Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

А. Г. Пинус, О существовании $\alpha$-размерности частичных порядков,
*Изв. вузов. Матем.*, 1980, номер 5, 32–36

https://www.mathnet.ru/ivm4641

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
9 декабря 2025 г., 14:37:30

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1980 МАТЕМАТИКА № 5 (216)

*А. Г. Пинус* УДК 510.22

# О СУЩЕСТВОВАНИИ $\alpha$-РАЗМЕРНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ ПОРЯДКОВ

В работе Душника и Миллера [1] было введено понятие размерности частично упорядоченного множества (ч. у. м.). Это понятие эквивалентно следующему [2]: размерность ч. у. м. $\langle A, <\rangle$ равна минимальной мощности совокупности линейных порядков $<_i (i \in I)$ на $A$ таких, что порядок $<$ представим как пересечение порядков $<_i (i \in I)$. Это определение, в основу которого положено свойство продолжаемости частичного порядка до линейного, подвергалось различным модификациям. В частности, определенный интерес представляли порядковые типы множеств $\langle A, <_i\rangle$. В связи с этим в той же работе было введено определение $\alpha$-размерности. Пусть $\alpha$ — линейный порядковый тип, $\alpha$-размерностью ($\alpha$-$\dim\langle A, <\rangle$) ч. у. м. $\langle A, <\rangle$ называется минимальная мощность совокупности $<_i (i \in I)$ таких линейных порядков на $A$, что все $\langle A, <_i\rangle$ имеют порядковый тип, изоморфно вложимый в $\alpha$, и порядок $<$ представим как пересечение порядков $<_i (i \in I)$. В то время как размерность существует для любого ч. у. м., $\alpha$-размерность существует не всегда. Необходимым условием существования $\alpha$-$\dim\langle A, <\rangle$ является существование так называемой $\alpha$-реализации $\langle A, <\rangle$, т. е. существование одно-однозначного отображения $f: A \to \alpha$ такого, что для любых $a$, $b$ из $A$, если $a < b$, то $f(a) < f(b)$. Однако это условие не является достаточным для произвольного $\alpha$. Коммом был поставлен вопрос: для каких $\alpha$ это условие достаточно. В [3] была показана достаточность этого условия в случае, когда $\alpha$ таково, что любой замкнутый неединичный интервал множества типа $\alpha$ либо конечен, либо содержит подмножество типа $\alpha$. В работе [4] Новаком доказано, что если $\alpha$—бесконечный ординал, то существование $\alpha$-реализации достаточно для существования $\alpha$-размерности в том и только том случае, когда $\alpha$ имеет вид $\omega^\beta$, т. е. когда $\alpha$ неразложим.

В данной заметке даются условия на линейный порядковый тип $\alpha$ из класса $\mathfrak{M}$ (см. [5]), необходимые и достаточные для того, чтобы всякий частичный порядок, обладающий $\alpha$-реализацией, обладал и $\alpha$-размерностью. Из этого результата, в частности, следует результат Новака.

Если $\langle A, <\rangle$, $\langle B, <\rangle$ линейны, а $\langle C, <\rangle$, $\langle D, <\rangle$ — частично упорядоченные множества, то через $\langle A, <\rangle + \langle B, <\rangle$ будем обозначать линейно упорядоченную сумму линейно упорядоченных множеств (л. у. м.) $\langle A, <\rangle$, $\langle B, <\rangle$, а через $\langle C, <\rangle \oplus \langle D, <\rangle$ — частично упорядоченную сумму ч. у. м. $\langle C, <\rangle$, $\langle D, <\rangle$, т. е. в первом случае все элементы множества $A$ меньше любого элемента из $B$, во втором — элементы из $C$ несравнимы с элементами из $D$, на $A$, $B$, $C$, $D$ порядки остаются прежними. Все другие обозначения стандартные для теории линейных порядков. Под вложением всегда понимаем изоморфное вложение. Определение класса $\mathfrak{M}$ линейных порядков можно найти в [5]. Напомним, что $\mathfrak{M}$ содержит все рассеянные, а также все счетные порядковые типы. Порядок на подмножестве всегда считаем индуцированным порядком упорядоченного надмножества.

