Е. М. Федотов, Об одном классе двуслойных нелинейных операторно-разностных схем с весами,
Изв. вузов. Матем., 1995, номер 4, 96–103

https://www.mathnet.ru/ivm1732

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1995 МАТЕМАТИКА № 4 (395)

УДК 519.633

Е.М. ФЕДОТОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ДВУСЛОЙНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНО-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С ВЕСАМИ

При решении нестационарных задач математической физики широко используются двуслойные разностные схемы (РС). Изучению различных аспектов теории таких схем посвящено множество работ. Наиболее полно изучены разностные схемы для линейных задач. В работах [1]–[4] построена общая теория корректности линейных двуслойных операторно-разностных схем (ОРС), позволяющая с единых позиций исследовать разрешимость, устойчивость и сходимость разностных схем для эволюционных уравнений и систем.

По теории корректности нелинейных разностных схем отметим работы [5]–[10], в которых доказаны теоремы о корректности некоторых видов нелинейных двуслойных ОРС.

В данной работе исследуется корректность двуслойной нелинейной ОРС с весами, в которой "пространственный" оператор представим в виде суперпозиции пары операторов с различными свойствами. Такое представление позволило с единых позиций сформулировать условия корректности достаточно широкого класса РС для уравнений параболического и гиперболического типов. Рассматриваемая ОРС включает в себя как частный случай известные линейные и многие часто используемые в вычислительной практике нелинейные РС с весами [9], [12], [13].

Применение доказанных в работе общих теорем о корректности ОРС иллюстрируется на примере исследования сходимости РС для одномерного уравнения газодинамики.

1. Пусть $H=H_h$ – семейство конечномерных евклидовых пространств, зависящих от параметра h, элемента конечномерного пространства с нормой $|h|>0$, $\overline{\omega}_\tau=\{0,\tau,2\tau,\dots,T\}$ – сетка на отрезке $[0,T]$, $X=X_{\tau h}=\{v(t)\in H,\ t\in\overline{\omega}_\tau\}$ – пространство функций, определенных на сетке $\overline{\omega}_\tau$, со значениями в пространстве H.

В работе исследуется ОРС

$$y_t + A(y,\hat{y}) = \hat{F}, \quad t\in\omega_\tau=\overline{\omega}_\tau\setminus\{T\}, \quad y(0)=y_0\in H, \quad y\in X. \tag{1}$$

Здесь $A(y,v)=K\widetilde{D}_l(y,v)$, $\widetilde{D}_l(y,v)=\sum\limits_{k=1}^{m} l_k D(\sigma_k v+(1-\sigma_k)y)$, $\sigma_k\in[0,1]$, $\sum\limits_{k=1}^{m} l_k=1$, K, D – операторы из H_h в H_h, $m>0$.

ОРС вида (1) возникают, напр., при использовании формул численного интегрирования при реализации ОРС вида [13], [14]:

$$y_t + K\int_0^1 Dy^{(\sigma)}d\sigma = \hat{F}(t), \quad y(0) = y_0, \quad y^\sigma = \sigma\hat{y}+(1-\sigma)y. \tag{2}$$

Схемы вида (2) включают в себя некоторые важные с точки зрения приложений полностью консервативные разностные схемы с весами

$$y_t+Dy^{(\sigma)} = \hat{F}(t), \tag{3}$$

$m=1$, $l_1=1$, $\sigma_1=\sigma$,

$$y_t+(Dy)^{(\sigma)} = \hat{F}(t), \tag{4}$$

$m=2$, $l_1=1-\sigma$, $\sigma_1=0$, $l_2=\sigma$, $\sigma_2=1$, часто применяемые в вычислительной практике.

Теоремы о корректности широкого класса линейных, а также некоторых видов нелинейных разностных схем с весами, и, в частности (3), (4), а также библиографию по этому вопросу можно найти в [1], [3], [6], [16].

Перейдем к описанию понятия корректности ОРС.

Пусть u – фиксированный элемент из $X_{\tau h}$, $\mu(\tau,|h|) \geq \|u(t+\tau)-u(t)\|$, $\gamma = \delta+\mu$, $\delta = \delta(\tau,|h|)>0$; $|\cdot|$, $\|\cdot\|$, $\|\cdot\|_{(-)}$ – некоторые нормы в H_h; $O_\delta(v)=\{\eta\in H_h:\|\eta-v\|\leq\delta\}$, $U_\delta(v) = \{\eta\in X:\eta(t)\in O_\delta(v(t)),\ t\in\bar{\omega}_h\}$ – окрестности в H_h и X, соответственно. Всюду через c, d, возможно с индексами, будем обозначать различные не зависящие от τ, h постоянные. Для разностных отношений, скалярных произведений и норм будем использовать обозначения, принятые в [1], [18].

