Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. G. Skosyrsky, Right alternative algebras with minimality condition for right ideals,
Algebra Logika, 1985, Volume 24, Number 2, 205–210

https://www.mathnet.ru/eng/al1901

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 16, 2025, 21:57:11

Алгебра и логика, 24, № 2 (1985), 205-210

УДК 519.48

ПРАВОАЛЬТЕРНАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ ПРАВЫХ ИДЕАЛОВ

В. Г. СКОСЫРСКИЙ

Одним из классических разделов структурной теории ассоциативных колец является теория алгебр с условием минимальности для правых идеалов. Для правоальтернативных алгебр эта проблема изучалась в [2, 5, 9, 12].

В настоящей статье доказана следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть A – правоальтернативная алгебра над кольцом скаляров Φ, $\frac{1}{2} \in \Phi$, удовлетворяющая условию минимальности для правых идеалов. Тогда квазирегулярный радикал $\mathcal{J}(A)$ алгебры A правонильпотентен, а фактор-алгебра $A/\mathcal{J}(A)$ – конечная прямая сумма матричных алгебр над телами и алгебр Кэли-Диксона.*

Заметим, что аналогичная теорема для правоальтернативных алгебр с условием минимальности для левых идеалов несправедлива. Это следует из существования простой правоальтернативной ниль-алгебры без собственных левых идеалов. Пример такой алгебры построил И. М. Михеев [4]. Кроме того, заменить в этой теореме правую нильпотентность радикала на нильпотентность также невозможно. Это видно, например, из примера Г. В. Дорофеева [см. 1].

© Институт математики СО АН СССР, 1985

Отметим также, что этот результат усиливает результаты [9, 12], где изучались правоальтернативные алгебры с условием минимальности для квадратичных идеалов. С другой стороны, так как для альтернативных и (-1, 1)-алгебр правая нильпотентность эквивалентна нильпотентности, то из этой теоремы следуют результаты К. А. Жевлакова [2] и Р. Э. Роомельди [5] для альтернативных и (-1, 1)-алгебр с тем же условием минимальности.

В дополнении к настоящей статье показано, как можно устранить неточность, допущенную автором при доказательстве теоремы в [10].

Приступим теперь к доказательству теоремы.

Пусть A – правоальтернативная алгебра с условием минимальности для правых идеалов, $\mathcal{M}(A)$ – ее радикал Михеева [3]. Известно [10, см. также дополнение], что фактор-алгебра $A/\mathcal{M}(A)$ альтернативна. Так как для альтернативных алгебр радикал Михеева совпадает с локально-нильпотентным радикалом, то, в силу результатов К. А. Жевлакова [2], фактор-алгебра $A/\mathcal{M}(A)$ – конечная прямая сумма ассоциативных матричных алгебр над телами и алгебр Кэли-Диксона. Поэтому $\mathcal{J}(A) = \mathcal{M}(A)$.

Очевидно, что если C – правый идеал алгебры A $(C \lhd_r A)$ и I – идеал алгебры $A^{(+)}$ $(I \lhd A^{(+)})$, то $CI \lhd_r A$.

Как обычно, через $R(A)$ обозначим алгебру правых умножений алгебры A и через a' – оператор правого умножения на элемент $a \in A$. Известно [9], что $(\mathcal{M}(A))' \subseteq \mathcal{L}(R(A))$, где $\mathcal{L}(R(A))$ – локально-нильпотентный радикал алгебры $R(A)$. Отсюда для любого ненулевого конечно-порожденного правого идеала I алгебры A имеем $I \cdot \mathcal{M}(A) \subsetneq I$.

Для $U, V \subseteq A$ по индукции положим: $\langle U, V\rangle_0 = U$ и $\langle U, V\rangle_{n+1} = \langle U, V\rangle \cdot V$.

В силу условий минимальности стабилизируется цепочка правых идеалов $\{\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}\rangle_n\}$, здесь и всюду ниже $\mathcal{M} = \mathcal{M}(A)$. Предположим, что $\langle \mathcal{M}, \mathcal{M}\rangle_{m-1} = \langle \mathcal{M}, \mathcal{M}\rangle_m \neq 0$. Ясно, что правый идеал $\mathcal{M}^{\langle m\rangle} = \langle \mathcal{M}, \mathcal{M}\rangle_m$ удовлетворяет условию $\mathcal{M}^{\langle m\rangle} \cdot \mathcal{M} = \mathcal{M}^{\langle m\rangle}$. Выберем тогда среди ненулевых правых идеалов $\tilde{C}$ алгебры A, для которых $\tilde{C}\mathcal{M} = \tilde{C}$, минимальный правый идеал C. Очевидно, что для любого правого идеала I алгебры A, который $I \subsetneq C$, найдется число $s: \langle I, \mathcal{M}\rangle_s = 0$. В частности, такое число найдется для любого конечно-порожденного правого идеала $I \subseteq C$.

