

Ф.Н.ГАРИФЬЯНОВ

ПРОБЛЕМА ОБРАЩЕНИЯ ОСОБОГО ИНТЕГРАЛА И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ ФУНКЦИЙ, АНАЛИТИЧЕСКИХ ВНЕ КВАДРАТА

Введение

Пусть R - внутренность фундаментального многоугольника фуксовой группы, $\{S_r(z)\}$ - преобразования группы, которые отображают R в многоугольники, имеющие с ним общую сторону или общую вершину, $\alpha(t)$ - функция, совпадающая на сторонах R с порождающими группу преобразованиями, удовлетворяющая условию $\alpha[\alpha(t)] = t$. В вершинах ∂R функция $\alpha(t)$ имеет разрывы первого рода. В докладе на международном математическом конгрессе 1932 г. Т.Карлеман впервые обратил внимание на важность исследования фредгольмова интегрального уравнения с ядром

$$k(t, \tau) = A(t, \tau) - A[\alpha(t), \alpha(\tau)]\alpha'(\tau), \quad (1)$$

где

$$A(t, \tau) = (\tau - t)^{-1} + \sum_r [\tau - S_r(t)]^{-1}. \quad (2)$$

Исследования уравнения Т.Карлеман не дал. В дальнейшем был предпринят ряд попыток [1]-[6] исследовать это уравнение. Трудности, вызванные исследованием этого уравнения, привели к появлению цикла работ [7]-[9], где исследовались уравнения с ядром, содержащим конечное, но значительно большее число преобразований, чем это указал Т.Карлеман. При этом применялись методы функционального анализа. Важность уравнения состояла в том, что в нем не применялись автоморфные и квазиавтоморфные аналоги ядра Коши, для которых либо нет метода для эффективного построения, либо требуется знание всех преобразований группы. Однако к настоящему времени эта идея несколько утратила свою актуальность. Это связано с бурным развитием теории краевых задач со сдвигом, изложение которой можно найти в монографии Г.С.Литвинчука [10]. Принадлежащий Э.И.Зверовичу принцип локального конформного склеивания ([10], с.136) позволяет свести исследование задачи Карлемана к исследованию на некоторой римановой поверхности более простой задачи - задачи Римана. Рассматриваемое же уравнение равносильно простейшему случаю задачи Карлемана - задачи о "скачке", но построить резольвенту в явном виде очень сложно. Все эти соображения указывали, казалось бы, на бесперспективность дальнейших исследований по этой тематике. Однако в работе [11] автору удалось заметить, что ядро Карлемана (2) можно расщепить и представить в виде суммы двух ядер

$$A(t, \tau) = N(t, \tau) + B(t, \tau), \quad (3)$$

где

$$N(t, \tau) = (\tau - t)^{-1} + \sum_r [\tau - S_r(t)]^{-1}, \quad (4)$$

и сумма берется по всем преобразованиям группы, переводящим R в многоугольник, имеющий с ним общую вершину. Таким образом, второе ядро имеет вид

$$B(t, \tau) = \sum_r [\tau - S_r(t)]^{-1}, \quad (5)$$

где сумма берется по тем преобразованиям группы, которые переводят R в многоугольник, имеющий с ним общую сторону. Если в формуле (1) под ядром $A(t, \tau)$ понимать одно из этих

ядер, то уравнение с ядром $k(t, \tau)$ по-прежнему будет Фредгольмовым. Но свойства интегралов с введенными ядрами существенно отличаются друг от друга. Интеграл с ядром (4), как и интеграл с ядром (3), при $z \in R$ представляет собой сумму двух функций - интеграла типа Коши - функции, аналитической внутри R , и интеграла от остальных слагаемых - сумму значений функции, аналитической вне R . Напротив, интеграл с ядром (5) при $z \in R$ представляет сумму значений одной функции, аналитической вне R .

В данной работе исследуются свойства ядра (5) и некоторых других ядер в случае, когда R - квадрат единичной площади. Удобно считать, что его стороны параллельны осям координат, и вершины t_i , перечисленные в порядке обхода, удовлетворяют условиям $t_1 = -t_3$, $t_2 = -t_4$.