Будем использовать определение корректности, близкое к определению локальной корректности ОРС из [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. ОРС (1) назовем (u,δ)-корректной, если существуют такие $\delta_i = \delta_i(\tau,h)>0$ и нормы $\|\cdot\|_{(j)}$, $j=1,2$, что как только $\|y_0-u(0)\|_{(1)}\leq\delta_0$, $\|\Psi\|_{(2)}\leq\delta_1$, то ОРС (1) имеет решение $y:\|y(t)-u(t)\|_{(1)}\leq\delta$, и справедлива оценка (неравенство корректности)

$$\|y(t)-u(t)\|_{(1)} \leq J(\Psi(u)) \equiv M_1\|y_0-u(0)\|_{(1)} + M_2\|\Psi(u)\|^{\nu}_{(2)}$$

с постоянными M_1 и M_2, не зависящими от τ и h, $\nu>0$, $\Psi(u)(\hat{t}) = \hat{F}(t)-u_t-A(u,\hat{u})$, $t\in\omega_\tau$, $\Psi(u)(0)=y_0-u(0)$.

Относительно операторов K и D будем предполагать выполненными условия:

а) оператор K является непрерывным в $DO_\gamma(u(t))$ и при $v_1\in DO_\gamma(u(t))$, $\hat{U}=\tilde{D}_l(u(t),\hat{u}(t))$, $U(0)=\tilde{D}_l(u(0),u(0))$, $\tau\in\bar{\omega}_\tau$ выполнено неравенство

$$d_1[(Ku_1-KU,v_1-U)+d_2|v_1-U|^2] \geq \|v_1-U\|^p_{(+)},$$

$$p>1,\quad d_1=d_1(\tau,|h|)>0,\quad d_2\geq 0,\quad \|v\|_{(+)} = \sup_{\eta\neq 0}\frac{(\eta,v)}{\|\eta\|_{(-)}}; \tag{5}$$

б) оператор D дважды непрерывно дифференцируем по Фреше в $O_\gamma(u(t))$, потенциален ([19], с.65) и при любых v, $v_i\in O_\gamma(u(t))$, $i=1,2$, $v_j\in H_h$, $j=\overline{3,5}$, выполнены неравенства

$$(Dv_1-Dv_2,v_1-v_2) \geq d_3\|v_1-v_2\|^2,\quad d_3>0, \tag{6}$$

$$|(D^{(1)}(v)v_3,v_4)| \leq d_4\|v_3\|\,\|v_4\|,\quad d_4>0, \tag{7}$$

$$d_2|Dv_1-Dv_2|^2 \leq d_5\|v_1-v_2\|^2,\quad d_5\geq 0,$$

$$|(D^{(2)}(v)u_tv_3,v_4)| \leq d_6\|v_3\|\,\|v_4\|,\quad d_6>0, \tag{8}$$

$$|(D^{(2)}(v)v_3v_4,v_5)| \leq d_7\|v_3\|\,\|v_4\|\,\|v_5\|,\quad d_7=d_7(\tau,h)\geq 0. \tag{9}$$

При исследовании корректности ОРС (1) потребуется следующая аналогичная лемме 4.3 из [20]

ЛЕММА 1. *Пусть H – конечномерное евклидово пространство, $\|\cdot\|$ – некоторая норма в H, P – непрерывное отображение H в себя, D – дифференцируемое отображение, удовлет-*

воряющее при некоторых $u,\hat{u}\in H$, $\delta>0$, $\|\hat{u}-u\|\leqslant\mu$ и любых $v,v_1,v_2\in O_{\delta+\mu}(u)$ следующим неравенствам:

$$(Dv_1-Dv_2,\, v_1-v_2) \geqslant \alpha\|v_1-v_2\|^2, \quad \alpha>0, \tag{10}$$

$$|(D^{(1)}(v)v_3,\, v_4)| \leqslant \beta\|v_3\|\,\|v_4\|, \quad \beta>0. \tag{11}$$

