Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. I. Amstislavskii, Computability with functionals,
Algebra Logika, 1973, Volume 12, Number 5, 497–511

https://www.mathnet.ru/eng/al1396

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 7, 2025, 12:42:46

Алгебра и логика, 12, №5 (1973), 497-511.

УДК 51.01:518.5

О ВЫЧИСЛИМОСТИ С ФУНКЦИОНАЛАМИ

В.И.АМСТИСЛАВСКИЙ

N будет обозначать множество всех натуральных чисел 0,1,2,...; N^N – множество всех тотальных (то есть всюду определенных) функций $f: N \to N$; $\mathcal{F}$ – множество всех (возможно, частичных) функций типа $N \to N$ $(N^N \subset \mathcal{F})$ *). Функционалами мы здесь будем называть функции типа $N^k \times \mathcal{F}^l \to N$, где $k, l \in N$ и $l > 0$. Функционал $F(x_1, \ldots, x_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ называется совместным, если для любых $\varphi_1, \ldots, \varphi_l, \psi_1, \ldots, \psi_l \in \mathcal{F}$ таких, что $\varphi_1 \subseteq \psi_1 \& \ldots \& \varphi_l \subseteq \psi_l$, и любых $x_1, \ldots, x_k, y \in N$

$$F(x_1, \ldots, x_k, \varphi_1, \ldots, \varphi_l) \simeq y \Longrightarrow F(x_1, \ldots, x_k, \psi_1, \ldots, \psi_l) \simeq y .$$

Множество всех совместных функционалов типа $\mathcal{F} \to N$ обозначаем $\mathfrak{F}$.

Мы будем рассматривать два вида вычислений, использующих функционалы: 1) вычисления на машинах Тьюринга с оракулами из $\mathcal{F} \cup \mathfrak{F}$, и 2) вычисления, рекурсивные относительно функций и функционалов из $\mathcal{F} \cup \mathfrak{F}$ в смысле Акцеля [1] . Мы установим, что оба вида вычислений приводят к одному и тому же классу натурально-числовых функций и совместных функционалов, вычислимых относительно данного конечного набора элементов $\mathcal{F} \cup \mathfrak{F}$. Для некоторых функций и функционалов этого класса а именно, для функций типа $N^k \times (N^N)^l \to N$, $k, l \geqslant 0$, вычислимых относительно тотальных функций $g: N \to N$ и функционалов $G: N^N \to N$, – эквивалентность тьюринговой и рекурсивной вычислимости была установлена в [2] и [3] **). В отличие от методов [2] и [3] , наш метод основан на сведении вычислимости относительно набора функций и функционалов из

*) Функция f называется функцией типа $X \to Y$, где X и Y – какие-либо множества, если область определения f включена в X , и все значения f принадлежат Y . Как обычно, запись $f: X \to Y$ означает, что f является функцией типа $X \to Y$, определенной всюду на X .

**) Результаты [2] и [3] установлены для функционалов любых конечных типов, но функционалы типов $t > 2$ мы здесь не рассматриваем.

$\mathcal{F} \cup \mathfrak{F}$ к вычислимости относительно соответствующего набора лишь функций из $\mathcal{F}$. В случае тьюринговой вычислимости такое сведéние производится по образцу, данному Белякиным в [4, стр. 15]; в случае рекурсивной (по Акцелю) вычислимости действуем аналогично. При этом функционал, входящий в данный набор элементов $\mathcal{F} \cup \mathfrak{F}$, при различных определениях вычислимости заменяется различными функциями $(\in \mathcal{F})$, и далее наша задача будет состоять в установлении связи между этими функциями.

Положительной чертой этого метода является его "симметричность": чтобы установить совпадение двух классов по-разному вычислимых функций, надо установить два включения; кроме некоторого начального этапа, доказательство второго включения у нас аналогично доказательству первого, что, конечно, упрощает все доказательство в целом.

Предварительно нам надо будет сравнить различные определения вычислимости относительно набора $\overline{\psi}$ произвольных функций из $\mathcal{F}$. Кроме вычислимости по Тьюрингу и рекурсивности по Акцелю, мы попутно рассмотрим и иные виды вычислимости относительно $\overline{\psi}$ (относительную рекурсивность по [5] и относительную μ-рекурсивность). Если набор $\overline{\psi}$ состоит лишь из тотальных функций, то, как известно, вóе эти определения эквивалентны. Мы выясним, что в случае, когда $\overline{\psi}$ содержит частичные функции, некоторые из этих определений продолжают, а другие - перестают быть эквивалентными (расхождение различных версий вычислимости относительно частичных функций впервые иным пýтем было обнаружено Платеком [6]).

§ 1. Некоторые сведения о машинах с частичными оракулами и об индуктивно определенных множествах

1. Мы предполагаем знакомство читателя с теорией машин Тьюринга, излагаемой в [5, § 67] и [2, § 1], и будем без объяснений использовать применяемую там терминологию. Укажем отличия рассматриваемых здесь машин от описанных там. У Клини оракулами являются тотальные функции $g : N \to N$ и функционалы $G : N^N \to N$. Мы будем рассматривать машины Тьюринга с набором оракулов $\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_m$, где $m \geq 0$ и для всех $1 \leq i \leq m$ $\sigma_i \in \mathcal{F} \cup \mathfrak{F}$. С частичной функцией $f \in \mathcal{F}$ в качестве оракула машина Тьюринга работает так же, как с тотальным оракулом g, с единственным дополнительным условием: если на такте t машина об-

ращается к оракулу f с числом $x \notin Dom(f)$ *), то на $(t+1)$ -м и последующих тактах ситуация на ленте машины считается неопределенной, и результат этого вычисления также считается неопределенным [7]. Гёделевский номер таблицы команд машины Тьюринга будем называть кодом этой машины и иногда будем отождествлять машины и их коды. Согласно [2], с оракулом $G: N^N \to N$ машина Тьюринга работает следующим образом. Допустим, на такте t машина $\mathfrak{M}$ обращается к оракулу G с некоторым $x \in N$. Если

(A) x является кодом некоторой машины $\mathfrak{M}_x$ и 1-местная натурально-числовая функция - обозначим её через φ_x, - вычислимая машиной $\mathfrak{M}_x$ с тем же, что и у $\mathfrak{M}$, набором оракулов, является тотальной,

то на ленте машины $\mathfrak{M}$ записывается число $G(\varphi_x)$, и на $(t+1)$ -м такте машина $\mathfrak{M}$ воспринимает пару чисел $x, G(\varphi_x)$. Если же условие (A) не выполняется, то ситуация на $(t+1)$ -м и последующих тактах, а также результат этого вычисления считаются неопределенными.