В работе приняты следующие обозначения: $(\pi i)^{-1} \int_{\partial R} \varphi(\tau) M(\tau-t) d\tau = (M\varphi)(t)$, где интеграл понимается в смысле главного значения; $(\pi i)^{-1} \int_{\partial R} \varphi(\tau) M(\tau-z) d\tau = (M\varphi)(z)$; $\zeta(u)$ и $\tilde{\zeta}(u)$ - дзе-

та-функции Вейерштрасса, построенные по примитивным периодам $1 \pm i$ и $1, i$ соответственно; $\beta(t, \tau) = \zeta(\tau-t) - \zeta[\alpha(\tau) - \alpha(t)]$ - кусочная постоянная, зависящая от взаимного расположения переменных на сторонах квадрата; $c_\varphi(t) = \int_{\partial R} \varphi(\tau) \beta(t, \tau) d\tau$ - некоторая кусочная постоянная;

J - единичный оператор; \mathcal{W} - оператор сдвига $(\mathcal{W}\varphi)(t) = \varphi[\alpha(t)]$, $\mathcal{W}^2 = J$; $W = \tau - t$.

В §1 рассматривается проблема обращения особого интеграла

$$B\varphi = \psi \quad (6)$$

в случае, когда функция $\varphi(t)$ принадлежит некоторому пространству Q_1 . Это множество функций, удовлетворяющих условию Гельдера на каждой закрытой стороне квадрата, сумма скачков которых в противоположных вершинах равна нулю. Показано, что этот интегральный оператор взаимно однозначно отображает это пространство в себя. Получена формула обращения, которая выражается через резольвенту некоторого уравнения Фредгольма и интегралы с квазипериодическим ядром. Заметим, что проблема обращения особого интеграла с ядром (4) тривиальна, т.к. $N^2 = J$.

В §2 исследуется вопрос о существовании нетривиальных функций, для которых $\varphi = \psi$ и $\varphi = -\psi$. Хорошо известно, что если рассматривается проблема обращения особого интеграла с ядром Коши на гладком замкнутом контуре ([12], с.64), то первый класс - это функции, аналитические внутри контура, а второй класс - это функции, аналитические вне контура и исчезающие на бесконечности. Для ядра $B(t, \tau)$ первый класс состоит из постоянной, второй - из некоторой функции $\varphi_0(t)$, удовлетворяющей условию

$$\int_{\partial R} \varphi_0(t) dt \neq 0. \quad (7)$$

Рассмотрены также некоторые другие классы.

В §3 рассматривается проблема обращения особого интеграла

$$E\varphi = \psi, \quad (8)$$

где ядро записывается в виде

$$E(W) = (W-1)^{-1} + (W+1)^{-1} - (W-i)^{-1} - (W+i)^{-1}. \quad (9)$$

Вводится пространство функций Q_2 - множество функций, удовлетворяющих условию Гельдера на каждой закрытой стороне квадрата, скачки которых в противоположных вершинах равны. Полученные результаты сходны с результатами §1, но оба указанных выше класса не содержат нетривиальных решений.

В §4 исследуется разностное уравнение

$$\Omega(z-1)+\lambda\Omega(z+1)+\beta\Omega(z-i)+\gamma\Omega(z+i) = g(z), \quad z \in R, \quad (10)$$

где $g(z)$ – заданная функция, аналитическая в R и ограниченная в \bar{R} . Решение отыскивается в классе функций, аналитических вне R , исчезающих на бесконечности и почти ограниченных на ∂R . При $\lambda=\beta=\gamma=1$ получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. *Однородное разностное уравнение имеет единственное нетривиальное решение $\Omega_0(z)$. Неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части, удовлетворяющей условию*

$$\int_{\partial R} \Omega_0^-(t)g^+(t)dt = 0. \quad (11)$$

При $\lambda=1, \beta=\gamma=-1$ картина разрешимости отличается от предыдущего случая.

ТЕОРЕМА 2. *Однородное разностное уравнение не имеет нетривиальных решений. Неоднородное уравнение имеет единственное решение при любой правой части.*

Обсуждаются свойства полученных решений разностных задач при некоторых $g(z)$.