Пусть далее при некотором $\rho>0$ *и любых* $\eta,\xi:\|\eta\|=\rho$, $\|\xi\|<\rho\alpha\beta^{-1}$ *имеет место неравенство*

$$(P(\eta),\, \tilde{D}_l(\bar{\eta},\bar{\xi})-\tilde{D}_l(\hat{u},u)) \geqslant 0, \tag{12}$$

где $\bar{\eta}=\hat{u}+\eta$, $\bar{\xi}=u+\xi$, $\tilde{D}_l(v,\omega)=\sum\limits_k l_kD(\sigma_kv+(1-\sigma_k)\omega)$, $l_k\geqslant 0$, $\sum l_k=1$. *Тогда найдется такой элемент* $\eta\in O_\rho(\hat{u})$, *что* $P(\eta)=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проведем от противного. Если $P(\xi)\neq 0$ в шаре $K=\{\eta:\|\eta\|\leqslant\rho\}$, то оператор $-P(\eta)\rho/\|P(\eta)\|$, действующий из K в K, будет непрерывным. Из теоремы Брауэра о неподвижной точке следует существование такого η, что

$$\eta = -P(\eta)\rho/\|P(\eta)\|. \tag{13}$$

Умножая обе части (13) скалярно на $\tilde{D}_l(\bar{\eta},\bar{\xi})-\tilde{D}_l(u,\hat{u})$, получим (ср. с (12))

$$0 \geqslant -(P(\eta),\, \tilde{D}_l(\bar{\eta},\bar{\xi})-\tilde{D}_l(\hat{u},u))\rho/\|P(\eta)\| = (\eta,\, \tilde{D}_l(\bar{\eta},\bar{\xi})-\tilde{D}_l(\hat{u},u)) =$$

$$= (\eta,\, \tilde{D}_l(\bar{\eta},\bar{\xi})-\tilde{D}_l(\bar{\eta},\bar{\xi})) + (\eta,\, \tilde{D}_l(\bar{\eta},\bar{\xi})-\tilde{D}_l(\hat{u},u)) \equiv J.$$

С другой стороны, воспользовавшись для оценки слагаемых в J неравенствами (10), (11), будем иметь

$$J \geqslant \frac{\alpha}{\nu}\|\eta\|^2 - \frac{\beta}{\nu}\|\eta\|\,\|\xi\| = \rho\frac{\alpha}{2}(\rho-\frac{\beta}{\alpha}\|\eta\|) > 0, \quad \nu = \sum_i l_i\sigma_i.$$

Полученное противоречие завершает доказательство леммы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\tau\leqslant\tau_0$, $|h|\leqslant\eta_0$, *выполнены неравенства* (5)–(9), *а также неравенство* $\alpha=\sum l_i(\mu_id_3-3\nu_i\delta d_7)\geqslant 0$, *где* $\mu_i=\sigma_i-1/2$, $\nu_i=l_i^{-1}\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}|\sigma-\sigma_i|d\sigma$, $\chi_i=\sum\limits_{j=1}^{i}l_j$. *Тогда ОРС (1) является* (u,δ)-*корректной. При этом постоянные, входящие в функционал* J, *определяются равенствами* $M_1 = \gamma_1\bar{\gamma}d_4^{1/2}$, $M_2 = \gamma_1\bar{\gamma}/\sqrt{2}$, $\bar{\gamma} = \exp(aT/(1-\tau_0a))/[(1-\tau_0a)d_3]^{1/2}$, $\gamma_1=d_4/d_3$, $a = 2d_3^{-1}(6d_6+d_5)$, $\nu = p/2(p-1)$, *а нормы* $\|\cdot\|_1$ *и* $\|\cdot\|_2$ *совпадают соответственно с* $\|\cdot\|$ *и* $\left(\sum\limits_{t\in\omega_\tau}\tau\,(d_1\|\Psi(u)(\hat{t})\|_{(-)})^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p}$.

