Г. Н. Мильштейн, Ф. А. Шолохович, Почти рекуррентные и равномерно устойчивые по Пуассону движения в линейной динамической системе,
Сиб. матем. журн., 1961, том 2, номер 4, 567–573

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том II, № 4 Июль — Август 1961 г.

Г. Н. МИЛЬШТЕЙН и Ф. А. ШОЛОХОВИЧ

ПОЧТИ РЕКУРРЕНТНЫЕ И РАВНОМЕРНО УСТОЙЧИВЫЕ ПО ПУАССОНУ ДВИЖЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

В общей теории динамических систем (см. ([1]), гл. V) движения классифицируются по следующим основным типам: устойчивые по Лагранжу, устойчивые по Пуассону, рекуррентные, почти периодические, периодические, точки покоя. При рассмотрении динамических систем, подчиненных какому-либо добавочному условию, естественно возникает вопрос, не обедняет ли данное условие разнообразия траекторий в динамической системе. Этому вопросу в применении к линейным динамическим системам посвящена настоящая работа.

В конечномерной линейной динамической системе всякая ограниченная траектория является траекторией почти периодического (в частности периодического) движения. Таким образом, все перечисленные выше типы, кроме двух последних, сливаются в один. Однако для бесконечномерной линейной динамической системы была показана с помощью примеров (см. ([2])), «самостоятельность» * всех основных типов траекторий.

М. В. Бебутов ввел в рассмотрение почти рекуррентные и равномерно устойчивые по Пуассону движения ([3]). Наша работа посвящена исследованию самостоятельности этих движений в линейной динамической системе.

§ 1. Почти рекуррентные движения

Определение. Движение $f(p, t)$ называется почти рекуррентным (([3]), стр. 29), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество чисел $\tau(p, \varepsilon)$ такое, что если $\tau \in \tau(p, \varepsilon)$, то $\rho(p, f(p, \tau)) \leqslant \varepsilon$ для произвольной точки p.

Всякое почти рекуррентное движение является устойчивым по Пуассону устойчивым P).

Покажем, что в линейной динамической системе могут быть движения, устойчивые P, но не являющиеся почти рекуррентными. Для этого рассмотрим банахово пространство, указанное в работе ([2]) с $\alpha(x) = |x|$. Это пространство состоит из вещественных функций $p = y(x)$ таких, что функция $y(x) e^{-|x|} = \varphi(x)$ непрерывна в замкнутом отрезке $[-\infty, +\infty]$.

Норма задается равенством

$$\|p\| = \sup_{-\infty<x<+\infty} |y(x)| e^{-|x|}.$$

* Этот термин поясним примером. Рекуррентное движение мы называем самостоятельным в данной динамической системе, если в этой системе имеется рекуррентное движение, не являющееся почти периодическим.

Линейная динамическая система в этом пространстве определяется так: если $p=y(x)$, то $f(t)p=y(x+t)$. Для построения нужного нам движения воспользуемся примером 1 из той же работы ([2]). Напомним из этого примера построение графика функции $y_0(x)$, которую мы примем за начальную точку p_0.

Каждому натуральному числу n поставим в соответствие равнобедренный треугольник с основанием, равным n, и высотой, равной единице. Назовем этот треугольник Δ_n. Если приставлять указанные треугольники в какомнибудь порядке друг к другу, накладывая их основания на ось Ox, то боковые стороны образуют график некоторой функции. Мы будем считать при этом, что каждая пара соседних треугольников имеет одну (и только одну) общую точку. Конечную совокупность примыкающих друг к другу треугольников назовем звеном. Поступим так: правую вершину треугольника Δ_1 поместим в начало координат и приставим к Δ_1 справа треугольник Δ_2. К тому, что получится слева, присоединим звено $\Delta_1\Delta_2$ и добавим треугольник Δ_3. Будем иметь

$$\Delta_3\Delta_1\Delta_2\Delta_1\Delta_2.$$

К этому звену справа приставим такое же звено и еще треугольник Δ_4. На k-м шаге к тому, что построено, мы присоединим с подходящей стороны точно такое же звено и Δ_{k+1} — первый из неиспользованных еще треугольников. Продолжим этот процесс неограниченно.

Таким путем мы построим график функции, определенной на всей числовой оси. Назовем эту функцию $y_0(x)$. Ей соответствует точка p_0.

