциалом (уровень атома нулевого радиуса в магнитном поле); ζ_0 есть единственное решение уравнения $(|\xi|/\pi)^{1/2}\,\zeta(1/2, 1/2 - z/4\pi|\xi|) + 4\tau = 0$, лежащее ниже точки $2\pi|\xi|$ [26]. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Нижняя зона спектра I_0 содержит уровень ζ_0.*

Работа В. А. Гейлера частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 93-011-266.

Список литературы

[1] *Новиков С.П.* // Соврем. проблемы математики. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР).. М.: ВИНИТИ, 1983. Т. 23. С. 3–23.
[2] *Bellissard J.* // London Math. Soc. Lect. Notes Ser. 1988. №136. P. 49–76.
[3] *Helffer B., Sjöstrand J.* // Lect. Notes Phys. 1989. V. 345. P. 118–197.
[4] *Цикон X., Фрезе Р., Кирш В., Саймон Б.* Операторы Шредингера с приложениями к квантовой механике и глобальной геометрии. М.: Мир, 1990.
[5] *Бете Г., Зоммерфельд А.* Электронная теория металлов. М.–Л.: ОГИЗ, 1983.

[6] *Скриганов М.М.* Геометрические и арифметические методы в спектральной теории многомерных периодических операторов // Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. Л.: Наука 1985.
[7] *Skriganov M.M.* // Invent. Math. 1985. V. 80. №1. P. 107–121.
[8] *Grigis A., Mohamed A.* // C. r. Acad. sci. Ser. 1. 1992. V. 315. №12. P. 1249–1252.
[9] *Лыскова А.С.* // ТМФ. 1985. Т. 65. №3. С. 368–378.
[10] *Павлов Б.С.* // УМН. 1987. Т. 42. Вып. 6. С. 99–131.
[11] *Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х.* Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
[12] *Grossman A., Hoeg-Krohn R., Mebkhout M.* // Commun. Math. Phys. 1980. V. 77. №1. P. 87–110.
[13] *Карпешина Ю.Е.* // ТМФ. 1983. Т. 57. №2. С. 304–313.
[14] *Zak J.* // Phys. Rev. 1964. V. 134. №6. P. A1602–A1611.
[15] *Гейлер В.А., Маргулис В.А.* // ТМФ. 1984. Т. 58. №3. С. 461–472.
[16] *Гейлер В.А., Маргулис В.А.* // ТМФ. 1984. Т. 61. №1. С. 140–149.
[17] *Гейлер В.А.* // Алгебра и анализ. 1991. Т. 3. №3. С. 1–48.
[18] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики.Т. 4. М.: Мир, 1982.
[19] *Wannier G.H.* // Phys. Stat. Sol. (b). 1980. V. 27. P. 163–170.
[20] *Zak J.* // Solid State Phys. (H. Ehrenreich et al. eds.). 1972. V. 27. P. 1–62.
[21] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.Г.* Статистическая физика.Т. 2. М.: Наука, 1978.
[22] *Boon M.H.* // J. Math. Phys. 1972. V. 13. №8. P. 1268–1285.
[23] *Janssen A.* // J. Math. Phys. 1982. V. 23. №5. P. 720–731.
[24] *Гейлер В.А., Маргулис В.А.* // ТМФ. 1987. Т. 70. №2. С. 192–201.
[25] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.Т. 1. М.: Наука, 1973.
[26] *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: ЛГУ, 1975.
[27] *Van Hove L.* // Phys. Rev. 1953. V. 89. P. 1189–1193.
[28] *Colin de Verdier Y.* // Mem. Soc. Math. France. 1991. №46. P. 99–109.
[29] *Павлов Б.С., Смирнов Н.В.* // Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1984. Т. 133. С. 197–211.
[30] *Миронов А.Л., Олейник В.Л.* // ТМФ. 1994. Т. 99. №1. С. 103–120.

Мордовский государственный университет

Поступила в редакцию 7.VII.1994 г.

V.A. Geiler, V.V. Demidov

THE SPECTRUM OF THE PERIODIC POINT PERTURBATION OF THE THREE-DIMENSIONAL LANDAU OPERATOR

The three-dimensional Schrodinger operator with magnetic field perturbated by the periodic sum of zero-range potentials is investigated. The explicit form of the decomposition of the resolvent of the operator over the spectrum of the irreducible representations of the group of magnetic translations was found in the case of a rational flux. The explicit form of the dispersion laws was found, the description of the spectrum was given and the qualitative investigation of the spectrum was carried out in the case of an integer flux (in particular, it was found that there are no more than one gap).