В. П. Ильин, О разложении анизотропного пространства $W_p^{(l_1,\dots,l_n)}(\Omega)$ с помощью специального проекционного оператора, *Сиб. матем. журн.*, 1969, том 10, номер 1, 212–216

Том X, № 1 Январь — Февраль 1969 г.

ОТДЕЛ ЗАМЕТОК

УДК 517.432

В. П. ИЛЬИН

О РАЗЛОЖЕНИИ АНИЗОТРОПНОГО ПРОСТРАНСТВА $W_p^{(l_1,\ldots,l_n)}(\Omega)$ С ПОМОЩЬЮ СПЕЦИАЛЬНОГО ПРОЕКЦИОННОГО ОПЕРАТОРА

В настоящей заметке приводится одно специальное интегральное представление функций пространства $W_p^{(l_1,\ldots,l_n)}(\Omega)$, аналогичное представлению С. Л. Соболева ([1]) для изотропного пространства $W_p^{(l)}(\Omega)$, из которого вытекает интересующее нас разложение пространства $W_p^{(l_1,\ldots,l_n)}(\Omega)$. Отметим, что в работе ([2]) О. В. Бесова также было получено разложение функций из $W_p^{(l_1,\ldots,l_n)}(\Omega)$ с помощью проекционного оператора, однако полученное там представление несколько отлично от нашего.

I. В дальнейшем Ω будет обозначать n-мерную область точек $x = (x_1,\ldots,x_n)$ эвклидова пространства E^n. Точки пространства E^n будем обозначать также через y и t.

Пусть $\varkappa = (\varkappa_1,\ldots,\varkappa_n)$, $\varkappa_i > 0$ $(i = 1,\ldots,n)$, v — параметр, $0 < v \leqslant 1$. Пусть n — мерный куб $\square\,(\alpha,\beta) = \{x\colon \alpha < x_i < \beta\ (i = 1,\ldots,n)\}$ лежит в области Ω.

Будем говорить, что область Ω $\varkappa$-звездна относительно куба $\square\,(\alpha,\beta)$, если для любой точки $x \in \Omega$ тело $V(x,\varkappa)$, где

$$V(x;\varkappa) = \bigcup_{0<v\leqslant 1} V(x;\varkappa,v), \tag{1}$$

$$V(x;\varkappa,v) = \{y\colon\ x_i + (\alpha - x_i)v^{\varkappa_i} \leqslant y_i \leqslant x_i + (\beta - x_i)v^{\varkappa_i}\ (i = 1,\ldots,n)\}, \tag{2}$$

содержится в Ω.

В дальнейшем будем предполагать область Ω $\varkappa$-звездной относительно куба $\square\,(\alpha,\beta)$. Положим еще

$$[y]^k = y_1^{k_1}\ldots y_n^{k_n},\quad k = (k_1,\ldots,k_n),\ k_i \text{ — целые } (i = 1,\ldots,n),$$
$$k - I = (k_1 - 1,\ldots,k_n - 1),\quad (k - I)! = (k_1 - 1)!\ldots(k_n - 1)!,$$
$$D_{y_i}^{k_i} f(y) = \frac{\partial^{k_i}}{\partial y_i^{k_i}} f(y),\qquad D_y^k f(y) = \frac{\partial^{k_1}}{\partial y_1^{k_1}}\cdots\frac{\partial^{k_n}}{\partial y_n^{k_n}} f(y),$$
$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}\varphi(y)\,dy = \Big(\prod_{j=1}^{n}\int dy_j\Big)\varphi(y).$$

II. Пусть $K(x)$ достаточно гладкая финитная функция, заданная в E^n, носитель которой сосредоточен в кубе $\square(\alpha, \beta)$. Можно в дальнейшем считать, что

$$|D_x{}^s K(x)| \leqslant N \qquad (|s| = 0, 1, \ldots, m), \tag{3}$$

где m — достаточно большое число.

Предположим еще, что

$$\int\limits_{E^n} K(x)\,dx = 1. \tag{4}$$

Положим

$$G(x, y) = D_y{}^l \left[\frac{[y]^{l-I}}{(l-I)!} \int\limits_{-\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{y_n} K(x+t)\,dt \right], \tag{5}$$

где $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_i > 0$ — целые $(i = 1, \ldots, n)$.