Докажем, что движение $f(t)p_0$, являющееся устойчивым P, как это показано в работе ([2]), не будет почти рекуррентным.

Действительно, пусть это движение является почти рекуррентным. Тогда для точки p_0 и произвольного $\varepsilon>0$ $\left(\text{в частности для } \varepsilon<\frac{1}{2}\right)$ существует относительно плотное множество чисел, определяемое числом L. Возьмем $N>2L$. Предположим теперь, что абсцисса левой вершины одного из треугольников Δ_N равна t_0. Рассмотрим дугу $f(\bar{t})\ p_0$ траектории $f(t)p_0$ при $t_0+\frac{1}{4}N\leqslant\bar{t}\leqslant t_0+\frac{3}{4}N$. Для любого $\bar{t}$ из этого промежутка $y_0(0+\bar{t})\geqslant\geqslant\frac{1}{2}$. Поэтому

$$\|p_0-f(\bar{t})\ p_0\|=\sup_{-\infty<x<+\infty}|y_0(x)-y_0(x+\bar{t})|e^{-|x|}\geqslant$$
$$\geqslant|y_0(0)-y_0(0+\bar{t})|e^0\geqslant\frac{1}{2},$$

т. е. в промежутке длиной $N>L$ не нашлось ни одного τ такого, чтобы было $\rho(p,\ f(p,\ \tau))<\varepsilon<\frac{1}{2}$. Это доказывает, что данное движение не является почти рекуррентным.

Очевидно следующее утверждение.

Для того чтобы почти рекуррентное движение было рекуррентным, достаточно, чтобы число $L(p,\ \varepsilon)$, определяющее относительно плотное множество чисел $\tau(p, \varepsilon)$, которое фигурирует в определении почти рекуррентного движения, не зависело от точки p, а для того чтобы почти рекуррентное движение было почти периодическим, достаточно, чтобы само множество чисел $\tau(p, \varepsilon)$ не зависело от точки p.

Теорема 1. *Движение будет почти рекуррентным, если найдется хотя бы одна принадлежащая этому движению точка p_0, для которой по любому $\varepsilon > 0$ найдется число $L(\varepsilon)$, определяющее относительно плотное множество чисел $\tau(\varepsilon)$ такое, что если $\tau \in \tau(\varepsilon)$, то $\rho(p_0, f(p_0, \tau)) \leqslant \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $p = f(p_0, t)$ — произвольная точка нашего движения. Пользуясь непрерывностью по начальным данным, по произвольным $\varepsilon > 0$ и $T > 0$, $T > |t|$ найдем $\delta > 0$ такое, что как только $\rho(p_0, q) < \delta$ и $|t| < T$, так

$$\rho(f(p_0, t), f(q, t)) < \varepsilon. \tag{1}$$

Пусть τ_n — элемент относительно плотного множества чисел, соответствующего данному δ. Положим $q = f(p_0, \tau_n)$, так что $\rho(p_0, f(p_0, \tau_n)) < \delta$. В силу (1)

$$\rho(t(p_0, t), f(p_0, \tau_n + t)) = \rho(p, f(p, \tau_n)) < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Если движение почти рекуррентно, то для любой ко- конечной дуги траектории множество чисел $L(p, \varepsilon)$ для произвольного, но фиксированного $\varepsilon > 0$ и для точек, принадлежащих этой дуге, ограничено.*

Доказательство. Доказательство будем вести от противного. Пусть найдется $\varepsilon > 0$ и дуга $f(p; t_0, t_0+T)$ временной длины T, для которых множество чисел $L(p, \varepsilon)$, где $p \in f(p; t_0, t_0+T)$, неограничено. Это значит, что найдется последовательность точек $\{p_n\}$, для которых $L_n(p_n, \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.