§1. Исследуем проблему обращения (6) в случае, когда

$$B(W) = (W-1)^{-1}+(W+1)^{-1}+(W-i)^{-1}+(W+i)^{-1}. \quad (12)$$

Требуется выразить плотность $\varphi(t)$ через значение самого интеграла, т.е. через функцию $\psi(t)$. Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = (B\varphi)(z), \quad (13)$$

для которой справедлива формула Сохоцкого

$$\psi^+(t) = -\varphi[\alpha(t)]+\psi(t). \quad (14)$$

Здесь $\psi(t)$ – особый интеграл, понимаемый в смысле главного значения. Пусть функция $\varphi(t)$ принадлежит введенному выше пространству Q_1 . Можно показать, непосредственно считая логарифмические особенности в каждой из вершин, что функция $\psi(t)$ ограничена на ∂R . Справедлив и более сильный результат.

ЛЕММА 1. $\psi(t) \in Q_1$.

Рассмотрим новую функцию $\psi_1(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\partial R} \varphi(\tau) \zeta(\tau-t+1) d\tau$. Заметим, что функция $\psi_1(t) -$

$-\psi(t)$ непрерывна на ∂R , поскольку рассматриваемое ядро $B(\tau-t)$ представляет собой первые четыре слагаемые разложения функции $\zeta(\tau-t+1)$ в ряд простейших дробей. Функцию $\varphi(\tau)$ представим в виде суммы $[\varphi(\tau)-f(\tau)]+f(\tau)$, где на каждой стороне l_i квадрата $f(\tau) = A_i\tau + \beta_i$.

Постоянные A_i и B_i подобраны так, что $\varphi(t_i \pm 0) = f(t_i \pm 0)$. Поэтому вопрос свелся к исследованию поведения особого интеграла $F(t) = (\pi i)^{-1} \int_{\partial R} f(\tau) \zeta(\tau-t+1) d\tau$ в вершинах. С помощью

двукратного дифференцирования и интегрирования по частям соответствующего интеграла $F(z)$ можно показать, что при $z \in R$ имеем $F(t) = f[\alpha(t)] + At^2 + Bt + C$. Сумма скачков этой функции в противоположных вершинах равна нулю.

Теперь можно перейти к непосредственному исследованию уравнения (6). Из формулы (14) имеем $\varphi(t) = \psi[\alpha(t)] - \psi^+[\alpha(t)]$. Подставляя последнее соотношение в уравнение (6), получим

$$\psi_2^+(t) = (B\mathcal{W}\psi^+)(t), \quad (15)$$

где

$$\psi_2(z) = (B\mathcal{W}\psi)(z). \quad (16)$$

Воспользуемся теперь тождеством

$$(B\psi^+)(t) = \psi^+[\alpha(t)] \quad (17)$$

и перепишем уравнение (15) в виде

$$(B\theta)(t) - \psi^+[\alpha(t)] = \psi_2^+(t), \quad (18)$$

где новая неизвестная функция

$$\theta(t) = \psi^+[\alpha(t)] + \psi^+(t). \quad (19)$$

В формуле (18) в особом интеграле произведем замену переменной интегрирования, применяя свойство

$$\theta(t) = \theta[\alpha(t)]. \quad (20)$$

Заменяв переменную t на $\alpha(t)$ и сложив полученное соотношение с (18), в результате получим интегральное уравнение Фредгольма

$$(T_\lambda \theta)(t) = \theta(t) + \lambda \int_{\partial R} \theta(\tau) K(t, \tau) d\tau = -\psi_2^+(t) - \psi_2^+[\alpha(t)], \quad (21)$$

где ядро $K(t, \tau) = B(\tau - t) - B[\alpha(\tau) - \alpha(t)]$, $\lambda = -(2\pi i)^{-1}$.

Простейшие свойства уравнений с ядром, имеющим подобную структуру, достаточно хорошо изучены (см., напр., [7]). Изложим те из них, которые понадобятся в дальнейшем.