При доказательстве теоремы 1 потребуется

ЛЕММА 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и при всех* $t\leqslant t^*$ *ОРС* (1) *разрешима в* $O_\delta(u(t))$. *Тогда для* $z(t)=y(t)-u(t)$ *верна оценка*

$$d_3\|z(t)\|^2 \leqslant 2\Phi(z) \leqslant r(t-\tau) \equiv$$

$$\equiv \exp\left(\frac{2a}{1-\tau_0a}(t-\tau)\right)\left[d_4\|z_0\|^2+\sum_{t'=0}^{t-\tau}2\tau\,(d_1\|\hat{\Psi}(t')\|_{(-)})^{p/(p-1)}/(1-\tau_0a)\right], \tag{14}$$

где $\Phi(t)=\int_0^1\int_0^1(A^{(1)}(u+\xi\beta z)z,\, z)d\beta\, d\xi$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для функции $z(t)$ имеем

$$z_t+A(y,\hat{y})-A(u,\hat{u}) = \hat{\psi} = \hat{F}(t)-u_t-A(u,\hat{u}), \quad z(0) = z_0 = y_0-u(0). \tag{15}$$

Умножим (15) скалярно на $2\tau(\widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u}))$. Получим

$$2\tau(\widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u}),\, z_t) + 2\tau\,(A(y,\widehat{y})-A(u,\widehat{u}),\, \widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u})) =$$
$$= 2\tau(\widehat{\psi},\, \widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u})). \tag{16}$$

Преобразуем и оценим каждое слагаемое в (16). Сначала оценим первое слагаемое (I). Имеем

$$I = 2\tau(\widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u}),\, z_t) = 2\tau(\widetilde{D}(y,\widehat{y})-\widetilde{D}(u,\widehat{u}),z_t) +$$
$$+ 2\tau\{(\widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}(y,\widehat{y}),\, z_t) - (\widetilde{D}_l(u,\widehat{u}) - \widetilde{D}(u,\widehat{u}),z_t)\}, \tag{17}$$

где $\widetilde{D}(v,\widehat{v})=\int_0^1 \widetilde{D}v^{(\sigma)}d\sigma$. Первое слагаемое в правой части (17) обозначим через I^s. Преобразуем его по аналогии с (15) из [14]:

$$I^s = 2\tau(\Phi(z))_t - \tau\iiint_0^1\{2(D^{(2)}(\overline{u}+\xi z^{(\theta)}+\beta(u^{(\theta)}-\overline{u}))u_t(\theta-1/2)z^{(\theta)},\, \widehat{z}-z) -$$
$$- (D^{(2)}(\overline{u}+\theta\xi\widehat{z}+\beta(\widehat{u}-\overline{u}))u_t\xi\widehat{z},\, \widehat{z}) + (D^{(2)}(\overline{u}+\theta z+\beta(\overline{u}-u))u_t\xi z,\, z)\}\, d\beta\, d\xi\, d\theta,$$

где $\overline{u}=(\widehat{u}+u)/2$. Оценим I^s, пользуясь (9),

$$I^s \geqslant 2\tau(\Phi(z))_t-2\tau d_6[\|\widehat{z}\|^2+\|z\|^2]. \tag{18}$$

Теперь в равенстве (17) оценим слагаемые в фигурных скобках. Вначале преобразуем первое из них

$$I^1 = 2\tau(\widetilde{D}(y,\widehat{y})-\widetilde{D}(u,\widehat{u}),\, z_t) = -2\tau\sum_{i=1}^{m}\left[\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}(Dy^{(\sigma)},\, z_t)d\sigma - l_i\left(Dy^{(\sigma_i)},\, z_t\right)\right] =$$
$$= -2\tau\sum_{i=1}^{m}\left[\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}\left(Dy^{(\sigma)}-Dy^{(\sigma_i)},\, z_t\right)d\sigma,\right.$$

пользуясь при этом формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Получим

$$I^1 = -2\tau^2\sum_{i=1}^{m}\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}\int_0^1(D'\,(y^{(\sigma_i)}+\xi(\widehat{y}-y))(\sigma-\sigma_i)y_t,\, z_t)\, d\xi\, d\sigma.$$

Аналогично преобразуем второе слагаемое I^2. Фигурная скобка в (17) в результате примет вид

$$I^1+I^2 = -2\tau^2\sum_{i=1}^{m}\int_0^1\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}(D'\,(\widetilde{y})y_t-D'\,(\widetilde{u})y_t,\, z_t)(\sigma-\sigma_i)d\sigma\, d\xi =$$
$$= 2\tau^2\sum_{i=1}^{m}\int_0^1\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}[(D'\,(\widetilde{y})z_t,\, z_t)(\sigma_i-\sigma)+((D'\,(\widetilde{y})-D'\,(\widetilde{u}))u_t,\, z_t)(\sigma_i-\sigma)]d\xi\, d\sigma,$$
$$\widetilde{v} = v^{(\sigma_i)} + \tau\xi(\sigma-\sigma_i)v_t.$$