Условимся, что с функционалом F типа $\mathcal{F} \to N$ в качестве оракула машина Тьюринга работает так же, как с оракулом G, с единственным отличием: в (A) условие тотальности функции φ_x заменяется условием: $\varphi_x \in Dom(F)$. (Таким образом, с оракулами F, у которых $Dom(F) = N^N$, машина работает точно так же, как в [2]).

Внесём также некоторые технически удобные изменения в обозначения выполняемых машинами неэлементарных актов: будем считать, что табличная запись, при которой происходит обращение к оракулу $\mathcal{O}_i$ набора $\mathcal{O}$, имеет вид $\langle i, q_d \rangle$, где $1 \leq i \leq m$ (m -число оракулов), и q_d - состояние, в которое машина переходит после получения ответа оракула. Таким образом, в отличие от [2], в табличных записях неэлементарных актов тип оракула явно не указывается. Зато машина с одной и той же таблицей теперь может работать как с данным набором оракулов $\mathcal{O}$, так и с набором $\mathcal{O}'$, получаемым заменой одного из оракулов в $\mathcal{O}$ оракулом иного типа. (Это обстоятельство используется в доказательстве леммы 4). Очевидно, при любом наборе $\mathcal{O}$ это изменение вида табличных записей не меняет объема класса функций, вычислимых машинами с ораку-

*) $Dom(f)$ обозначает область определения функции f.

лами $\mathcal{O}$.

Для любого $m \geq 0$ пусть Cd_m обозначает множество кодов всех машин, у которых во всех табличных записях вида $\langle i, q_d \rangle$ $1 \leq i \leq m$ ($0 \notin Cd_m$ и $Cd_m \subseteq Cd_{m+1}$). Подобно [2, § 2.2], легко проверить, что предикат $\lambda z m\, z \in Cd_m$ примитивно-рекурсивен. Для любого $z \in Cd_m$ через $\tau_z^{\mathcal{O}}$ будем обозначать функцию типа $N^k \longrightarrow N$, $k \geq 0$, вычисляемую машиной z с набором оракулов $\mathcal{O}$; для $z \notin Cd_m$ считаем $\tau_z^{\mathcal{O}}$ нигде не определенной функцией. Наборы $x_1, \ldots, x_k$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ ($k, l \geq 0$) будем обозначать через $\bar{x}$ и $\bar{\varphi}$ соответственно. Функция $f(\bar{x})$ или функционал $F(\bar{x}, \bar{\varphi})$ называются вычислимыми по Тьюрингу относительно $\mathcal{O}$, если $f(\bar{x}) \simeq \tau_z^{\mathcal{O}}(\bar{x})$ или $F(\bar{x}, \bar{\varphi}) \simeq \tau_z^{\mathcal{O}, \bar{\varphi}}(\bar{x})$ при некотором $z \in N$. Универсальную функцию $\lambda z \bar{x} .\ \tau_z^{\mathcal{O}}(\bar{x})$ будем обозначать через $\tau^{\mathcal{O}}$, т.е. $\tau^{\mathcal{O}}(z, \bar{x}) \simeq \tau_z^{\mathcal{O}}(\bar{x})$. При любом $k \geq 0$ соответствующую универсальной $\tau^{\mathcal{O}}$ нумерацию совокупности всех k -местных натурально-числовых функций, вычислимых по Тьюрингу относительно $\mathcal{O}$, будем обозначать также через $\tau^{\mathcal{O}}$. Пусть для $z \notin Cd_m$ $T_m(z, n) = 0$, а для $z \in Cd_m$ $T_m(z, n)$ есть код машины, которая для каждого набора значений $\bar{x}$ сначала записывает на ленте набор $n, \bar{x}$ и затем работает с этим набором (и с теми же оракулами, что и у z) так же, как работает с $n, \bar{x}$ машина z . Очевидно, $T_m(z, n)$ является общерекурсивной функцией (о.р.ф.) такой, что

$$\tau^{\mathcal{O}}(T_m(z, n), \bar{x}) \simeq \tau^{\mathcal{O}}(z, n, \bar{x}). \tag{1}$$

С помощью (1) легко проверить, что нумерации $\tau^{\mathcal{O}}$ являются полными (в смысле [8]).

2. Соответственно трансфинитной природе понятия вычислимости с функционалами, нам придется часто оперировать с индуктивно определенными множествами. Пусть $\mathcal{P}X$ - множество всех подмножеств произвольного множества X ; для любой функции Γ типа $\mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}X$, $\xi \subseteq X$, и порядкового числа ν полагаем:

$$\Lambda_0(\xi, \Gamma) = \xi, \quad \Lambda_\nu(\xi, \Gamma) = \bigcup_{\nu' < \nu} \Gamma(\Lambda_{\nu'}(\xi, \Gamma)) \text{ при } \nu > 0. \tag{2}$$

Если все члены последовательности $\{\Lambda_\nu(\xi, \Gamma)\}$ определены и, начиная с некоторого значения $\nu = \nu_0$, равны между собой, то $\Lambda_{\nu_0}(\xi, \Gamma)$ обозначаем через $St_\Gamma(\xi)$.

Функции отождествляются с их графиками; в частности, ϕ обозначает не только пустое множество, но и нигде не определенную функцию. Ес-

ли f – функция типа $X \to Y$ и g – типа $Y \to Z$, то функция $\lambda z.\ f(g(z))$ обозначается через $g \circ f$.

ЛЕММА 1. Пусть X – произвольное множество, Φ – множество всех функций типа $X \to X$ и $\Gamma_1, \Gamma_2 : \Phi \to \Phi$. Если функция $\varphi \in \Phi$ такова, что множество

$$\Delta = \{ f \in \Phi : \Gamma_1(\varphi \circ f) = \varphi \circ \Gamma_2(f) \}$$

непусто, и функция $\psi \in \Phi$ такова, что $(\forall \nu)[\Lambda_\nu(\psi, \Gamma_2) \in \Delta]$, то для любого ν

$$\Lambda_\nu(\varphi \circ \psi, \Gamma_1) = \varphi \circ \Lambda_\nu(\psi, \Gamma_2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится трансфинитной индукцией по L.