Лемма. *Если $\langle A, <\rangle$ — бесконечное л. у. м. из $\mathfrak{M}$ и $\langle A, <\rangle$ аддитивно неразложимо, то существует $\langle A, <\rangle$-реализация ч. у. м. $\langle A, <\rangle \oplus \langle A, <\rangle$.*

Доказательство. Из описания аддитивно неразложимых множеств класса $\mathfrak{M}$, данного в следствии 4.10 работы [5], следует, что всякое аддитивно неразложимое л. у. м. $\langle A, <\rangle$ из $\mathfrak{M}$ является либо одноэлементным, либо право-, либо лево-неразложимым, т. е. бесконечное $\langle A, <\rangle$ удовлетворяет одному из следующих условий: 1) для любых л. у. м. $\langle B, <\rangle$, $\langle C, <\rangle$, если $\langle A, <\rangle = \langle B, <\rangle + \langle C, <\rangle$, то $\langle A, <\rangle$ вложимо в $\langle C, <\rangle$; 2) для любых л. у. м. $\langle B, <\rangle$, $\langle C, <\rangle$, если $\langle A, <\rangle = \langle B, <\rangle + \langle C, <\rangle$, то $\langle A, <\rangle$ вложимо в $\langle B, <\rangle$. Предположим, что для данного $\langle A, <\rangle$ имеет место случай 1 (случай 2)

рассматривается симметрично). Пусть последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots$ $(i < \omega_n)$ — кофинальная последовательность в $\langle A, <\rangle$ наименьшей длины и для предельных ординалов $j$, $\sup\limits_{i<j} x_i = x_j$. В этом случае $\langle A, <\rangle = \langle\{z \mid z \in A, z < x_0\}, <\rangle + \sum\limits_{i<\omega_n} \langle[x_i, x_{i+1}), <\rangle$. Из правой неразложимости $\langle A, <\rangle$ очевидным образом следует, что $\langle\{z \mid z \in A, z < x_0\}, <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z < x_0\}, <\rangle + \sum\limits_{i<\omega_n} \{\langle[x_i, x_{i+1}), <\rangle\}$ вложимо в $\langle A, <\rangle$. А это вложение позволяет уже построить $\langle A, <\rangle$-реализацию ч. у. м. $\langle A, <\rangle \oplus \langle A, <\rangle$.

Теорема 1. *Если $\langle A, <\rangle$ — л. у. м. из класса $\mathfrak{M}$, то следующие условия эквивалентны*: а) *для любого ч. у. м. $\langle B, <\rangle$, обладающего $\langle A, <\rangle$-реализацией, существует $\langle A, <\rangle$-$\dim\langle B, <\rangle$*; б) *для любых $a$, $b$ из $A$ или $[a, b]$ конечно, или $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \langle[a, b], <\rangle + \langle[a, b], <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$ вложимо в $\langle A, <\rangle$.*