Вновь воспользовавшись формулой Тейлора, преобразуем полученное выражение,

$$I^1+I^2 = 2\tau^2\sum_{i=1}^{m}\left\{l_i\mu_i(D'\,(\overline{u})z_t,z_t) +\right.$$
$$+ \left[\int_0^1\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}\int_0^1(D^{(2)}(\overline{u}+\lambda(\widetilde{y}-\overline{u}))(\widetilde{y}-\overline{u})z_t,\, z_t)(\sigma-\sigma_i)d\lambda\, d\sigma\, d\xi\right. +$$
$$\left.\left.+ \int_0^1\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}\int_0^1(D^{(2)}(\widetilde{u}+\lambda(\widetilde{y}-\widetilde{u}))(\widetilde{y}-\widetilde{u})u_t,\, z_t)(\sigma_i-\sigma)d\lambda\, d\sigma\, d\xi\right]\right\}, \tag{19}$$

где $\mu_i=(\sigma_i-(\chi_i+\chi_{i-1}))/2$.

Заметим, что $\widetilde{y}-\overline{u}=(\xi\sigma+(1-\sigma)\sigma_i-1/2)(\widehat{z}-z)$, $\widetilde{y}-\widetilde{u}=z^{(\sigma_i)}+\xi(\sigma-\sigma_i)(\widehat{z}-z)$, а затем воспользуемся (9) и (6) для оценки слагаемых в (19):

$$2\tau^2\left|\int_0^1\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}\int_0^1(D^{(2)}(\overline{u}+\lambda(\widetilde{y}-\overline{u}))(\widetilde{y}-\overline{u})z_t,\, z_t)(\sigma-\sigma_i)d\lambda\, d\sigma\, d\xi\right| \le$$

$$\le 3l_i\nu_i\tau^2 d_7\|z_t\|^2(\|\widehat{z}\|+\|z\|) \le 6\delta d_3 d_7\tau^2(D'(\overline{u})z_t,\, z_t)\nu_i l_i; \tag{20}$$

$$2\tau^2\left|\int_0^1\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}\int_0^1(D^{(2)}(\widetilde{u}+\lambda(\widetilde{y}-\widetilde{u}))(\widetilde{y}-\widetilde{u})u_t,\, z_t)(\sigma_i-\sigma)d\lambda\, d\sigma\, d\xi\right| \le 6\tau l_i\nu_i d_6(\|\widehat{z}\|^2+\|z\|^2). \tag{21}$$

Подставив (20), (21) в (19), придем к неравенству

$$I^1+I^2 \ge 2\tau^2\alpha d_3^{-1}(D'(\overline{u})z_t,\, z_t) - 6\tau\beta d_6(\|\widehat{z}\|^2+\|z\|^2),$$

где $\beta=\sum_1^m l_i\nu_i \le 3/2$.

В силу условия леммы $\alpha>0$, а следовательно, окончательная оценка первого слагаемого в (16) примет вид

$$I \ge 2\tau(\Phi(z))_t - 11\tau d_6(\|\widehat{z}\|^2+\|z\|^2). \tag{22}$$

Теперь оценим правую часть равенства (16). При этом воспользуемся (5) и неравенством Гёльдера

$$2\tau\,|(\widehat{\psi},\, \widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u}))| \le 2\tau\|\widehat{\psi}\|_{(-)}\|\widetilde{D}_l(y,\widehat{y}) - \widetilde{D}_l(u,\widehat{u})\|_{(+)} \le$$

$$\le 2\tau d_1\|\widehat{\psi}\|_{(-)}[d_2|\widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u})|^2 + (K\widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-K\widetilde{D}_l(u,\widehat{u}),\, \widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u}))]^{1/p} \le$$

$$\le 2\tau(K\widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-K\widetilde{D}_l(u,\widehat{u}),\, \widetilde{D}_l(y,\widehat{y})-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u})) + 2\tau d_5[\|\widehat{z}\|^2+\|z\|^2]+2\tau(d_1\|\widehat{\psi}\|_{(-)})^{p/(p-1)}.$$