Из последовательности точек $\{p_n\}$ выделим последовательность, сходящуюся к некоторой точке p_0. Точка p_0 принадлежит нашей дуге. Для точки p_0 и для любого $\delta > 0$, в силу почти рекуррентности движения, существует число $L(p_0, \delta)$, определяющее относительно плотное множество чисел $\tau(p_0, \delta)$. Используя непрерывность по начальным данным, по данному $\varepsilon > 0$ и любому $d > 0$ найдем такое $\delta > 0$, что как только $\rho(p_0, q) < \delta$, так

$$\rho(f(p_0, t), f(q, t)) < \varepsilon \text{ для } |t| \leqslant d. \tag{1}$$

По $\delta > 0$ находим $L_0(p_0, \delta)$, определяющее $\tau_n(p_0, \delta)$, такие, что $\rho(p_0, f(p_0, \tau_n)) < \delta$. Отсюда и из (1) следует: $\rho(f(p_0, t), f(p_0, t + \tau_n)) < \varepsilon$ для $|t| \leqslant d$. На дуге $f(p_0; -d, +d)$ найдется точка p_n, для которой $L_n(p_n, \varepsilon) > L_0(p_0, \delta)$.

В то же время для этой точки годится число $L_0(p_0, \delta)$, так как

$$\rho(p_n, f(p_n, \tau_n)) = \rho(f(p_0, t_1), f(p_0, t_1 + \tau_n)) < \varepsilon,$$

поскольку $|t_1| < d$. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

То, что всякое рекуррентное движение является почти рекуррентным, очевидно.

Нетрудно показать также, что в конечномерном полном пространстве всякое почти рекуррентное движение является рекуррентным.

Сейчас мы построим пример почти рекуррентного движения в линейной динамической системе, не являющегося рекуррентным. Пример будем строить в уже рассмотренной динамической системе из работы ([2]).

Пример. Движение почти рекуррентно, но не рекуррентное.

Опишем построение графика функции $y_0(x)$, которую мы примем за начальную точку p_0 нужного нам движения. Рассмотрим множество равнобедренных треугольников Δ_n с высотами, равными 1, и основаниями, равными $\frac{1}{n}$ $(n=1, 2, \dots)$. n треугольников Δ_n, поставленных своими основаниями на общий отрезок, равный единице, вплотную друг к другу так, что два соседних треугольника имеют только одну общую точку и назовем его звеном $\Delta^{(n)}$. Установим два звена $\Delta^{(1)}$ своими основаниями на ось Ox. Первое звено занимает отрезок $[-1, 0]$, второе $[0, +1]$. Каждое из этих звеньев расставим по всей числовой прямой через p_1 (слова «через p_1» означают с периодом p_1), где p_1—целое число, большее 2. Тогда пара звеньев, занимающая отрезок $[-1, +1]$, расставится по всей числовой оси. Идя от нуля вправо, на самое первое пустое место устанавливаем звено $\Delta^{(2)}$. Такое место найдется. Им здесь является отрезок $[1, 2]$. Расставляем это звено по всей числовой прямой через p_2, причем p_1 делит p_2 и $\frac{p_2}{p_1} > 3$. Точно также, идя от точки O влево, на самое первое пустое место (отрезок $[-2, -1]$), устанавливаем звено $\Delta^{(2)}$ и расставляем его по всей числовой прямой через p_2. Докажем теперь, что звено $\Delta^{(2)}$ не накладывается ни на одно из звеньев $\Delta^{(1)}$. Действительно, пусть $\Delta^{(2)}$ где-то перекрылось с $\Delta^{(1)}$. Тогда, так как $\Delta^{(1)}$ повторяется по всей числовой прямой через p_1, то оно будет повторяться и через p_2, так как p_1 делит p_2. И то первое пустое место, куда мы поставим $\Delta^{(2)}$ и которое существует, как мы уже показали, уже не будет пустым. Пришли к противоречию.

Пусть мы установили на самое первое пустое место вправо и влево от O при n-м шаге построения звено $\Delta^{(n)}$, которое повторяется через p_n, причем p_{n-1} делит p_n и $\frac{p_n}{p_{n-1}} > 3$.

Докажем, что при этих условиях мы сможем провести $(n+1)$-й шаг построения. Звено $\Delta^{(n)}$ мы устанавливали на первое пустое место вправо и влево от O, после $(n-1)$-го шага построения. При этом пустые места повторялись, по крайней мере, через p_{n-1}, что легко доказывается аналогично тому, как мы доказывали, что ни одно из звеньев $\Delta^{(1)}$ не совпадает ни с одним из звеньев $\Delta^{(2)}$. Так как $\frac{p_n}{p_{n-1}} \geqslant 3$, то пустых мест между двумя самыми ближними звеньями $\Delta^{(n)}$, которые получили распространение от правого первого звена $\Delta^{(n)}$, будет, по крайней мере, два. Так как расстояние между этими пустыми местами меньше p_n, то из этих двух мест может быть заполнено только одно при распространении левого первого звена $\Delta^{(n)}$.