1. Фундаментальную систему решений (ф.с.р.) соответствующего однородного уравнения

$$(T_\lambda \theta)(t) = 0 \quad (22)$$

можно выбрать так, что в нее будут входить только функции, удовлетворяющие свойству (20) или свойству

$$\theta(t) = -\theta[\alpha(t)]. \quad (23)$$

2. $K(t, \tau) = -K(\tau, t)$.

3. Ф.с.р. можно построить так, что функции, в нее входящие, будут либо четными, либо нечетными.

4. Число функций в ф.с.р. уравнения (22), удовлетворяющих одному из условий (20), (23), совпадает с числом функций с противоположным свойством в ф.с.р. союзного уравнения $(T' \psi)(t) = 0$.

5. Если $\lambda \neq (2\pi i)^{-1}$, то

$$\int_{\partial R} \theta(t) dt = 0. \quad (24)$$

6. Если правая часть уравнения $T_\lambda \varphi = g$ удовлетворяет одному из условий (20) или (23) и это уравнение разрешимо, то существует его решение, удовлетворяющее тому же самому условию.

ЛЕММА 2. При $|\lambda| \leq \pi^{-1}$ ф.с.р. уравнения (22) не пуста только при $\lambda = \pm(2\pi i)^{-1}$. При указанных значениях параметра ф.с.р. этих уравнений содержит только по одной функции.

Допустим вначале, что существует нечетная собственная функция со свойством (20). Можно считать, что ее модуль принимает свое наибольшее значение M на нижней стороне квадрата. Обозначим противоположную сторону через l_3 , а правую и левую стороны — через l_2 и l_4 соответственно. Тогда при $\tau \in l_3$ имеем $W = i + \beta$, $\beta \in [-1, 1]$, т.е. $K(t, \tau) = -4i[(\beta^2 + 4)^{-1} + (\beta^2 + 2)(\beta^2 + 4)^{-1}] = -4if(\beta)$. Поэтому

$$\left| \int_{l_3} \theta(\tau) K(t, \tau) d\tau \right| = \left| \int_{l_3} \theta(\tau) \left[\frac{K(t, \tau) - K[t, -\alpha(\tau)]}{2} \right] d\tau \right| < 0,475M.$$

При получении последней оценки использовано элементарное неравенство $2|f(\beta) - f(\gamma)| < 0,475$; $\gamma \in [-1, 1]$. Пусть теперь $\tau \in l_2$. Тогда $K(t, \tau) = (W+1)^{-1} + (W+i)^{-1} - (W-2-i)^{-1} - (W-2i-1)^{-1}$. Заменяем в интеграле от третьего слагаемого τ на $-\alpha(\tau)$ и объединим полученное слагаемое с первым.

Тогда $|(\tau-t+1)^{-1}-(\tau+t+1+i)^{-1}| < 0,5$. Производя такую же замену в интеграле от четвертого слагаемого и объединяя со вторым, получим $|(\tau-t+i)^{-1}-(\tau+t+2i)^{-1}| < 0,8$. В итоге имеем $\left| \int_{t_2}^t \right| \leq 1,3M$. Точно такая же оценка имеет место и для интеграла по левой стороне. Для ин-

теграла по нижней стороне соответствующее ядро тождественно равно нулю. Получили оценку $M < \alpha M$, где $\alpha = 3,075/\pi$, т.е. $\theta(t) \equiv 0$.

Теперь допустим, что существует собственная функция, удовлетворяющая условию (20) и четная. Запишем уравнение (23) в виде

$$\theta(t) - \lambda \int_{\partial R} \theta(\tau) [D(t, \tau) + D(\alpha(t), \tau)] d\tau = -\lambda c_\theta(t), \quad (25)$$