Оценим слагаемые, содержащие нормы z, $\widehat{z}$, пользуясь неравенством $2\Phi(z)\ge d_3\|z\|^2$, следующим из (6), а затем результат подставим в (17). Получим

$$2\Phi(z)(1-\tau a) \le 2\Phi(\widehat{z})(1+\tau a)+2\tau(d_1\|\widehat{\psi}\|_{(-)})^{p/(p-1)}, \quad a = 2d_3^{-1}(d_5+4d_6). \tag{23}$$

Наконец, воспользовавшись сеточной леммой Гронуолла [3], а затем (6), (7) для оценки функционала $\Phi(z)$, приходим к неравенству (14). Лемма доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1 проведем индукцией по $t\in\omega_\tau$. Пусть $J(\Psi(u))\le\delta$. Ясно, что в этом случае $y_0\in O_{\delta d_2 d_4^{-1}}(u(0))$. Предположим, что для всех $t\le t^*$ в $O_\delta(u(t))$ существует решение $\widehat{y}(t^*)$. Положим $\widehat{z}(t)=y(t)-u(t)$ при $t\le t^*$, а $\widehat{z}(t^*)=v-u(t^*)$, $v\in O_\delta(\widehat{u}(t^*))$. Отметим, прежде всего, что в силу леммы 2 при $t\le t^*$ верна оценка

$$\|z(t)\| < J(\Psi(u))/\gamma_1 \le \delta/\gamma_1 \le \delta d_3/d_4. \tag{24}$$

Рассмотрим выражение

$$G = (P(\widehat{z}),\, \widetilde{D}_l(y,u)-\widetilde{D}_l(u,\widehat{u})),$$

где

$$P(\widehat{z}) = 2(v-u)+2\tau A(y,v)-2\tau\widehat{F}(t), \quad t = t^*.$$

Полагая $D_y=\widetilde{D}_l(y,v)$, $D_u=\widetilde{D}_l(u,\widehat{u})$, имеем

$$G = 2\tau(z_t,\, D_y-D_u)+2\tau(KD_y-KD_u,\, D_y-D_u)-2\tau(\widehat{\psi},\, D_y-D_u).$$

Оценивая слагаемые в G, как в лемме 2, получим

$$G \geqslant 2\Phi(\widehat{z})(1-\tau a)-2\Phi(z)(1+\tau a)-2\tau(d_1\|\widehat{\psi}\|_{(-)})^{p/(p-1)}.$$

Для оценки $\Phi(z)$ воспользуемся (14). Получим

$$G \geqslant d_3(1-\tau a)\|\widehat{z}\|^2 - \exp\left(\frac{2a}{1-\tau a}t\right)\left[d_4\|z_0\|^2+\sum_{t'=0}^{t}\tau(d_1\|\widehat{\psi}(t')\|_{(-)})^{p/(p-1)}\right].$$

Второе слагаемое в правой части этого неравенства не больше, чем $d_3(1-\tau a)J(\Psi(u))$. Поэтому на границе шара $\|\widehat{z}\|=\|v-\widehat{u}(t)\|=\delta$ имеем $G\geqslant 0$. Тогда в силу леммы 1 существует такой элемент $\widehat{z}$, что $\|\widehat{z}\|\leqslant\delta$ и $P(\widehat{z})=0$. Полагая $\widehat{y}=\widehat{u}+\widehat{z}$, получим $\widehat{y}\in O_\delta(\widehat{u}(t))$ и $y_t+A(y,\widehat{y})=\widehat{F}(t)$, $t=t^*$.

В случае, когда оператор K является тождественным, можно доказать корректность ОРС (1) при более слабых ограничениях на коэффициенты l_i, σ_i разностной схемы. А именно, верна

ТЕОРЕМА 2. *Пусть при* $\tau\leqslant\tau_0$, $|h|\leqslant h_0$ *выполнены неравенства* (5)–(9), *а также неравенство*

$$d_3E+\alpha D'(u) \geqslant 0,$$

где $\alpha=\sum_i l_i(\mu_i d_3-3\nu_i\delta d_7)$, $\mu_i=\sigma_i-1/2$, $\nu_i=l_i^{-1}\int_{\chi_{i-1}}^{\chi_i}|\sigma-\sigma_i|\,d\sigma$, $\chi_i=\sum_{j=1}^{i}l_j$. *Тогда ОРС* (1) (u,δ)*-корректна, причем неравенство корректности имеет вид*

$$\max_t\|y(t)-u(t)\| \leqslant J(\Psi(u)) \equiv M_1\|y_0-u(0)\| + M_2\left[\left(\sum_{t\in\omega_\tau}\tau\|\psi_t\|_*^2\right)^{1/2}+\max_{t\in\omega_\tau}\|\psi(t)\|_*\right],$$

где M_1 *и* M_2 *– постоянные, не зависящие от* τ *и* h, *а* $\|v\|_*=\sup\limits_{\eta\neq0}\dfrac{|(v,\eta)|}{\|\eta\|}$.