Доказательство. 1) Покажем, что из б) следует а). Доказательство этого фактически совпадает с доказательством теоремы 1 из [6]. Предположим, что существует $\langle A, <\rangle$-реализация $f$ ч. у. м. $\langle B, <\rangle$. Для доказательства существования $\langle A, <\rangle$-$\dim\langle B, <\rangle$ необходимо и достаточно показать, что для любой пары несравнимых элементов $a$, $b$ из $\langle B, <\rangle$, если $f(a) < f(b)$, то найдется $\langle A, <\rangle$-реализация $h$ ч. у. м. $\langle B, <\rangle$ такая, что $h(b) < h(a)$ Пусть $B_1 = \{z \mid z \in B, f(a) < f(z) < f(b)$, $z$ не меньше $b$ и $z \neq a\}$, $B_2 = \{z \mid z \in B, f(a) < f(z) < f(b), z < b\}$, $B_3 = \{z \mid z \in B, f(z) < f(a)\}$, $B_4 = \{z \mid z \in B, f(b) < f(z)\}$. Если $[f(a), f(b)]$ конечно, то полагаем $h(z) = f(z)$, если $z \in B_3 \cup B_4$. Очевидно, что ч. у. м. $\langle B_1 \cup B_2 \cup \{a, b\}, <\rangle$ обладает $\langle[f(a), f(b)], <\rangle$-реализацией, но т. к. $[f(a), f(b)]$ конечно, то существует $\langle[f(a), f(b)], <\rangle$-размерность (равная размерности) ч. у. м. $\langle B_1 \cup B_2 \cup \{a, b\}, <\rangle$. А значит, найдется $\langle[f(a), f(b)], <\rangle$-реализация $g$ ч. у. м. $\langle B_1 \cup B_2 \cup \{a, b\}, <\rangle$ такая, что $g(b) < g(a)$. Полагаем, $h(z) = g(z)$ для $z \in B_1 \cup B_2 \cup \{a, b\}$. Очевидно, что $h$ есть $\langle A, <\rangle$-реализация $\langle B, <\rangle$, удовлетворяющая требуемым условиям. Если же $[f(a), f(b)]$ бесконечно, то $\langle c, <\rangle = \langle\{z \mid z \in A, z < f(a)\}, <\rangle + \langle[f(a), f(b)]^1, <\rangle + \langle[f(a), f(b)]^2, <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > f(b)\}, <\rangle$ вложимо в $\langle A, <\rangle$. Здесь $\langle[f(a), f(b)]^i, <\rangle$ — л. у. м., изоморфные $\langle[f(a), f(b)], <\rangle$, и $f_i$ — изоморфизм $\langle[f(a), f(b)], <\rangle$ на $\langle[f(a), f(b)]^i, <\rangle$. Таким образом, достаточно найти $h$, являющееся $\langle C, <\rangle$-реализацией ч. у. м. $\langle B, <\rangle$, такое, что $h(b) < h(a)$. Положим $h(z) = f(z)$ для $z \in B_3 \cup B_4$, $h(z) = f_1(f(z))$ для $z \in \{b\} \cup B_2$, $h(z) = f_2(f(z))$ для $z \in \{a\} \cup B_1$. Выполнение всех требуемых условий очевидно. Таким образом, существует $\langle A, <\rangle$-размерность $\langle B, <\rangle$ и а) доказано.

2) Пусть л. у. м. $\langle A, <\rangle \in \mathfrak{M}$, $a, b \in A$ и таковы, что множество $[a, b]$ бесконечно, $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \langle[a, b], <\rangle + \langle[a, b], <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$ не вложимо в $\langle A, <\rangle$. Покажем, что в этом случае а) не может быть выполнено. Предположим противное, т. е. а) имеет место. Через $\langle D, <\rangle$ обозначим ч. у. м. $(\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \langle[a, b], <\rangle) \oplus (\langle[a, b], <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle)$. $\langle D, <\rangle$ не может иметь $\langle A, <\rangle$-реализации, т. к. иначе существование $\langle A, <\rangle$-размерности $\langle D, <\rangle$ влекло бы вложимость $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \langle[a, b], <\rangle + \langle[a, b], <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$ в $\langle A, <\rangle$, что противоречит условию рассматриваемого пункта 2). $\langle[a, b], <\rangle \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, по теореме 4.7 и следствию 4.11 из [5] $\langle[a, b], <\rangle$ представимо как конечная сумма аддитивно неразложимых множеств. Пусть $\sum\limits_{i \leqslant n(a, b)} \langle A_i, <\rangle$ — такое представление и $n(a, b)$ — минимальное число всех подобных представлений л. у. м. $\langle[a, b], <\rangle$. Выберем $a, b \in A$ такими, что $n(a, b)$ минимально среди всех чисел вида $n(c, d)$ таких, что $\langle\{z \mid z \in A, z < c\}, <\rangle + \langle[c, d], <\rangle + \langle[c, d], <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > d\}, <\rangle$ не вложимо в $\langle A, <\rangle$. Рассмотрим несколько случаев: а) $\langle A_{n(a, b)-1}, <\rangle$ лево-неразложимо или одноэлементно, и $A_{n(a, b)}$ бесконечно; б) $\langle A_{n(a, b)-1}, <\rangle$ лево-неразложимо или одноэлементно, и $A_{n(a, b)}$ одноэлементно; в) $\langle A_{n(a, b)-1}, <\rangle$ не является ни лево-неразложимым, ни одноэлементным, и $A_{n(a, b)}$ бесконечно; г) $\langle A_{n(a, b)-1}, <\rangle$ не является ни лево-неразложимым,

ни одноэлементным, и $A_{n(a,\,b)}$ одноэлементно. Очевидно, что один из этих случаев всегда имеет место.