где $D(t, \tau) = \zeta(\tau-t+1) - B(\tau-t)$. В силу условия (20) кусочная постоянная в правой части уравнения (25) представляет собой постоянную, поскольку скачки ее в любой вершине равны нулю. Интегралы с ядром $D(z, \tau)$ при $t \in \partial R$ голоморфны в некоторой области, содержащей внутри себя R , т.е. непрерывны в вершинах квадрата. Поэтому сумма скачков функции $\theta(t)$ в противоположных вершинах равна нулю. Но из четности этой функции вытекает, что это возможно лишь в случае, когда она непрерывна во всех вершинах. Продифференцируем обе части уравнения (26), а затем, воспользовавшись свойствами ядра $\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{\partial D}{\partial \tau}$, применим формулу интегрирования по частям. Заметим, что внеинтегральное слагаемое, как приращение непрерывной функции по замкнутому контуру, обращается в нуль. Получили, что $\theta'(t)$ удовлетворяет уравнению (25), поскольку $c_\theta(t) = 0$. Последнее справедливо, поскольку с одной стороны — это нечетная функция, а с другой стороны — кусочная постоянная, удовлетворяющая условию (20). Поэтому функция $\theta'(t)$ удовлетворяет уравнению (22), т.е. в силу ранее доказанного является тождественным нулем, как нечетное решение этого уравнения со свойством (20). Это означает, что $\theta(t)$ является постоянной. Непосредственной проверкой убеждаемся, что постоянная действительно удовлетворяет уравнению (22) при $\lambda = -(2\pi i)^{-1}$. Из свойства 4 вытекает, что решение с противоположным свойством при $\lambda \neq (2\pi i)^{-1}$ не существует.

С помощью леммы 2 оказывается возможным осуществить обратный переход от уравнения (21) к проблеме обращения. Пусть $\theta(t)$ — решение уравнения (21) со свойством (20). Тогда, переходя в уравнении (21) к ядрам D , получим, что эта функция принадлежит пространству Q_1 . При этом учитываем, что кусочная постоянная $c_\theta(t)$ будет постоянной. Перейдем теперь в уравнении (21) к новой функции $\beta(z)$, определенной из краевой задачи

$$\beta^+(t) + \beta^+[\alpha(t)] = \theta(t). \quad (26)$$

Данная задача безусловно разрешима и имеет единственное решение

$$\beta(z) = (4\pi i)^{-1} \left[2 \int_{\partial R} \theta(z) \zeta(\tau-z) d\tau - \tilde{\theta} \right]; \quad \tilde{\theta} = c_\theta(t). \quad (27)$$

Уравнение (21) переписывается в виде

$$\tilde{\beta}(t) + \tilde{\beta}^+[\alpha(t)] = \psi_2^+(t) + \psi_2^+[\alpha(t)], \quad (28)$$

где

$$\tilde{\beta}(z) = (B\mathcal{W}\beta^+)(z) + \beta(z). \quad (29)$$

Отсюда $\tilde{\beta}(z) = \psi_2^+(z)$, поскольку краевая задача $\omega^+(t) = -\omega^+[\alpha(t)]$ имеет лишь тривиальное решение. Поэтому

$$(B\mathcal{W}\beta^+)(t) = \psi_2^+(t). \quad (30)$$

Сравнивая формулы (30) и (15), получим, что $\psi(z) = \beta(z)$, т.е. из формулы Сохоцкого (14) имеем

$$\varphi(t) = \psi[\alpha(t)] - \beta^+[\alpha(t)]. \quad (31)$$

Получили окончательный результат: данная проблема обращения безусловно разрешима и имеет единственное решение (31). Функция $\beta(z)$ определяется формулой (27), где, в свою очередь,

$$\theta(t) = -\psi_2^+(t) - \psi_2^+[\alpha(t)] + (\pi i)^{-1} \int_{\partial R} \{\psi_2^+(t) + \psi_2^+[\alpha(t)]\} \Gamma(t, \tau, -(\pi i)^{-1}) d\tau.$$

Здесь $\Gamma(t, \tau, \lambda)$ - резольвента уравнения (21), а функция $\psi_2(z)$ определена формулой (16). Функция $\varphi(t) \in Q_1$.

§2. Получим некоторые следствия из леммы 2.

СЛЕДСТВИЕ 1. Единственная функция, для которой в формуле (6) имеет место равенство $\varphi(t) = \psi(t)$ - это постоянная.