2. Рассмотрим систему одномерных уравнений газодинамики в изоэнтропическом приближении, записанную в лагранжевых массовых координатах,

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}-\frac{\partial v}{\partial s}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial s}=0,\qquad s\in(0,1),\ t\in(0,T),\tag{25}$$

с граничными и начальными условиями $v(0,t)=v(1,t)=0$, $v(s,0)=v_0$, $\eta(s,0)=\eta_0$.

Здесь $\eta=1/\rho$, v – обобщенные термодинамические координаты (удельный объем и скорость); $p(\eta)$, v – термодинамические силы, $p(\eta)=-\dfrac{\partial\varepsilon}{\partial\eta}$, $\varepsilon=\varepsilon(\eta)$ – удельная внутренняя энергия газа.

Будем предполагать, что задача (25) имеет единственное достаточно гладкое решение. Это требование является вполне допустимым при гладких входных данных и небольшом значении T. Достаточную гладкость будем также предполагать относительно функции удельной внутренней энергии ε.

Кроме того, относительно функции ε будем предполагать ее выпуклость (условие Бете-Вейля)

$$\frac{\partial^2\varepsilon(\eta')}{\partial\eta'^2} \geqslant c_0 > 0\tag{26}$$

при всех $\eta'\in P=\{q:\|q-\eta\|_C\leqslant\beta\}$, $\beta>0$.

Введем в рассмотрение равномерную с шагом $h=1/N$ сетку $\overline{\omega}_h$ на отрезке $[0,1]$ и аппроксимируем исходную задачу (25) разностной схемой с весами

$$\eta^h_{\bar t}-(v^h)^{(\sigma)}_{\bar s} = 0, \quad s\in\bar\omega_h\backslash\{1\},$$

$$v^h_{t}+p(\eta^h)^{(\sigma)}_{s} = 0, \quad s\in\bar\omega_h\backslash\{0,1\}, \tag{27}$$

$$v^h(0,t) = v^h(1,t) = 0, \quad v^h(s,0) = v_0, \quad \eta^h(s,0) = \eta_0, \quad \sigma\in[0,1].$$

Как известно, схема (27) аппроксимирует задачу (25) с точностью $O(\tau+h^2)$.

Определим пространства сеточных функций $H=V\times V_0$, $V=\{z(x),\ x\in\omega_h\{1\}\}$, $V_0=\{z(x),\ x\in\bar\omega_h$: $z(0)=z(1)=0\}$ и операторы D и K равенствами

$$((Du,w)) = [\partial\varepsilon(u_1)/\partial u_1,\ w_1) + [u_2,w_2),$$

$$((Ku,w)) = -[u_{2,s},w_1)+[u_1,\ w_{2,s}), \quad u = (u_1,u_2), \quad w=(w_1,\ w_2)\in H, \tag{28}$$

где $((u,v))\equiv[u_1,w_1)+[u_2,w_2)$ – скалярное произведение в H.

Схема (27) может быть записана теперь в операторном виде (1) с $y=(\eta^h,v^h)$, $F=0$.

Исследуем корректность разностной схемы (27). Для этого воспользуемся теоремой 1. Положим $\delta=\beta h^\mu/2$, $\mu>1/2$, и пусть $u=(u_1,\ u_2)\equiv(\eta,u)$ – проекция решения задачи (25) на $X_{\tau h}$.

Заметим, что для любого элемента $q\in U_\delta(u)=\{e(t):\|e(t)-u(t)\|_H\leqslant\delta\}$ выполнено неравенство

$$\max|q_i(s,t)-u_i(s,t)| \leqslant \beta h^{\mu_0}, \quad i=1,2,\ \mu_0=\mu-1/2>0.$$

Следовательно, $q_1\in P$ (см. (26)).