*Случай* а). Пусть $z \in A_{n(a,\,b)-1}$. Очевидно, что в этом случае $n(a, z) < n(a, b)$ и, значит, в силу минимальности $n(a, b)$ $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \langle[a, z], <\rangle + \langle[a, z], <\rangle + \langle\{x \mid x \in A, x > z\}, <\rangle$ вложимо в $\langle A, <\rangle$. В силу выбора $z$ это влечет существование некоторого вложения $h$ л. у. м. $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,\,b)-1} \langle A_i, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,\,b)} \langle A_i <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$ в $\langle A, <\rangle$. Так как $A_{n(a,\,b)}$ по предположению бесконечно, то по лемме существует $\langle A_{n(a,\,b)}, <\rangle$-реализация ч. у. м. $\langle A_{n(a,\,b)}, <\rangle \oplus \langle A_{n(a,\,b)}, <\rangle$. Эта реализация совместно с вложением $h$ очевидным образом влекут существование $\langle A, <\rangle$-реализации ч. у. м. $\langle D, <\rangle$, что, как замечено, невозможно. Значит, невозможен и сам случай а).

*Случай* б). В этом случае $A_{n(a,\,b)} = \{b\}$. Как и в случае а), получаем некоторое вложение $h$ л. у. м. $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,\,b)-1} \langle A_i, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,\,b)} \langle A_i, <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$ в $\langle A, <\rangle$. Так как $[a, b]$ бесконечно, то найдется $k \leqslant n(a, b)$, что $A_k$ бесконечно. В силу аддитивной неразложимости $\langle A_k, <\rangle$ либо $\langle\{b\}, <\rangle + \langle A_k, <\rangle$, либо $\langle A_k, <\rangle + \langle\{b\}, <\rangle$ вложимо в $\langle A_k, <\rangle$. Предположим, что имеет место первое (второе аналогично) и $g$ — вложение указанных л. у. м. Тогда комбинируя вложения $h$ и $g$, получаем вложение в $\langle A, <\rangle$ л. у. м. $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,\,b)-1} \langle A_i, <\rangle + \sum\limits_{i < k} \langle A_i, <\rangle + \langle\{b\}, <\rangle + \sum\limits_{k \leqslant i \leqslant n(a,\,b)} \langle A_i, <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$. Но это опять влечет существование $\langle A, <\rangle$-реализации ч. у. м. $\langle D, <\rangle$. Таким образом, случай б) невозможен.

*Случай* в). В этом случае $\langle A_{n(a,\,b)-1}, <\rangle$ право-неразложимо и найдется $z_0 \in A_{n(a,\,b)-1}$ такое, что в $\langle\{z \mid z \in A_{n(a,\,b)-1}, z < z_0\}, <\rangle$ не вложимо $\langle A_{n(a,\,b)-1}, <\rangle$. Покажем, что $z_0$ можно выбрать при этом так, чтобы $\langle\{z \mid z \in A_{n(a,\,b)-1}, z < z_0\}, <\rangle$ было аддитивно неразложимым. Предположим противное, тогда т. к. $\langle\{z \mid z \in A_{n(a,\,b)-1}, z < z_0\}, <\rangle \in \mathfrak{M}$, то оно представимо как конечная сумма аддитивно неразложимых л. у. м. $\sum\limits_{i \leqslant m} \langle B_i, <\rangle$ и $m \geqslant 1$. Пусть $z_1 \in B_0$, $\langle\{z \mid z \in B_0, z < z_1\}, <\rangle$ по предположению не является аддитивно неразложимым и, следовательно, $\langle B_0, <\rangle$ не вложимо в $\langle\{z \mid z \in B_0, z < z_1\}, <\rangle$. Очевидно, что этот процесс построения цепочки подмножеств $\{z \mid z \in A_{n(a,\,b)-1}, z < z_0\} \supset B_0 \supset \{z \mid z \in B_0, z < z_1\}$ и т. д. такой, что $\langle\{z \mid z \in A_{n(a,\,b)-1}, z < z_0\}, <\rangle$ не вложимо в $\langle B_0, <\rangle$, $\langle B_0, <\rangle$ не вложимо в $\langle\{z \mid z \in B_0, z < z_1\}, <\rangle$ и т. д., можно продолжать бесконечно. Но это противоречит следствию 4.9 из [5]. Таким образом, найдется $z_0 \in A_{n(a,\,b)-1}$, что $\langle\{z \mid z \in A_{n(a,\,b)-1}, z < z_0\}, <\rangle$ аддитивно неразложимо. Тогда $n(a, z_0) < n(a, b)$ и, значит, $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \langle[a, z_0], <\rangle + \langle[a, z_0], <\rangle + \langle[z_0, b], <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$ вложимо в $\langle A, <\rangle$. Все это влечет существование вложения $h$ л. у. м. $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,\,b)-2} \langle A_i, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,\,b)} \langle A_i, <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$ в $\langle A, <\rangle$. Так как $A_{n(a,\,b)}$ бесконечно, то по лемме существует $(\langle A_{n(a,\,b)-1}, <\rangle + \langle A_{n(a,\,b)}, <\rangle)$-реализация ч. у. м. $(\langle A_{n(a,\,b)-1}, <\rangle + \langle A_{n(a,\,b)}, <\rangle) \oplus (\langle A_{n(a,\,b)-1}, <\rangle + \langle A_{n(a,\,b)}, <\rangle)$, что в свою очередь вместе с вложением $h$ влечет существование $\langle A, <\rangle$-реализации ч. у. м. $\langle D, <\rangle$. Таким образом, случай в) невозможен.