§ 2. Вычислимость относительно частичных функций

Всюду далее $\overline{\psi}$ будет обозначать набор функций $\psi_1, \ldots, \psi_n$, где $n \geq 0$, и для $i = 1, \ldots, n$ $\psi_i \in \mathcal{F}$. Если функция φ (типа $N^k \to N$, $k \geq 0$) может быть определена, исходя из функций $\overline{\psi}$ и примитивно-рекурсивных функций (п.р.ф.), конечной последовательностью операций подстановки, примитивной рекурсии и минимизации, то φ называется частично μ-рекурсивной относительно $\overline{\psi}$. В [5, теор. XX1X] устанавливается частичная μ-рекурсивность функций, вычислимых машинами Тьюринга с тотальными типа 1 оракулами. С незначительными изменениями доказательство этой теоремы проходит и для машин с произвольными принадлежащими $\mathcal{F}$ оракулами, и, таким образом, получается

ЛЕММА 2. Для любых $n, k \geq 0$ и любых функций $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{F}$ функция $\tau^{\overline{\psi}}(z, x_1, \ldots, x_k)$ частично μ-рекурсивна относительно $\overline{\psi}\ (= \psi_1, \ldots, \psi_n)$.

Введем понятие рекурсивности относительно $\overline{\psi}$ в смысле [1]. Всюду далее $\lambda ab.\ (a, b)$ будет обозначать п.р.ф., взаимно-однозначно отображающую N^2 на N; a' и a'' – п.р.ф., реализующие обратное отображение: $(a, b)' = a$, $(a, b)'' = b$. Для любого $k \geq 0$ полагаем: $(x_1, \ldots, x_k) = [0$ при $k = 0$, x_1 при $k = 1$, $(x_1, (x_2, \ldots, x_k))$ при $k \geq 2]$. Пусть $\lambda ax.\ [a](x)$ – о.р.ф., универсальная для всех 1-местных п.р.ф. и та-

кая, что $(a,x)=[p(a)](x)$, где p – некоторая п.р.ф.*). Через $\alpha^{\bar\psi}(a,x)$ обозначаем наименьшую из функций q (типа $N^2 \longrightarrow N$), удовлетворяющих следующим условиям:

$$q((0,a),x)=[a](x),$$
$$q((1,a,b),x)\simeq q(q(a,x),q(b,x)), \tag{3}$$
$$q((i+1,0),x)\simeq \psi_i(x) \quad \text{для всех } i=1,\dots,n.$$

Скажем, что функция φ частично рекурсивна по Акцелю относительно $\bar\psi$, если $\varphi(x_1,\dots,x_k)\simeq \alpha^{\bar\psi}(z,(x_1,\dots,x_k))$ при некотором $z\in N$.

Функция $\alpha^{\bar\psi}$ может быть также определена индуктивно следующим образом. Пусть для любого порядкового числа ν

$$\xi_\nu^{\bar\psi}=\Lambda_\nu(\xi^{\bar\psi},\Gamma),$$

где

$$\xi^{\bar\psi}=\{((0,a),x,y):[a](x)=y\}\cup$$
$$\cup\{((i+1,0),x,y):1\le i\le n \,\&\, y\simeq\psi_i(x)\},$$

и для любого $\xi\subseteq N$

$$\Gamma(\xi)=\{((1,a,b),x,y):(\exists y_1,y_2)[(a,x,y_1),(b,x,y_2),(y_1,y_2,y)\in\xi]\}\cup\xi^{\bar\psi}.$$

Тогда для любого ν $\xi_\nu^{\bar\psi}\subseteq\xi_{\nu+1}^{\bar\psi}$, $\{\langle a,x,y\rangle:(a,x,y)\in\xi_\nu^{\bar\psi}\}$ является графиком некоторой 2-местной функции (от a и x), и $\xi_{\omega+1}^{\bar\psi}=\xi_\omega^{\bar\psi}$.

Отсюда следует, что

$$\alpha^{\bar\psi}(a,x)\simeq y \iff (a,x,y)\in\xi_\omega^{\bar\psi}\iff$$
$$\iff(\exists i<\omega)[(a,x,y)\in\xi_i^{\bar\psi}]. \tag{4}$$

Соответственно этому полагаем:

$$|a,x|^{\bar\psi}\simeq(\mu i<\omega)(\exists y)[(a,x,y)\in\xi_i^{\bar\psi}];$$

таким образом, область определения $|a,x|^{\bar\psi}$ совпадает с $Dom(\alpha^{\bar\psi})$.

Через $\{e\}$ всегда будем обозначать частично рекурсивную функцию (ч.р.ф.) с гёделевским номером e [5].

---

*) Такая универсальная может быть определена методом [8, § 7.1]: $[a](x)=U(a',(a'',x))$, где U – произвольная о.р.ф., универсальная для 1-местных п.р.ф.

ЛЕММА 3. Для любых $n, k \geq 0$ и любых функций $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{F}$ функция $\alpha^{\overline{\psi}}(z, x_1, \ldots, x_k)$ вычислима по Тьюрингу относительно $\overline{\psi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно, очевидно, показать, что $\alpha^{\overline{\psi}}(z, x)$ вычислима по Тьюрингу относительно $\overline{\psi}$. Мы сделаем это с помощью леммы о рекурсии [9, § 16.4]. Введем обозначения: $(x)_1 = (x'')'$, $(x)_2 = (x'')''$. Нам нужна машина с набором оракулов $\overline{\psi}$, такая, что если в начальной ситуации на ленте представлена тройка чисел e, z и x, то далее машина работает следующим образом.

1. Проверяет выполнение дизъюнкции:

$$z' = 0 \vee [z = (i+1, 0) \ \& \ 1 \leq i \leq n] \vee z' = 1.$$

2. Если $z' = 0$, машина вычисляет z'', затем $-[z'']\,(x)$, полученное число выдает в качестве результата и останавливается.