Нетрудно проверить (см. (28)), что оператор D является потенциальным, а оператор K – кососимметричным, кроме того, в силу (26) оператор D является сильно монотонным.

Таким образом, неравенства (5)–(9) выполнены. При этом постоянные d_i не зависят от шагов τ, h сеток по переменным t и s; p равно 2, а нормы, фигурирующие в этих неравенствах, очевидно, совпадают с евклидовой нормой в пространстве H. Из этого следует, что условия теоремы 1 выполняются при достаточно малых $\tau<\tau_0$, $h<h_0$ и $\sigma>1/2$. Таким образом, разностная схема (27) (u,δ)-корректна.

Отметим, далее, что при $\tau\leqslant ch^\nu$, $\nu\geqslant\mu$

$$J(\Psi(u)) \leqslant c_1\max_t\|\hat\psi\| = O(\tau+h^2) \leqslant \delta.$$

Тогда из определения (u,δ)-корректности следует существование решения разностной схемы, ее сходимость и оценка точности

$$\max_t\{[\eta^h-\eta,\ \eta^h-\eta)+[v^h-v,\ v^h-v)\}^{1/2} = O(\tau+h^2).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. *Введение в теорию разностных схем.* – М.: Наука, 1971. – 552 с.

2. Самарский А.А. *Классы устойчивых схем* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1967. – Т.7. – № 5. – С.1096–1133.

3. Самарский А.А., Гулин А.В. *Устойчивость разностных схем.* – М.: Наука, 1973. – 415 с.

4. Гулин А.В. *Теоремы об устойчивости несамосопряженных разностных схем* // Матем. сб. – 1979. – Т.110. – № 2. – С.297–303.

5. Ляшко А.Д., Карчевский М.М. *Исследование одного класса нелинейных разностных схем* // Изв. вузов. Математика. – 1970. – № 7. – С.63–71.

6. Ляшко А.Д. *О корректности нелинейных двухслойных операторно-разностных схем* // ДАН СССР. - 1974. - Т.215. - № 2. - С.263-265.

7. Лапин А.В., Ляшко А.Д. *О сходимости разностных схем для квазилинейных уравнений, параболических на решении* // Изв. вузов. Математика. - 1975. - № 12. - С.30-42.

8. Арделян Н.В. *Разрешимость и сходимость нелинейных разностных схем* // ДАН СССР. - 1988. - Т.302. - № 6. - С.1289-1292.

9. Абрашин В.Н. *О разностных схемах газовой динамики* // Дифференц. уравнения. - 1981. - Т.17. - № 4. - С.710-718.

10. Абрашин В.Н., Матус П.П. *О точности разностных схем для одномерных задач газовой динамики* // Дифференц. уравнения. - 1981. - Т.17. - № 7. - С.1155-1170.

11. Абрашин В.Н. *Устойчивые разностные схемы для квазилинейных уравнений математической физики* // Дифференц. уравнения. - 1982. - Т.18. - № 11. - С.1967-1971.

12. Попов Ю.П., Самарский А.А. *Полностью консервативные разностные схемы* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. - 1969. - Т.9. - № 4. - С.953-958.

13. Попов Ю.П., Самарский А.А. *Разностные схемы газовой динамики.* - М.: Наука, 1980. - 352 с.

14. Ляшко А.Д., Федотов Е.М. *Корректность одного класса консервативных нелинейных операторно-разностных схем* // Изв. вузов. Математика. - 1985. - № 10. - С.47-55.

15. Федотов Е.М. *Об одном классе двухслойных разностных схем для нелинейных гиперболических уравнений* // Исследов. по прикладной матем. - Казань, 1990. - № 17. - С.129-146.

16. Федотов Е.М. *Разностные схемы для нелинейных нестационарных задач.* Учеб. пособие. - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. - 90 с.

17. Ляшко А.Д., Федотов Е.М. *Исследование нелинейных двухслойных операторно-разностных схем с весами* // Дифференц. уравнения. - 1985. - Т.21. - № 7. - С.1217-1227.

18. Карчевский М.М., Ляшко А.Д. *Разностные схемы для нелинейных задач математической физики.* - Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1976. - 155 с.

19. Вайнберг М.М. *Функциональный анализ.* М.: Просвещение, 1979. - 128 с.

20. Лионс Ж.-Л. *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* - М.: Мир, 1972. - 588 с.

Казанский государственный университет

Поступила
05.10.1994