*Случай* г). Как и в случае в), найдется вложение $h$ л. у. м. $\langle\{z \mid z \in A, z < a\}, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,b)-2} \langle A_i, <\rangle + \sum\limits_{i \leqslant n(a,\,b)} \langle A_i, <\rangle + \langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$ в $\langle A, <\rangle$. Рассмотрим два подслучая: $\{z \mid z \in A, z > b\}$ не пусто, $\{z \mid z \in A, z > b\}$ пусто. В первом подслучае, если бы существовала $\langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$-реализация ч. у. м. $\langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle \oplus \langle\{b\}, <\rangle$, то эта реализация наряду с вложением $h$ очевидным образом влекла бы существование $\langle A, <\rangle$-реализации ч. у. м. $\langle D, <\rangle$. Таким образом, $\langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle \oplus \langle\{b\}, <\rangle$ не имеет $\langle\{z \mid z \in A, z > b\}, <\rangle$-реализации. Очевидно также, что множество $(\langle\{z \mid z \in A,$

$z<a\}, <\rangle+\langle[a, b), <\rangle+\langle\{z|z\in A, z>b\}, <\rangle)\oplus\langle\{b\}, <\rangle$ имеет $\langle A, <\rangle$-реализацию. Но тогда существование его $\langle A, <\rangle$-размерности и отсутствие $\langle\{z|z\in A, z>b\}, <\rangle$-реализации ч. у. м. $\langle\{z|z\in A, z>b\}, <\rangle\oplus\langle\{b\}, <\rangle$ влечет вложимость в $\langle\{z|z\in A, z<a\}, <\rangle+\langle[a, b), <\rangle$ множества вида $\langle\{z|z\in A, z<b\}, <\rangle+\langle F, <\rangle$, где $F$ одноэлементно. Последнее же опять наряду с вложением $h$ влечет существование $\langle A, <\rangle$-реализации ч. у. м. $\langle D, <\rangle$. Таким образом, первый подслучай невозможен. Рассмотрим второй подслучай. Тогда $\langle A, <\rangle=\langle\{z|z\in A, z<a\}, <\rangle+\langle[a, b), <\rangle+\langle\{b\}, <\rangle$. Очевидно существование $\langle A, <\rangle$-реализации множества $\langle A, <\rangle\oplus\langle\{b\}, <\rangle$, но существование его $\langle A, <\rangle$-размерности влечет вложимость л. у. м. $\langle\{z|z\in A, z<a\}, <\rangle+\langle[a, b), <\rangle+\langle\{b\}, <\rangle$ в $\langle\{z|z\in A, z<b\}, <\rangle$. Это же опять стандартным образом приводит к существованию $\langle A, <\rangle$-реализации ч. у. м. $\langle D, <\rangle$. Таким образом, ни один из случаев а) — г) невозможен и, следовательно, предположение о выполнимости пункта а) из условий теоремы невозможно. Тем самым теорема доказана.