3. Если $z = (i+1, 0)$ и $1 \leq i \leq n$, то машина обращается с числом x к i-ому оракулу ψ_i; если $x \in Dom(\psi_i)$, получает число $\psi_i(x)$, выдает его в качестве результата и останавливается; если $x \notin Dom(\psi_i)$, то дальнейшая работа и результат вычислений не определены.

4. Если $z' = 1$, машина вычисляет $(z)_1$, затем начинает вычислять $\{e\}((z)_1, x)$ и, если $\{e\}((z)_1, x) \simeq c_0$, находит это число c_0 и проверяет условие: $c_0 \in Cd_n$: в случае его выполнения машина, моделируя действия машины (с кодом) c_0, вычисляет – если удастся – число $c_1 \simeq \tau^{\overline{\psi}}(c_0, 0)$. Далее аналогично машина вычисляет числа $(z)_2$, $c_2 \simeq \{e\}((z)_2, x)$ и $c_3 \simeq \tau^{\overline{\psi}}(c_2, 0)$. Затем машина вычисляет число $c_4 \simeq \{e\}(c_1, c_3)$, проверяет условие: $c_4 \in Cd_n$; в случае его выполнения вычисляет $c_5 \simeq \tau^{\overline{\psi}}(c_4, 0)$, выдает c_5 в качестве результата и останавливается.

5. Если машина проверяет какое-либо условие и в предшествующих пп. 1–4 не указано, что она должна делать, если это условие не выполняется, то машина в таких случаях должна совершать тождественное действие (и работать бесконечно).

Пусть m_0 – код машины, выполняющей указанные в пп. 1–5 действия. С помощью (1) найдем (о.р.ф.) $h(e, z, x)$, такую что

$$\tau^{\overline{\psi}}(h(e, z, x), 0) \simeq \tau^{\overline{\psi}}(m_0, e, z, x). \tag{5}$$

Теперь индукцией по $i = |z,x|^{\bar{\psi}}$ легко проверить, что если e, z и x таковы, что

$$(\forall z_1, x_1)[\,|z_1,x_1|^{\bar{\psi}} < |z,x|^{\bar{\psi}} \Longrightarrow \tau^{\bar{\psi}}(\{e\}(z_1,x_1),0) = \alpha^{\bar{\psi}}(z_1,x_1)],$$

то

$$\tau^{\bar{\psi}}(h(e,z,x),0) = \alpha^{\bar{\psi}}(z,x).$$

Пусть число e_0 таково, что

$$h(e_0,z,x) \simeq \{e_0\}(z,x) \tag{6}$$

[5 , теорема XXУП]. Тогда по лемме о рекурсии для всех $\langle z,x\rangle \in Dom(\alpha^{\bar{\psi}})$

$$\tau^{\bar{\psi}}(\{e_0\}(z,x),0) = \alpha^{\bar{\psi}}(z,x) \tag{7}$$

Это вместе с (5) и (1) означает, что

$$\alpha^{\bar{\psi}} \subseteq \tau^{\bar{\psi}}_{m_1}, \tag{8}$$

где $m_1 = T_n(m_0, e_0)$. Теперь докажем, что $Dom(\alpha^{\bar{\psi}}) = Dom(\tau^{\bar{\psi}}_{m_1})$. Обозначим через $\mathcal{L}(z,x)$ длину вычисления (т.е. число тактов) значения $\tau^{\bar{\psi}}_{m_1}(z,x)$[на машине m_1 с оракулами $\bar{\psi}$; таким образом, $Dom(\mathcal{L}) = Dom(\tau^{\bar{\psi}}_{m_1})$], и допустим, что множество

$$A = Dom(\tau^{\bar{\psi}}_{m_1}) \setminus Dom(\alpha^{\bar{\psi}}) \neq \phi.$$

Тогда существует пара $\langle z_0, x_0\rangle \in A$ такая, что $(\forall \langle z,x\rangle \in A)[\mathcal{L}(z_0,x_0) \leq \mathcal{L}(z,x)]$. Очевидно, $|z_0,x_0|^{\bar{\psi}} \neq 0$, следовательно, $z_0 = (1, a_0, b_0)$. Заметим, что $\tau^{\bar{\psi}}_{m_1}(z,x) \simeq \tau^{\bar{\psi}}_{m_0}(e_0,z,x)$ и, согласно (5) и (6),

$$\tau^{\bar{\psi}}(\{e_0\}(z,x),0) \simeq \tau^{\bar{\psi}}_{m_1}(z,x).$$

Значит, машина m_1 с оракулами $\bar{\psi}$ и парой чисел z, x , представленных на ленте в начальной ситуации, работает так же, как машина m_0 с теми же оракулами и тройкой чисел e_0 , z , x в начальной ситуации, причём в тех случаях, когда машине m_0 в процессе ее работы приходится вычислять значения $\tau^{\bar{\psi}}(\{e_0\}(u,v), 0)$ (при различных $u, v \in N$), машина m_1 вычисляет значения $\tau^{\bar{\psi}}_{m_1}(u,v)$ (при тех же u и v). Соответственно этому замечанию и пп. 1–5,

$$\tau^{\bar{\psi}}_{m_1}(z_0,x_0) = \tau^{\bar{\psi}}_{m_1}(\tau^{\bar{\psi}}_{m_1}(a_0,x_0), \tau^{\bar{\psi}}_{m_1}(b_0,x_0)), \tag{9}$$

причем значения $y_0 = \tau_{m_1}^{\bar\psi}(a_0, x_0)$, $y_1 = \tau_{m_1}^{\bar\psi}(b_0, x_0)$ и $y_2 = \tau_{m_1}^{\bar\psi}(y_0, y_1)$ машина m_1 вычисляет в ходе вычисления $\tau_{m_1}^{\bar\psi}(z_0, x_0)$ и, следовательно, $\mathcal{L}(a_0, x_0)$, $\mathcal{L}(b_0, x_0)$ и $\mathcal{L}(y_0, y_1)$ меньше $\mathcal{L}(z_0, x_0)$. Но тогда $\langle a_0, x_0\rangle$, $\langle b_0, x_0\rangle$ и $\langle y_0, y_1\rangle$ принадлежат $Dom(\alpha^{\bar\psi})$ и, согласно (8),

$$\tau_{m_1}^{\bar\psi}(\tau_{m_1}^{\bar\psi}(a_0, x_0), \tau_{m_1}^{\bar\psi}(b_0, x_0)) =$$
$$= \alpha^{\bar\psi}(\alpha^{\bar\psi}(a_0, x_0), \alpha^{\bar\psi}(b_0, x_0)) = \alpha^{\bar\psi}(z_0, x_0).$$

Отсюда и из (9) следует, что $\langle z_0, x_0\rangle \in Dom(\alpha^{\bar\psi})$ – противоречие с определением $\langle z_0, x_0\rangle$. Значит, $Dom(\alpha^{\bar\psi}) = Dom(\tau_{m_1}^{\bar\psi})$ и, ввиду (8), $\alpha^{\bar\psi} = \tau_{m_1}^{\bar\psi}$. Что и требовалось доказать.