Допустим теперь, что $C \cdot \mathcal{M}^{\langle m\rangle} \neq 0$. Тогда найдутся такие ко-

нечно-порожденный правый идеал $\mathfrak{J} \subseteq C$ и числа s, $k \geq 0$, для которых справедливо: $\langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s \cdot \mathfrak{M}^{\langle m \rangle}, \mathfrak{M} \rangle_k \neq 0$ и

$$\langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_{s+1} \cdot \mathfrak{M}^{\langle m \rangle}, \mathfrak{M} \rangle_k = \langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s \cdot \mathfrak{M}^{\langle m \rangle}, \mathfrak{M} \rangle_{k+1} = 0.$$

Так как $\mathfrak{M}^{\langle m \rangle} = \mathfrak{M}^{\langle m \rangle} \cdot \mathfrak{M}$, то можно подобрать и минимальный правый идеал I алгебры A, содержащийся в $\mathfrak{M}$, для которого $\langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s \times (\mathfrak{M}^{\langle m \rangle} \cdot I), \mathfrak{M} \rangle_k \neq 0$. Ясно, что I – однопорожденный правый идеал. Следовательно, $I\mathfrak{M} \subsetneq I$ и $I\mathfrak{M} \lhd_r A$. Отсюда, ввиду выбора I, имеем $\langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s \cdot (\mathfrak{M}^{\langle m \rangle} \cdot (I \cdot \mathfrak{M})), \mathfrak{M} \rangle_k = 0$. Теперь, последовательно применяя тождества $x'y'z' + z'y'x' - ((xy)z)' - ((zy)x)' = x'y' + y'x' - (xy)' - (yx)' = 0$, получаем

$$\langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s (\mathfrak{M}^{\langle m \rangle} \cdot I), \mathfrak{M} \rangle_k = \langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s ((\mathfrak{M}^{\langle m \rangle} \cdot \mathfrak{M}) \cdot I), \mathfrak{M} \rangle_k \subseteq$$

$$\subseteq \langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s \cdot [(\mathfrak{M}^{\langle m \rangle})' \mathfrak{M}' \cdot I' + I' \mathfrak{M}' (\mathfrak{M}^{\langle m \rangle})'], \mathfrak{M} \rangle_k +$$

$$+ \langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s \cdot ((I \cdot \mathfrak{M}) \cdot \mathfrak{M}^{\langle m \rangle}), \mathfrak{M} \rangle_k \subseteq \langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s \cdot [(I\mathfrak{M})' \cdot (\mathfrak{M}^{\langle m \rangle})' +$$

$$+ (\mathfrak{M}^{\langle m \rangle})' (I \cdot \mathfrak{M})'], \mathfrak{M} \rangle_k + \langle\langle \mathfrak{J}, \mathfrak{M} \rangle_s \cdot (\mathfrak{M}^{\langle m \rangle} \cdot (I\mathfrak{M})), \mathfrak{M} \rangle_k = 0.$$

Противоречие. Поэтому $C \cdot \mathfrak{M}^{\langle m \rangle} = 0$. Так как $(\mathfrak{M}^{(+)})^m \subseteq \mathfrak{M}^{\langle m \rangle}$ (см. [1]), где $(\mathfrak{M}^{(+)})^m$ – степень йордановой алгебры $\mathfrak{M}^{(+)}$, то $C \cdot [(\mathfrak{M}^{(+)})^m] = 0$.