Заметим, что в силу первой части доказательства теоремы 1 справедливо

Замечание. Если $\langle A, <\rangle$ — л. у. м. такое, что для любых $a$, $b$ из $A$, $\langle\{z|z\in A, z<a\}, <\rangle+\langle[a, b], <\rangle+\langle[a, b], <\rangle+\langle\{z|z\in A, z>b\}, <\rangle$ вложимо в $\langle A, <\rangle$, то для любого ч. у. м., обладающего $\langle A, <\rangle$-реализацией, существует $\langle A, <\rangle$-размерность этого ч. у. м.

На основе этого замечания докажем, что имеет место

Теорема 2. *Если $\langle A, <\rangle$ — аддитивно неразложимое л. у. м., то для любого ч. у. м., обладающего $\langle A, <\rangle$-реализацией, существует $\langle A, <\rangle$-размерность.*

Доказательство. Достаточно в силу замечания показать, что при выполнении условий теоремы для любых $a$, $b$ из $A$, $\langle\{z|z\in A, z<a\}, <\rangle+\langle[a, b], <\rangle+\langle[a, b], <\rangle+\langle\{z|z\in A, z>b\}, <\rangle$ вложимо в $\langle A, <\rangle$. Пусть $D_1=\{z|z\leqslant f(a)$, где $f$ — любое вложение $\langle A, <\rangle$ в $\langle A, <\rangle\}$, $D_2=\{z|z\geqslant f(b)$, где $f$ — любое вложение $\langle A, <\rangle$ в $\langle A, <\rangle\}$. Рассмотрим два случая: 1) $D_1\cap D_2=\varnothing$, 2) $D_1\cap D_2\neq\varnothing$. В первом случае $\langle A, <\rangle=\langle D_1, <\rangle+\langle C, <\rangle+\langle D_2, <\rangle$, где $C=A\setminus(D_1\cup D_2)$. $\langle A, <\rangle$ не вложимо в $\langle D_1, <\rangle$, т. к. иначе, если $g$ — вложение $\langle A, <\rangle$ в $\langle D_1, <\rangle$, то $g(b)\in D_1$ и $g(b)\in D_2$, что противоречит пустоте $D_1\cap D_2$. Аналогичным образом, $\langle A, <\rangle$ не вложимо в $\langle D_2, <\rangle$. В силу аддитивной неразложимости $\langle A, <\rangle$, $\langle A, <\rangle$ должно быть вложимо в $\langle C, <\rangle$, что противоречит определению $D_1$, т. к. для этого вложения $h$ л. у. м. $\langle A, <\rangle$ в $\langle C, <\rangle$, $h(a)\in\langle C, <\rangle$. Таким образом, случай 1) невозможен. Во втором случае пусть $d\in D_1\cap D_2$ и $a<d<b$. Таким образом, найдутся вложения $f_a$ и $f_b$ л. у. м. $\langle A, <\rangle$ в себя, что $f_a(a)\geqslant d$ и $f_b(b)\leqslant d$. Но тогда $f_a(f_a(a))>d$ и $f_b(f_b(b))<d$. Следовательно, $f_a(f_a)$ вкладывает $\langle[a, b], <\rangle+\langle\{z|z\in A, z>b\}, <\rangle$ в $\langle\{z|z\in A, z>d\}, <\rangle$, а $f_b(f_b)$ вкладывает $\langle\{z|z\in A, z<a\}, <\rangle+\langle[a, b], <\rangle$ в $\langle\{z|z\in A, z<d\}, <\rangle$. Тем самым и $\langle\{z|z\in A, z<a\}, <\rangle+\langle[a, b], <\rangle+\langle[a, b], <\rangle+\langle\{z|z\in A, z>b\}, <\rangle$ вложимо в $\langle A, <\rangle$. Теорема доказана.