Классы всех натурально-числовых функций, а) частично рекурсивных относительно $\bar\psi$ (в смысле [5]), б) вычислимых по Тьюрингу относительно $\bar\psi$, в) частично рекурсивных по Акцелю относительно $\bar\psi$ и г) частично μ-рекурсивных относительно $\bar\psi$, обозначим через $\mathcal{R}^{\bar\psi}$, $\mathcal{T}^{\bar\psi}$, $\mathcal{A}^{\bar\psi}$ и $\mathcal{M}^{\bar\psi}$, соответственно.

ТЕОРЕМА 1. а) Для любого $n \geq 0$ и любых $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{F}$

$$\mathcal{A}^{\bar\psi} = \mathcal{M}^{\bar\psi} = \mathcal{T}^{\bar\psi} \subseteq \mathcal{R}^{\bar\psi},$$

и для любого $k \geq 0$ нумерации $\alpha^{\bar\psi}$ и $\tau^{\bar\psi}$ совокупностей всех k-местных функций из $\mathcal{A}^{\bar\psi}$ и, соответственно, из $\mathcal{T}^{\bar\psi}$ рекурсивно изоморфны.

б) Существуют частичная функция $\psi \in \mathcal{F}$ и тотальная $f \in \mathcal{F}$ такие, что $f \in \mathcal{R}^{\psi}$ и $f \notin \mathcal{A}^{\psi}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) По лемме 2, $\mathcal{T}^{\bar\psi} \subseteq \mathcal{M}^{\bar\psi}$, по предложению А из [1, стр. 316], $\mathcal{M}^{\bar\psi} \subseteq \mathcal{A}^{\bar\psi}$, и, по лемме 3, $\mathcal{A}^{\bar\psi} \subseteq \mathcal{T}^{\bar\psi}$; таким образом, $\mathcal{T}^{\bar\psi} = \mathcal{M}^{\bar\psi} = \mathcal{A}^{\bar\psi}$. Кроме того, по первой теореме о рекурсии [5], $\mathcal{A}^{\bar\psi} \subseteq \mathcal{R}^{\bar\psi}$. Таким образом, первое из утверждений а) доказано.

Так как $\alpha^{\bar\psi} \in \mathcal{T}^{\bar\psi}$, то есть $\alpha^{\bar\psi}(z, \bar x) \simeq \tau^{\bar\psi}(a_0, z, \bar x)$ при некотором $a_0 \in N$, то по (1) $\alpha^{\bar\psi}(z, \bar x) \simeq \tau^{\bar\psi}(T_n(a_0, z), \bar x)$, и, следовательно, нумерация $\alpha^{\bar\psi}$ сводится к нумерации $\tau^{\bar\psi}$ посредством о.р.ф. $\lambda z.\, T_n(a_0, z)$. Аналогично, так как $\tau^{\bar\psi} \in \mathcal{A}^{\bar\psi}$, то

$$\tau^{\bar\psi}(z, \bar x) \simeq \alpha^{\bar\psi}(S(b_0, z), \bar x),$$

где $b_0 \in N$ и δ - о.р.ф. из итерационной теоремы для $\mathcal{A}^{\overline{\psi}}$ [1, предложение А]. Значит, нумерации $\alpha^{\overline{\psi}}$ и $\tau^{\overline{\psi}}$ сводятся друг к другу, а так как нумерация $\tau^{\overline{\psi}}$ - полная, то, согласно теореме 5 из [8, стр. 201], нумерации $\alpha^{\overline{\psi}}$ и $\tau^{\overline{\psi}}$ рекурсивно изоморфны.

б) Пусть $\mathcal{B}$ - класс всех монотонных (в отношении включения) функций Γ типа $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$, таких, что для любой 1-местной ч.р.ф. φ $\Gamma(\varphi)$ - также ч.р.ф. Как показано, по существу, в подстрочном примечании на стр. 362 в [9], существуют частичная $\psi \in \mathcal{F}$ и тотальная $f \in \mathcal{F}$ такие, что $f \neq \Gamma(\psi)$ ни для какой $\Gamma \in \mathcal{B}$, и $f \in \mathcal{R}^{\psi}$. Пусть $\Gamma_z(\varphi) = \lambda x.\alpha^{\varphi}(z,x)$; согласно (4), при любом $z \in N$ Γ_z - монотонная функция; кроме того, если φ - ч.р.ф., то $\lambda zx.\alpha^{\varphi}(z,x)$ (по первой теореме о рекурсии) - также ч.р.ф. Следовательно, $\Gamma_z \in \mathcal{B}$ для всех $z \in N$; поэтому при тех же ψ и f $f \notin \mathcal{A}^{\psi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Лемма 3 и, следовательно, теорема 1 сохраняются если при определении $\alpha^{\overline{\psi}}$ в (3) третью строку заменить следующей:

$$q(p_i\ x) \simeq \psi_i(x) \text{ для всех } i = 1, \ldots, n,$$

где $p_1, \ldots, p_n$ - фиксированный набор каких-либо попарно различных чисел, отличных от всех чисел вида $(0,a)$ и $(1,a,b)$.

§ 3. Вычислимость относительно совместных функционалов

Всюду далее $F, F_1, \ldots, F_m$ - обозначают произвольные функционалы из $\mathfrak{F}$, $\overline{F} = F_1, \ldots, F_m$ и, как и ранее, $\overline{\psi} = \psi_1, \ldots, \psi_n$, где все $\psi_i \in \mathcal{F}$, $1 \leq i \leq n$. Класс всех натурально-числовых функций, вычислимых по Тьюрингу относительно $\overline{F}, \overline{\psi}$, обозначаем через $\mathcal{T}^{\overline{F},\overline{\psi}}$.