Пусть $u \in \mathfrak{M}$ такой, что $Cu \neq 0$ и $\mathfrak{J}$ – идеал алгебры $A^{(+)}$, порожденный элементом u. Таким образом, $C\mathfrak{J} \neq 0$, $C\mathfrak{J} \lhd_r A$ и $C\mathfrak{J} \subseteq C$. Из тождества $x'y' + y'x' - 2(x \circ y)' = 0$ для любого числа k несложно вывести включение $C\mathfrak{J} = \langle C, \mathfrak{M} \rangle_k \cdot \mathfrak{J} \subseteq C \cdot [(\mathfrak{M}^{(+)})^{k+1}] + C\mathfrak{J}'\mathfrak{M}'$. Значит, $C\mathfrak{J} = \langle C, \mathfrak{M} \rangle_{m-1} \cdot \mathfrak{J} \subseteq C\mathfrak{J}'\mathfrak{M}' \subseteq C\mathfrak{J}$. Отсюда, в силу выбора C, получим $C\mathfrak{J} = C$.

В [6] доказано, что конечно-порожденный разрешимый идеал специальной йордановой алгебры порождает во всякой ее ассоциативной обертывающей

алгебре нильпотентный идеал. Таким образом, для некоторого числа s множество $(\mathcal{Y}')^s$ содержится в идеале алгебры $R(A)$, порожденном $(\mathcal{Y}^m)$ (здесь степень понимается относительно умножения в алгебре $A^{(+)}$). Следовательно, для этого числа s имеем $C = C(\mathcal{Y}')^s = 0$. Противоречие. Поэтому $\mathcal{M}^{\langle m\rangle} = (\mathcal{M}(A))^{\langle m\rangle} = 0$.

Теорема доказана.

Дополнение

Как сообщил автору Р. Э. Роомельди, в [10] доказательство теоремы имеет некоторый пробел. В этом дополнении показано, как его можно устранить.

Пусть A – правоальтернативная алгебра, $alt(A)$ – ее идеал, порожденный всеми ее альтернаторами. Через L – обозначим Φ-модуль, порожденный элементами вида (a,a,b) и $([a,b],a,b)$, где $a,b\in A$. Известно [11], что L – левый идеал, и $alt(A) = L + LA$. Очевидно, что $L+LA = L+L\odot A = (L)_{A^{(+)}}$. В [10, лемма 6] доказано, что $(L)_{A^{(+)}}\odot T(A^{(+)}) \subseteq S(A^{(+)})$ (здесь, как и в [10], $S(A^{(+)})$ – радикал Слинько–Маккриммона алгебры $A^{(+)}$).

А. Тэди [13] доказал, что всякий идеал I алгебры $A^{(+)}(I \lhd A^{(+)})$ такой, что алгебра $A^{(+)}/I$ – невырождена, является идеалом и алгебры A. В частности, $S(A^{(+)}) \lhd A$. Как известно [7], фактор-алгебра $A^{(+)}/S(A^{(+)})$ аппроксимируется первичными невырожденными алгебрами вида $A^{(+)}/I_\alpha$, где $I_\alpha \lhd A^{(+)}$. Ввиду выше отмеченного, имеем $I_\alpha \lhd A$ и, как легко видеть, A/I_α – первичная алгебра. Нам достаточно доказать, что $\varphi_\alpha(L) = 0$ во всякой такой алгебре $A_\alpha = A/I_\alpha$, где φ_α – естественный гомоморфизм алгебры A на A_α.

Допустим $L_\alpha = \varphi_\alpha(L) \neq 0$. Тогда из первичности $A_\alpha^{(+)}$ имеем $T(A_\alpha^{(+)}) = 0$ и из описания таких алгебр [8] $A_\alpha^{(+)}$ – либо ассоциативна, либо ее центр $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A_\alpha^{(+)}) \neq 0$ и $\mathcal{Z}^{-1}A_\alpha^{(+)} = B(f) = F\cdot 1 + V$ – алгебра невырожденной билинейной формы f на пространстве V над полем $F = \mathcal{Z}^{-1}\mathcal{Z}$, $\dim_F V > 1$. Так как L_α как Φ-модуль порожден нильпотентными элементами (а именно, элементами вида (a,a,b) и