В заключение отметим очевидное следствие теоремы 1: если $\alpha\in\mathfrak{M}$ и таково, что всякое ч. у. м., обладающее $\alpha$-реализацией, имеет и $\alpha$-размерность, то $\alpha$ представимо в виде суммы не более чем трех аддитивно неразложимых л. у. м. Доказательство этого факта (от противного) использует представимость л. у. м. из $\mathfrak{M}$ в виде конечной суммы аддитивно неразложимых. Уменьшить число слагаемых до двух нельзя, как показывает пример $\alpha=(\omega_1)^*+\eta+\omega_1$, удовлетворяющий условию б) теоремы 1, здесь $\eta$ — счетное, плотно упорядоченное л. у. м. Обратное утверждение тоже неверно, как показывает пример $\alpha=(\omega^2)^*+\omega^2$. Здесь не выполнено условие б) теоремы 1.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Dushnik B., Miller E. W. Partially ordered sets. Amer. J. Math., 1941, № 3, p. 600—610.
2. Оре О. Теория графов. М., „Мир", 1971.
3. Komm H. On the dimension of partially ordered sets. Amer. J. Math., 1948, № 3, p. 507—520.

4. Novak V. Eine Bemerkung über die $\alpha$-Dimension geordneter Mengen. Arch. Math., 1969, Bd. 5, № 4, S. 187—190.
5. Laver R. On Fraisse's order type conjectype. Ann. Math., 1971, Bd. 93, № 1, S. 89—111.
6. Novak V. On the $\omega_\nu$-dimension and $\omega_\nu$-pseudodimension of ordered sets. Z. Logik und Grundl. Math., 1964, № 1, S. 43—48.

г. Новосибирск

Поступила
28 X 1977

**В. Е. Ванин, Б. И. Моргунов. Об асимптотическом решении некоторых стохастических интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром**

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Рассматриваются стохастические интегро-дифферерренциальные уравнения с малым параметром. Излагаются асимптотические методы решения подобных уравнений. Приводятся теоремы о близости точного и приближенного решений. (Работа поступила в журнал „Математика" 15 I 1979.)

**В. Н. Гордиенко. Краевая задача типа задачи Карлемана для двух неизвестных функций**

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В статье рассматривается тот случай задачи с прямым сдвигом Карлемана для двух неизвестных функций, когда определитель матрицы-функции $G(\alpha(t))\overline{G(t)}-E$ тождественно равен нулю, но сама матрица отлична от нулевой. Найдены условия разрешимости, и описано множество решений однородной и неоднородной задач. (Работа поступила в журнал „Математика" 13 II 1979.)

**В. И. Гук, Л. А. Новиков. Регуляризация интегралов со степенными особенностями и ускорение сходимости последовательностей**

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

Для выделения конечной части интегралов по Адамару со степенными особенностями подынтегральной функции применен метод Шенкса ускорения сходимости числовых последовательностей. (Работа поступила в журнал „Математика" 21 V 1979.)

**Н. И. Дубровин. О кольцах главных правых идеалов**

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В работе доказано, что матрично локальное кольцо $R$ (т. е. такое, что $R/J(R)$ — простое артиново кольцо, где $J(R)$ — радикал Джекобсона кольца $R$), у которого любой первичный идеал имеет вид $aR$ ($a\in R$), является кольцом главных правых идеалов. Это усиливает аналогичный результат Ятегаонкара (A. V. Jategaonkar), относящийся к локальным кольцам $R$ таким, что $R/T$ — правое кольцо Голди для любого идеала $T$ кольца $R$, а также один из результатов Проберта (G. A. Probert). (Работа поступила в журнал „Математика" 3 X 1978.)

**А. М. Елизаров, В. В. Селезнев. О разрешимости некоторых смешанных обратных краевых задач об обтекании профиля**

(*аннотация статьи, принятой к печати*)

В статье рассматривается ряд задач об обтекании потоком несжимаемой невесомой жидкости неизвестного профиля, расположенного над криволинейным дном либо в струе, ограниченной снизу криволинейным дном. Профиль отыскивается по заданному на нем распределению скорости в зависимости от дуговой абсциссы $s$.

Разрешимость указанных задач доказывается методом сведения к интегральному уравнению 2-го рода для определения функции $s(\theta)$ на криволинейном участке дна (на остальных участках границы области течения эта функция определяется из условий задач). При выводе уравнений используется общее решение краевой задачи Гильберта с разрывными коэффициентами для кольца. Разрешимость уравнений доказана на основании принципа неподвижной точки Шаудера. (Работа поступила в журнал „Математика" 25 VI 1979.)