Определим $T^{F,\overline{\psi}} : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ следующим образом: для любой $\varphi \in \mathcal{F}$

$$T^{F,\overline{\psi}}(\varphi) = \lambda x.\, F(\lambda y.\tau^{\varphi,\overline{\psi}}(x,y)). \tag{10}$$

Для любого порядкового числа ν полагаем

$$\varepsilon_\nu(F,\overline{\psi}) = \Lambda_\nu(\phi, T^{F,\overline{\psi}}) \quad \text{и} \quad \varepsilon(F,\overline{\psi}) = St_{T^{F,\overline{\psi}}}(\phi). \tag{11}$$

ЛЕММА 4. Для любых $F \in \mathfrak{F}$ и $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 0)$

$$\tau^{F,\overline{\psi}}(z,\overline{x}) \simeq \tau^{\varepsilon(F,\overline{\psi}),\overline{\psi}}(z,\overline{x}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно [2, § 1.3], для любого $k \geq 0$

$$\{(z,x_1,\dots,x_k,y):\tau^{F,\overline{\Psi}}(z,x_1,\dots,x_k)\simeq y\}=\bigcup_{\nu}\tau_{\nu}^{F,\overline{\Psi}},$$

где для любого порядкового числа ν множества $\tau_{\nu}^{F,\overline{\Psi}}$ определяются трансфинитной индукцией следующим образом. Пусть $\tau_0^{F,\overline{\Psi}}=\{(z,x_1,\dots,x_k,y):z\in Cd_{n+1}$, и машина z с оракулами $F,\overline{\Psi}$ и с числами $x_1,\dots,x_k$, представленными на ленте в начальной ситуации, в процессе вычислений к оракулу F ни разу не обращается; на все обращения к оракулам $\overline{\Psi}$ машина получает ответы и через конечное число тактов приходит в заключительную ситуацию с числом y в качестве результата вычислений$\}$.

Допустим, $\nu>0$ и для всех $\nu_1<\nu$ множества $\tau_{\nu_1}^{F,\overline{\Psi}}$ уже определены, не убывают с возрастанием ν_1 и для любого $k\geq 0$ множества $\{\langle z,x_1,\dots,x_k,y\rangle:(z,x_1,\dots,x_k,y)\in\tau_{\nu_1}^{F,\overline{\Psi}}\}$ являются графиками $(k+1)$-местных функций (от $z,x_1,\dots,x_k$); обозначим через $\widetilde{\tau}_{\nu}^{F,\overline{\Psi}}$ функцию с графиком $\{\langle z,x,y\rangle:(\exists\nu_1<\nu)[(z,x,y)\in\tau_{\nu_1}^{F,\overline{\Psi}}]\}$. Затем полагаем: $\tau_{\nu}^{F,\overline{\Psi}}=$ $=\{(z,x_1,\dots,x_k,y):z\in Cd_{n+1}$, и машина z с оракулами $F,\overline{\Psi}$ и числами $x_1,\dots,x_k$ в начальной ситуации в процессе вычислений на все обращения к оракулам получает ответы; для любого числа u, с которым машина обращается к оракулу F, функция $\lambda x.\widetilde{\tau}_{\nu}^{F,\overline{\Psi}}(u,x)$ принадлежит $Dom(F)$, и ответом оракула F является число $F(\lambda x\widetilde{\tau}_{\nu}^{F,\overline{\Psi}}(u,x))$; через конечное число тактов машина приходит в заключительную ситуацию с числом y в качестве результата вычислений$\}$.

Трансфинитной индукцией нетрудно проверить, что для любого ν

$$\tau_{\nu}^{F,\overline{\Psi}}(z,x_1,\dots,x_k)\simeq\tau^{\varepsilon_\nu(F,\overline{\Psi}),\overline{\Psi}}(z,x_1,\dots,x_k),$$

откуда и следует утверждение леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если функционал F входит в различные наборы оракулов — $F,\overline{\Psi}_1$ и $F,\overline{\Psi}_2$ при $\overline{\Psi}_1\neq\overline{\Psi}_2$, — то функции $\varepsilon(F,\overline{\Psi}_1)$ и $\varepsilon(F,\overline{\Psi}_2)$, которыми F, согласно лемме 4, может быть заменен, будут различны. Поэтому в общем случае нельзя говорить об одной определенной функции $(\in\mathcal{F})$, заменяющей данный функционал F. Но содержащий F набор оракулов всегда может быть заменен набором лишь функций из $\mathcal{F}$.

Через $\alpha^{F,\overline{\Psi}}(z,x)$ обозначим наименьшую из функций q (типа $N^2\to N$), удовлетворяющих первым двум условиям из (3) и следующим условиям:

$$\begin{aligned}&q((2,0),x)\simeq F(\lambda y\cdot q(x,y)),\\&q((i+2,0),x)\simeq\psi_i(x)\quad\text{для}\quad i=1,\dots,n.\end{aligned}\tag{12}$$

Если набор функционалов $\overline{F}$ пуст, то полагаем $\alpha^{\overline{F},\overline{\Psi}}(z,x) \simeq \alpha^{\overline{\Psi}}(z,x)$; если набор $\overline{F}$ состоит лишь из одного функционала F_1, полагаем $\alpha^{\overline{F},\overline{\Psi}}(z,x) = \alpha^{F_1,\overline{\Psi}}(z,x)$. Если же набор $\overline{F}$ состоит более чем из одного функционала, полагаем $\alpha^{\overline{F},\overline{\Psi}}(z,x) \simeq \alpha^{F_0,\overline{\Psi}}(z,x)$, где функционал F_0 определяется следующим образом: для любой $\varphi \in \mathcal{F}$

$$F_0(\varphi) \simeq \begin{cases} F_i(\lambda x.\, \varphi(x+1)), & \text{если } \varphi(0) \text{ определено и } 1 \leq \varphi(0) = i \leq m, \\ & \text{не определено в остальных случаях.} \end{cases} \tag{13}$$

Согласно [1], скажем, что функция $f(\overline{x})$ или функционал $\Phi(\overline{x},\overline{\varphi})$ ($\overline{x} = x_1,\ldots,x_k$, $\overline{\varphi} = \varphi_1,\ldots,\varphi_\ell$, $k,\ell \geq 0$) частично рекурсивны относительно $\overline{F}, \overline{\Psi}$, если $f(\overline{x}) \simeq \alpha^{\overline{F},\overline{\Psi}}(z,(\overline{x}))$ или $\Phi(\overline{x},\overline{\varphi}) \simeq \alpha^{\overline{F},\overline{\Psi},\overline{\varphi}}(z,\overline{x})$ при каком-либо $z \in N$. Класс всех натурально-числовых функций, частично рекурсивных относительно $\overline{F}, \overline{\Psi}$, обозначаем через $\mathcal{A}^{\overline{F},\overline{\Psi}}$.