Итак, при наших условиях найдется, по крайней мере, одно пустое место. Это пустое место будет повторяться через p_n, ибо в противном случае оно само должно быть заполнено. Далее, на самые первые пустые места вправо и влево от O устанавливаем звенья $\Delta^{(n+1)}$ и распространяем их по всей оси через p_{n+1}, причем p_n делит p_{n+1} и $\frac{p_{n+1}}{p_n} > 3$. При распространении ни одно из звеньев $\Delta^{(n+1)}$ не наложится ни на одно из звеньев $\Delta^{(1)}, \Delta^{(2)}, \ldots, \Delta^{(n)}$, ибо $p_1, p_2, \ldots, p_n$ делят p_{n+1}.

Этим самым мы показали, что построение можно продолжать неограниченно, если для любого n p_n делит p_{n+1} и $\frac{p_{n+1}}{p_n}>3$. Легко показать далее, что для любого N цепь звеньев, лежащая на отрезке $[-N, +N]$, будет повторяться по всей числовой оси. Действительно, выбираем наибольший из номеров звеньев, принадлежащих отрезку $[-N, +N]$. Пусть это число n. Тогда звено $\Delta^{(n)}$, а вместе с ним и все звенья, принадлежащие отрезку $[-N, +N]$, будут повторяться через p_n.

Итак, мы получили совокупность треугольников, заполняющую всю числовую ось. Боковые стороны этих треугольников образуют график функции $y_0(x)$, являющейся начальной точкой p_0 нужного нам движения. Докажем, что движение $f(t)\,p_0$ почти рекуррентно. Для этого достаточно показать, что точка p_0 удовлетворяет условиям теоремы 1. Подберем по $\varepsilon > 0$ такое число $N > 0$, чтобы $2e^{-N} < \varepsilon$. Пусть p_n — число, через которое будет повторяться цепь звеньев, принадлежащая отрезку $[-N, +N]$. Тогда mp_n $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ является относительно плотным множеством $\tau_m(\varepsilon)$.

Действительно,

$$\rho(p, f(p, \tau_m)) =$$

$$= \sup_{-\infty<x<+\infty} |y_0(x) - y_0(x+\tau_m)|\, e^{-|x|} \leqslant \sup_{|x|>N} |y_0(x) - y_0(x+mp_n)|\, e^{-|x|} \leqslant 2e^{-N} < \varepsilon.$$

Докажем теперь, что это движение не является рекуррентным. По теореме 28 ((1), стр. 404), рекуррентное движение в полном пространстве должно быть компактным. Покажем, что наше движение не является компактным. Для этого выберем последовательность точек траектории, удовлетворяющую следующему условию: расстояние между каждыми двумя точками этой последовательности больше постоянного числа $\frac{1}{e}$. Из такой последовательности нельзя выделить сходящуюся, поэтому множество, содержащее такую последовательность, заведомо является некомпактным. За первую точку p_0 нашей последовательности возьмем $y_0(x)$. Пусть t_2 — координата левого конца основания самого левого звена $\Delta^{(2)}$ справа. Тогда $p_1 = y_0(x + t_2)$. Если t^{2n} — координата левого конца основания самого левого звена $\Delta^{(2n)}$ справа, то $p^n = y_0(x + t^{2n})$. Так как верхняя грань модуля разности таких функций равна 1 и достигается на отрезке $[0, 1]$, то

$$\rho(p_k, p_{k+m}) = \sup_{-\infty<x<+\infty} |y(x + t_{2k}) - y(x + t_{2k+2m})|\, e^{-|x|} \geqslant \frac{1}{e}.$$

Этим доказательство завершается.

§ 2. Движения, равномерно устойчивые по Пуассону

Определение. Движение $f(p, t)$ называется равномерно устойчивым по Пуассону в положительном (отрицательном) направлении ([3], стр. 29), если для любых двух чисел $\varepsilon > 0$ и $T > 0$ существует число t_0, $t_0 > T$ ($t_0 < -T$) такое, что для всех t $\rho(f(p, t+t_0), f(p, t)) \leqslant \varepsilon$. Нетрудно доказать, что если движение равномерно устойчиво по Пуассону и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая последовательность

$$\{t_0^{(n)}\}, \quad t_0^{(n)} \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

($t_0^{(n)}$ — числа, фигурирующие в определении равномерной устойчивости по Пуассону), что множество чисел $t_0^{(n)} - t_0^{(n-1)}$ ($t_0^{(0)} = 0$) равномерно ограничено числом M, то движение является почти периодическим.