$([a,b],a,b))$, то случай, когда $A_\alpha^{(+)}$ – ассоциативна, невозможен. Ясно, что L_α – квадратинный идеал $A_\alpha^{(+)}(L_\alpha \triangleleft_{кв} A_\alpha^{(+)})$, следовательно, и $\mathcal{L}_\alpha = F\cdot L_\alpha \triangleleft_{кв} B(f)$. Так как нильпотентные элементы алгебры $B(f)$ принадлежат V, то $\mathcal{L}_\alpha \subseteq V$. Из $L_\alpha + L_\alpha \circ A_\alpha \triangleleft A_\alpha$ получим $\mathcal{L}_\alpha + \mathcal{L}_\alpha \circ B(f) = B(f)$. Если $\mathcal{L}_\alpha \circ \mathcal{L}_\alpha = 0$, то $\mathcal{L}_\alpha \triangleleft B(f)$ и, в силу простоты алгебры $B(f)$, $\mathcal{L}_\alpha = 0$. Значит, $\mathcal{L}_\alpha \circ \mathcal{L}_\alpha \neq 0$. Так как $V \circ V \subseteq F\cdot 1$, то $V = (\mathcal{L}_\alpha \circ \mathcal{L}_\alpha)\circ V \subseteq (V\circ \mathcal{L}_\alpha)\circ \mathcal{L}_\alpha +$
$+ \{\mathcal{L}_\alpha, V, \mathcal{L}_\kappa\} \subseteq \mathcal{L}_\alpha$, т.е. $\mathcal{L}_\alpha = V$.

В [11, лемма 12] доказано, что $W_L = \{\ell \in L \mid \ell A \subseteq L\} \triangleleft A$ такой, что $(L,L,A), (A,L,L) \subseteq W_L$. Так как $\varphi_\alpha(W_L) \subseteq \mathcal{L}_\alpha$, то имеем $(L_\alpha, L_\alpha, A_\alpha) = (A_\alpha, L_\alpha, L_\alpha) = 0$. Отсюда (см. тождество (4) в [11]) $[L_\alpha, L_\alpha] \subseteq N_\rho(A_\alpha)$. Так как алгебра A_α – неассоциативна, и алгебра $A_\alpha^{(+)}$ – без локально-нильпотентных идеалов, то по [11, теорема 1] имеем $N_\rho(A_\alpha) = C(A_\alpha)$. В частности, $[[L_\alpha, L_\alpha], A_\alpha] = 0$. Отсюда и из тождества (1) в [1, с. 69] $(L_\alpha, A_\alpha, L_\alpha)^+ = 0$. Значит, алгебра $B(f)$ ассоциативна. Противоречие. Теорема из [10] доказана.

Автор выражает Р. Э. Роомельди свою глубокую благодарность за сообщение о допущенной в [10] неточности.

Литература

1. К. А. ЖЕВЛАКОВ, А. М. СЛИНЬКО, И. П. ШЕСТАКОВ, А. И. ШИРШОВ, Кольца, близкие к ассоциативным, М., Наука, 1978.

2. К. А. ЖЕВЛАКОВ, Альтернативные кольца, Алгебра и логика, № 3 (1966), 11–36; № 4 (1967), 113–117.

3. И. М. МИХЕЕВ, Локально правонильпотентный радикал в классе правоальтернативных колец, Алгебра и логика, 11, № 2 (1972), 174–185.

4. И. М. МИХЕЕВ, Простые правоальтернативные кольца, Алгебра и логика, 16, № 6 (1977), 682–711.

5. Р. Э. РООМЕЛЬДИ, Нильпотентность идеалов в (–1, 1)-кольцах с условием минимальности, Алгебра и логика, 12, № 3 (1973), 333–348.

6. Е. И. ЗЕЛЬМАНОВ, В. Г. СКОСЫРСКИЙ, Специальные йордановы алгебры ниль ограниченного индекса, Алгебра и логика, 22, № 6 (1983), 626–636.

7. Е. И. ЗЕЛЬМАНОВ, Характеризация радикала Маккриммона, Сиб. матем. ж., 25, № 5 (1984), 190-192.

8. Е. И. ЗЕЛЬМАНОВ, О первичных йордановых алгебрах. II, Сиб. матем. ж., 24, № 1 (1983), 89-105.

9. В. Г. СКОСЫРСКИЙ, О нильпотентности в йордановых и правоальтернативных алгебрах, Алгебра и логика, 18, № 1 (1979), 73-85.

10. В. Г. СКОСЫРСКИЙ, Правоальтернативные алгебры, Алгебра и логика, 23, № 2 (1984), 185-192.

11. A.THEDY, Right alternative rings, J. Algebra 37, (1975), 1-43.

12. A.THEDY, Right alternative rings with minimal condition, Math. Z., 155, N 3 (1977), 277-286.

13. A.THEDY, Radicals of right alternative and Jordan rings, Comm. Algebra, 12, 1984, 857-887.

Поступило 10 октября 1984 г.