Определим $R^{F,\overline{\Psi}}: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ следующим образом: для любой $\varphi \in \mathcal{F}$

$$R^{F,\overline{\Psi}}(\varphi) = \lambda x.\, F(\lambda y.\, \alpha^{\varphi,\overline{\Psi}}(x,y)). \tag{14}$$

Затем полагаем:

$$\rho_\nu(F,\overline{\Psi}) = \Lambda_\nu(\Phi, R^{F,\overline{\Psi}}) \text{ и } \rho(F,\overline{\Psi}) = St_{R^{F,\overline{\Psi}}}(\Phi). \tag{15}$$

ЛЕММА 5. Для любых $F \in \mathfrak{F}$ и $\psi_1,\ldots,\psi_n \in \mathcal{F}$ $(n \geq 0)$

$$\alpha^{F,\overline{\Psi}}(z,x) \simeq \alpha^{\rho(F,\overline{\Psi}),\overline{\Psi}}(z,x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вместо $\rho(F,\overline{\Psi})$ будем здесь писать просто ρ. Так как $\rho = R^{F,\overline{\Psi}}(\rho) = \lambda x.\, F(\lambda y.\, \alpha^{\rho,\overline{\Psi}}(x,y))$, то $\alpha^{\rho,\overline{\Psi}}$ удовлетворяет первым двум условиям (3) и условиям (12) и по определению $\alpha^{F,\overline{\Psi}}$

$$\alpha^{F,\overline{\Psi}} \subseteq \alpha^{\rho,\overline{\Psi}}. \tag{16}$$

Пусть $\pi(x) \simeq F(\lambda y.\, \alpha^{F,\overline{\Psi}}(x,y))$. Из (16) и (14) следует:

$$\pi \subseteq R^{F,\overline{\Psi}}(\rho) = \rho. \tag{17}$$

Так как $\alpha^{F,\overline{\Psi}}$ удовлетворяет условиям, определяющим $\alpha^{\pi,\overline{\Psi}}$, то

$$\alpha^{\pi,\overline{\Psi}} \subseteq \alpha^{F,\overline{\Psi}}. \tag{18}$$

Следовательно, $R^{F,\overline{\Psi}}(\pi) \subseteq \pi$, а тогда для всех ν $\Lambda_\nu(\Phi, R^{F,\overline{\Psi}}) \subseteq \pi$, $\rho \subseteq \pi$ и, с учётом (17), $\rho = \pi$. Отсюда и из (18) получаем включение:

$\alpha^{\rho,\bar\psi} \subseteq \alpha^{F,\bar\psi}$, которое совместно с (16) приводит к утверждению леммы.

ЗАМЕЧАНИЕ. Попутно мы здесь доказали, что

$$\rho(F,\bar\psi) = \lambda x.\, F(\lambda y.\alpha^{F,\bar\psi}(x,y)).$$

Таким образом, функция ρ может быть определена и без явной трансфинитной индукции.

ТЕОРЕМА 2. Для любых наборов функционалов $F_1,\dots,F_m \in \mathfrak{F}$ и функций $\psi_1,\dots,\psi_n \in \mathcal{F}$ $(m,n \geq 0)$ классы $\mathcal{A}^{F,\bar\psi}$ и $\mathcal{T}^{F,\bar\psi}$ совпадают, и для любого $k \geq 0$ нумерации $\alpha^{F,\bar\psi}$ и $\tau^{F,\bar\psi}$ совокупностей всех k-местных функций из $\mathcal{A}^{F,\bar\psi}$, и соответственно из $\mathcal{T}^{F,\bar\psi}$ рекурсивно изоморфны

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся ещё две леммы (вторая из них представляет решающий этап этого доказательства). Условимся, что если β и γ - простые нумерации, то $\beta \leq [e]\gamma$ означает, что β сводится к γ посредством о.р.ф. $\{e\}$, то есть $\beta(x) = \gamma(\{e\}(x))$; $\beta \leq \gamma$ означает, что $(\exists e)[\beta \leq [e]\gamma]$. Напомним, что $(g \circ f)(x) \simeq f(g(x))$.

ЛЕММА 6. Существуют о.р.ф. g_1 и g_2 такие, что для любых $\varphi, \psi_1,\dots,\psi_n \in \mathcal{F}$ и $e \in N$

$$\alpha^{\{e\}\circ\varphi,\bar\psi} \leq [g_1(e)]\,\tau^{\varphi,\bar\psi}, \qquad \tau^{\{e\}\circ\varphi,\bar\psi} \leq [g_2(e)]\,\alpha^{\varphi,\bar\psi}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетрудно найти такую о.р.ф. g, что $\tau^{\{e\}\circ\varphi,\bar\psi} \leq [g(e)]\,\tau^{\varphi,\bar\psi}$. Применяя затем теорему 1 а), получим искомые о.р.ф. g_1 и g_2.