Из (4) и (5) следует, что

$$\int\limits_{E^n} G(x; y)\,dy = \int\limits_{E^n} K(x+y)\,dy = 1 \tag{6}$$

Пусть $f(x)$ — локально суммируемая в области Ω функция, имеющая обобщенные по С. Л. Соболеву производные порядка l_i по x_i $(i = 1, \ldots$ $\ldots, n)$. Пусть $x \in \Omega$.

Положим

$$\Phi(x; v) = \int\limits_{E^n} f(x+y) \frac{1}{v^{|\varkappa|}} G\left(x; \frac{y}{v^{\varkappa}}\right) dy, \tag{7}$$

где

$$\frac{y}{v^{\varkappa}} = \left(\frac{y_1}{v^{\varkappa_1}}, \ldots, \frac{y_n}{v^{\varkappa_n}} \right), \qquad |\varkappa| = \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \ (\varkappa_i > 0), \qquad 0 < v \leqslant 1.$$

$\Phi(x; v)$ является дифференцируемой функцией v, $0 < v \leqslant 1$, и $\Phi(x, v) \underset{v \to 0}{\to} f(x)$ почти для всех $x \in \Omega$.

Действительно, из (7) и (6) следует, что

$$\Phi(x; v) = f(x) + J_v(x), \tag{8}$$

где

$$|J_v(x)| \leqslant \frac{1}{v^{|\varkappa|}} \int\limits_{E^n} |f(x+y) - f(x)| \left| G\left(x; \frac{y}{v^{\varkappa}}\right) \right| dy.$$

Из определения функции $G\left(x; \dfrac{y}{v^{\varkappa}}\right)$ непосредственно вытекает, что интегрирование в правой части последнего неравенства в действительности проводится по множеству тех y, для которых $K\left(x + \dfrac{y}{v^{\varkappa}}\right) \neq 0$. Это множество содержится в прямоугольнике $\square(x, \alpha, \beta, v^{\varkappa})$, характеризуемом неравенствами:

$$(\alpha - x_i)\,v^{\varkappa_i} \leqslant y_i \leqslant (\beta - x_i)\,v^{\varkappa} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Отметим, что лебегова мера этого прямоугольника равна $(\beta-\alpha)^n v^{|\varkappa|}$. Кроме того, из (5), (3) и (9) следует, что

$$\left|G\left(x;\ \frac{y}{v^{\varkappa}}\right)\right| \leqslant C(x).$$

Таким образом,

$$|J_v(x)| \leqslant \frac{C(x)}{v^{|\varkappa|}} \int\limits_{\square(x,\,\alpha,\,\beta,\,v^{\varkappa})} |f(x+y)-f(x)|\,dy.$$

Отсюда следует что $J_v(x) \underset{v\to 0}{\to} 0$ почти везде (см., например, ([3]), стр. 237), что, в силу (8), доказывает наше утверждение.

Вывод интегрального представления для функции $f(x)$ основан на следующем очевидном равенстве:

$$\Phi(x;\varepsilon) = \Phi(x;1) - \int\limits_{\varepsilon}^{1} \Phi_v'(x;v)\,dv,$$

справедливом при любом ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Отсюда, при $\varepsilon \to 0$, в силу только что доказанного, получим

$$f(x) = \Phi(x;1) - \int\limits_{0}^{1} \Phi_v'(x;v)\,dv. \tag{10}$$

Равенство (10) имеет место почти при всех $x \in \Omega$, а если $f(x)$ — непрерывная функция, то в каждой точке $x \in \Omega$.

Первый член в правой части (10) есть многочлен степени не выше $l_i - 1$ по x_i $(i = 1, \ldots, n)$. Действительно,

$$\Phi(x;1) = \int\limits_{E^n} f(x+y)\,G(x;y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{E^n} f(x+y) D_y^l \left[\frac{[y]^{l-I}}{(l-I)!} \int\limits_{-\infty}^{y_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{y_n} K(x+t)\,dt\right] dy =$$

$$= \int\limits_{E^n} f(y) D_y^l \left[\frac{[y-x]^{l-I}}{(l-I)!} \int\limits_{-\infty}^{y_1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{y_n} K(t)\,dt\right] dy = P_{l-I}(x;f). \tag{11}$$

Отметим, что коэффициенты многочлена P_{l-I} выражаются через интегралы от функции $f(y)$ по множеству, являющемуся носителем функции $K(y)$ и содержащемуся в $\square(\alpha,\beta)$.