Любое равномерно устойчивое по Пуассону движение является устойчивым P, но не всякое устойчивое P движение в линейной динамической системе является равномерно устойчивым по Пуассону. Именно таким движением является движение уже упомянутого примера 1([2], стр. 251). Интересно, что существуют рекуррентные движения, которые не являются равномерно устойчивыми по Пуассону.

Примером такого движения нам послужит движение примера 2([2], стр. 252).

Приводим из этого примера построение графика функции $y_0(x)$, которую мы примем за начальную точку. Нам понадобятся три горизонтальных отрезка длиной в единицу. На двух мы построим равнобедренные треугольники с высотой $\frac{1}{2}$. У первого, назовем его Δ_1, вершину поместим выше основания. У второго, Δ_2 — ниже основания. Оставшийся отрезок обозначим Δ_3. График функции $y_0(x) = p_0$ получим с помощью звеньев, составленных из фигур Δ_1, Δ_2 Δ_3 (от треугольников Δ_1, Δ_2 в график войдут боковые стороны).

Поместим Δ_1 на отрезке $[0, 1]$, Δ_2 — на отрезке $[1, 2]$, Δ_3 — на отрезке $[2, 3]$ оси Ox. Затем составим всевозможные перестановки из фигур Δ_1, Δ_2, Δ_3. Каждая из этих перестановок образует звено $\Delta_i^{(1)}$ ($i = 1, 2, \ldots, 6$). Длина звена $\Delta_i^{(1)}$ равна трем (обозначим это так: $|\Delta_i^{(1)}| = 3$), их число $m_1 = 3!$

Несколько звеньев $\Delta_i^{(1)}$ (но не все) приставим слева к звену Δ_1, Δ_2, Δ_3, уже занимающему отрезок $[0, 3]$, остальные присоединим справа. Из звеньев $\Delta_i^{(1)}$ снова составим всевозможные перестановки. Получим звенья $\Delta_i^{(2)}$. Их количество $m_2 = m_1!$ и $|\Delta_i^{(2)}| = 3m_1$.

Одно из звеньев $\Delta_i^{(2)}$ уже лежит на оси Ox, остальные приставим к нему слева и справа в произвольном порядке. Указанный процесс продолжается неограниченно. Пусть m_k — количество звеньев $\Delta_i^{(k)}$, тогда $m_k = m_{k-1}!$, причем

$$m_1 = 3!; \quad |\Delta_i^{(k)}| = 3m_1m_2m_3 \ldots m_{k-1}.$$

Функцию, соответствующую полученному графику, назовем $y_0(x)$. Ей соответствует точка p_0. Докажем, что движение $f(t)\,p_0$, являющееся рекуррентным, как это показано в работе ([2]), не будет равномерно устойчивым по Пуассону. Так как $\sup\limits_{-\infty<x<+\infty} |y_0(x+t') - y_0(x)| \geqslant \frac{1}{2}$ для любого $t' \geqslant 1$, то для каждого $t_n \geqslant 1$ найдутся такие t, что

$$\rho(f(p_0, t), f(p_0, t+t_n)) = \|f(p_0, t) - f(p_0, t+t_n)\| =$$
$$= \sup_{-\infty<x<+\infty} |y_0(x+t) - y_0(x+t+t_n)| e^{-|x|} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Этим и доказывается, что данное рекуррентное движение не является равномерно устойчивым по Пуассону.

Вопрос, всякое ли равномерно устойчивое по Пуассону движение в линейной динамической системе рекуррентно, остается открытым.

Поступило
25.III.1960

ЛИТЕРАТУРА

1 Немыцкий В. В. и Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.— Л., 1949.

2 Шолохович Ф. А., Линейные динамические системы, Изв. высш. уч. зав., матем., № 1 (1957), 249—257.

3 Бебутов М. В., О динамических системах в пространстве непрерывных функций, Бюллетень МГУ, матем., II, вып. 5 (1941), 3—51.