ЛЕММА 7. Существуют ч.р.ф. $\{e_1\}$ и $\{e_2\}$ такие, что для любых $F \in \mathfrak{F}$ и $\varphi, \psi_1,\dots,\psi_n \in \mathcal{F}$

$$R^{F,\bar\psi}(\{e_1\}\circ\varphi) = \{e_1\}\circ T^{F,\bar\psi}(\varphi),$$

$$T^{F,\bar\psi}(\{e_2\}\circ\varphi) = \{e_2\}\circ R^{F,\bar\psi}(\varphi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$\beta(e) = \lambda z x.\,\alpha^{\{e\}\circ\varphi,\bar\psi}(z,x),$$

$$\gamma(e) = \lambda z x.\,\tau^{\varphi,\bar\psi}(\{e\}(z),x);$$

β и γ являются нумерациями некоторых совокупностей 2-местных функций и по лемме 6 β сводятся к γ посредством о.р.ф. g_1. Так как для любых $a, b \in N$ $\{a\}=\{b\} \Longrightarrow \gamma(a)=\gamma(b)$, то нумерация γ, как и гёделевская нумерация $\lambda e.\{e\}$, является полной и по теореме о неподвижной точке [8, стр. 201] существует такое число e_1, что $\beta(e_1)= =\gamma(e_1)$, то есть

$$\alpha^{\{e_1\}\circ\varphi,\overline{\psi}}(z,x) \simeq \tau^{\varphi,\overline{\psi}}(\{e_1\}(z),x).$$

Отсюда

$$R^{F,\overline{\psi}}(\{e_1\}\circ\varphi) = \lambda z.F(\lambda x.\alpha^{\{e_1\}\circ\varphi,\overline{\psi}}(z,x)) =$$
$$= \lambda z.F(\lambda x.\tau^{\varphi,\overline{\psi}}(\{e_1\}(z),x)) = \{e_1\}\circ T^{F,\overline{\psi}}(\varphi).$$

Значит, ч.р.ф. $\{e_1\}$ является искомой. Вполне аналогично – из второго соотношения леммы 6 с помощью теоремы о неподвижной точке – находится и вторая искомая ч.р.ф. $\{e_2\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 2. Если $\overline{F}$ состоит более чем из одного функционала и F_0 – функционал, определяемый по (13), то, очевидно, по любой машине z с оракулами $\overline{F}, \overline{\psi}$ можно эффективно найти машину с оракулами $F_0, \overline{\psi}$, вычисляющую ту же функцию; и обратно. Это означает, что нумерации $\tau^{\overline{F},\overline{\psi}}$ и $\tau^{F_0,\overline{\psi}}$ сводятся друг к другу; а так как каждая из них – полная, то они рекурсивно изоморфны. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда набор $\overline{F}$ состоит лишь из одного функционала F. По первому из соотношений леммы 7 функции $R^{F,\overline{\psi}}$ и $T^{F,\overline{\psi}}$ удовлетворяют условию леммы 1 (при $\Delta=\mathcal{F}$), и по (15), (11) и по лемме 1 получаем:

$$\rho_\gamma(F,\overline{\psi}) = \Lambda_\gamma(\phi, R^{F,\overline{\psi}}) = \Lambda_\gamma(\{e_1\}\circ\phi, R^{F,\overline{\psi}}) =$$
$$= \{e_1\}\circ\Lambda_\gamma(\phi, T^{F,\overline{\psi}}) = \{e_1\}\circ\varepsilon_\gamma(F,\overline{\psi}),$$

и

$$\rho(F,\overline{\psi}) = \{e_1\}\circ\varepsilon(F,\overline{\psi}); \tag{19}$$

с помощью второго соотношения леммы 7 и по лемме 1 вполне аналогично получаем:

$$\varepsilon(F,\overline{\psi}) = \{e_2\}\circ\rho(F,\overline{\psi}); \tag{20}$$

($\{e_1\}$ и $\{e_2\}$ – ч.р.ф. из леммы 7). Применяя последовательно лемму 5,

(19) и леммы 6 и 4, получаем:

$$\alpha^{F,\bar{\Phi}} = \alpha^{\rho(F,\bar{\Phi}),\bar{\Phi}} = \alpha^{\{e_1\}\circ\varepsilon(F,\bar{\Phi}),\bar{\Phi}} \leq \tau^{\varepsilon(F,\bar{\Phi}),\bar{\Phi}} = \tau^{F,\bar{\Phi}}.$$

Таким образом, $\alpha^{F,\bar{\Phi}} \leq \tau^{F,\bar{\Phi}}$. С помощью леммы 4, (20) и лемм 6 и 5 вполне аналогично получаем, что $\tau^{F,\bar{\Phi}} \leq \alpha^{F,\bar{\Phi}}$. Следовательно (ввиду полноты $\tau^{F,\bar{\Phi}}$), нумерации $\alpha^{F,\bar{\Phi}}$ и $\tau^{F,\bar{\Phi}}$ рекурсивно изоморфны. Таким образом, теорема 2 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 2 и результатов Клини [2], [3] следует (через посредство тьюринговой вычислимости), что если для всех функционалов набора $\bar{F}$ областью определения является N^N и все функции набора $\bar{\Phi}$ являются тотальными, то класс $\mathcal{A}^{\bar{F},\bar{\Phi}}$ совпадает с классом всех натурально-числовых функций, частично рекурсивных относительно $\bar{F}, \bar{\Phi}$ в смысле Клини [10].

Автор благодарен Н.В.Белякину за ряд полезных замечаний при обсуждении первоначального варианта этой работы.

Литература

1. P.ACZEL, Representability in some systems of second order arithmetic, Israel J.Math., 8, N 4 (1970), 309-328.

2. S.C.KLEENE, Turing-machine computable functionals of finite types I, Logic, methodology and philosophy of science, Proc. of the 1960 Intern. Congress, Stanford, 1962, 38-45.

3. S.C.KLEENE, Turing-machine computable functionals of finite types II, Proc. London Math. Soc., 12, N46 (1962), 245-258.

4. Н.В.БЕЛЯКИН, Об одном классе рекурсивных иерархий, Алгебра и логика, 12, № 1 (1973), 3-21.

5. С.К.КЛИНИ, Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.

6. R.A.PLATEK, Foundations of recursion theory, Dissertation, Stanford university, 1966.

7. Н.В.БЕЛЯКИН, Обобщенные вычисления и арифметика второй ступени, Алгебра и логика, 9, № 4 (1970), 375-405.

8. А.И.МАЛЬЦЕВ, Алгоритмы и рекурсивные функции, Наука, 1965.

9. Х.РОДЖЕРС, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, Мир, 1972.

10. S.C.KLEENE, Recursive functionals and quantifiers of finite types, I. Trans. Amer. Math. Soc., 91 (1959), 1-52.

Поступило 5 сентября 1973 г.