Рассмотрим второй член в формуле (10). Имеем

$$\Phi_v'(x;v) = \int\limits_{E^n} f(x+y)\,D_y^l \left[\frac{[y]^{l-I}}{(l-I)!} \frac{d}{dv} \left(\prod_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\frac{y_j}{v^{\varkappa_j}}} dt_j\right) K(x+t)\right] dy =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\varkappa_i}{v^{1+\varkappa_i}} \int_{E^n} f(y) D_y^l \left[\frac{[y-x]^{l-I} (y_i - x_i)}{(l-I)!} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{-\infty}^{x_j + \frac{y_j - x_j}{v^{\varkappa_j}}} dt_j \right) \times \right.$$

$$\left. \times K \left(t_1, \ldots, x_i + \frac{y_i - x_i}{v^{\varkappa_i}}, \ldots, t_n \right) \right] dy.$$

Интегрируя по частям l_i раз по переменной y_i, учитывая при этом свойства ядра, получим

$$\Phi_v'(x; v) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\varkappa_i}{v^{1+|\varkappa|-l_i\varkappa_i}} \int_{E^n} D_{y_i}^{l_i} f(y) M_i\left(x; \frac{y-x}{v^{\varkappa}} \right) dy, \tag{12}$$

где

$$M_i\left(x; \frac{y}{v^{\varkappa}} \right) = D^{l^{(i)}}_{\frac{y}{v^{\varkappa}}} \left[\frac{\left[\frac{y}{v^{\varkappa}} \right]^{l-I} \frac{y_i}{v^{\varkappa_i}}}{(l-I)!} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \int_{-\infty}^{x_j + \frac{y_j}{v^{\varkappa_j}}} dt_j \right) K \left(t_1, \ldots, x_i + \frac{y_i}{v^{\varkappa_i}}, \ldots, t_n \right) \right],$$

$$l^{(i)} = (l_1, \ldots, l_{i-1}, 0, l_{i+1}, \ldots, l_n). \tag{13}$$

Из (10), (11) и (12) следует, что при почти всех $x \in \Omega$ справедливо следующее представление

$$f(x) = P_{l-I}(x; f) + \sum_{i=1}^{n} \varkappa_i \int_0^1 \frac{dv}{v^{1+|\varkappa|-l_i\varkappa_i}} \int_{E^n} D_{y_i}^{l_i} f(y) M_i\left(x; \frac{y-x}{v^{\varkappa}} \right) dy. \tag{14}$$

Заметим, что из свойств ядра $M_i(x; \frac{y-x}{v^{\varkappa}})$ следует, что интегрирование по y в (14) проводится в действительности по множеству, содержащемуся в $V(x; \varkappa, v)$ (см. (2)) и, следовательно, в правой части (14) используются значения $f(y)$ лишь для $y \in V(x, \varkappa)$ (см. (1)). Если точка $x \in \square(\alpha, \beta)$, то $V(x; \varkappa)$ совпадает с $\square(\alpha, \beta)$.

Полезно отметить также, что для ядра $M_i\left(x; \frac{y-x}{v^{\varkappa}}\right)$ справедлива оценка:

$$\left| M_i\left(x; \frac{y-x}{v^{\varkappa}} \right) \right| \leqslant C(N) (|\alpha| + |\beta| + |x_i|) \prod_{j=1}^{n} (|\alpha| + |\beta| + |x_j|)^{l_j - 1},$$

непосредственно вытекающая из (13) и свойств функции $K(y)$. Если $x \in \square(\alpha, \beta)$, то

$$\left| M_i\left(x; \frac{y-x}{v^{\varkappa}} \right) \right| \leqslant C(N) (\beta - \alpha)^{|l| - n + 1}.$$

Далее, подчеркнем, что оператор

$$\mathscr{P} f = P_{l-I}(x; f) = \int_{E^n} f(y) G(x; y-x) dy$$

обладает тем свойством, что переводит любой многочлен степени не выше $l_i - 1$ по x_i $(i = 1, \ldots, n)$ в самого себя. Это следует из формулы (14), так как при подстановке в нее такого многочлена все слагаемые, стоящие под знаком суммы, исчезают. Следовательно, $\mathcal{P}f$ есть проекционный оператор, и формула (14) дает интересующее нас разложение.

Отметим, что формулу (14) можно видоизменить таким образом, чтобы вместо производных $D^{l_i}_{y_i} f(y)$ в нее входили конечные разности функции $f(y)$ определенных порядков.

Поступило
12.IX.1968

ЛИТЕРАТУРА

[1] Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.

[2] Бесов О. В., Продолжение функций из L_p^l и W_p^l, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 89 (1967), 5—17.

[3] Данфорд Н. и Шварц Дж., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.