Запишем формулу (6) в виде

$$(B\varphi)(t) = \varphi(t) \quad (32)$$

или, что то же самое, с помощью функции (14)

$$\psi^+(t) = \varphi(t) - \varphi[\alpha(t)]. \quad (33)$$

Из условия (33) вытекает, что $\psi^+(t) = -\psi^+[\alpha(t)]$, т.е. $\psi(z) = 0$, $z \in R$. Поэтому функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (20), а соотношение (32) означает, что эта функция удовлетворяет уравнению (22) при $\lambda = -(2\pi i)^{-1}$. Для этого достаточно в особом интеграле в формуле (32) сделать замену переменной интегрирования τ на $\alpha(\tau)$, а затем заменить переменную t на $\alpha(t)$ и полученные соотношения сложить.

СЛЕДСТВИЕ 2. Существует единственная нетривиальная функция, для которой в формуле (6) выполнено равенство $\varphi(t) = -\psi(t)$.

Запишем формулу (6) в виде

$$(B\varphi)(t) = -\varphi(t) \quad (34)$$

или, что то же самое,

$$-\psi^+(t) = \varphi(t) + \varphi[\alpha(t)]. \quad (35)$$

Из условия (35) вытекает, что $\psi^+(t) = \psi^+[\alpha(t)]$, т.е. $\psi(z) = 2c$. Поэтому функция $\varphi_0(t) = -\varphi(t) + c$ удовлетворяет условию (23) и уравнению

$$\varphi_0(t) + (B\varphi_0)(t) = 2c. \quad (36)$$

Это означает, что введенная функция является решением уравнения (22). Действительно, для этого достаточно в уравнении (36) заменить переменные τ и t на $\alpha(\tau)$ и $\alpha(t)$ соответственно и полученное соотношение вычесть из (36). Докажем теперь, что постоянная в правой части уравнения (36) является нулем. Допустив противное, получили бы, что функцию $\varphi_0(t)$ можно считать четной. Но тогда аналогично рассуждениям, проведенным в лемме 2, установим непрерывность этой функции в вершинах, вытекающую из формулы

$$\varphi_0(t) - (2\pi i)^{-1} \int_{\partial R} \varphi_0(\tau) [D(t, \tau) - D[\alpha(t), \tau]] d\tau = -(2\pi i)^{-1} c_{\varphi_0}(t).$$

Кусочная постоянная в правой части этой формулы одновременно четна и удовлетворяет условию (23), т.е. является нулем. Получили, что функция $\varphi'_0(t)$ удовлетворяет (36) при $c=0$. В силу леммы 2 теперь должно выполняться условие линейной зависимости $\varphi_0(t) = \lambda \varphi'_0(t)$, но это невозможно в силу ее четности. Итак, постоянная $c=0$, а функция $\varphi_0(t)$ нечетна. Если теперь допустить, что не выполнено условие (7), то функция $\psi_0(t) = \int_{\partial R} \varphi_0(\tau) \tilde{\xi}(\tau-t) d\tau$ удовлетворяет условию (20) и $(\beta\psi_0)(z) = 0$, $z \in R$. Последнее справедливо в силу равенства (36)

при $c=0$ и тождества $(BF^+)(z)=0$. Тогда ф.с.р. уравнения (22) при $\lambda=-(2\pi i)^{-1}$ содержит еще одну функцию, $\psi_0(t)$, отличную от постоянной, а это противоречит лемме 2.

СЛЕДСТВИЕ 3. Множество функций, для которых $\varphi(t)=\psi[\alpha(t)]$ имеет вид $\alpha^+(t)+c\varphi_0(t)$, где c - произвольная постоянная.

Для таких функций уравнение (6) запишется в виде $(B\varphi)(z)=0$. Если $\varphi(t)$ - решение этого уравнения, то решением будет и $\theta(t)=\varphi(t)+\alpha^+(t)$. Выберем функцию $\alpha(z)$ так, чтобы $\alpha^+(t)+\alpha[\alpha(t)]=-\varphi(t)-\varphi[\alpha(t)]$. Последняя краевая задача безусловно разрешима ([13], с.20). Поэтому функция $\theta(t)$ удовлетворяет условию (23), т.е. отсюда $\theta(t)=c\varphi_0(t)$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Не существует нетривиальных функций, удовлетворяющих условию $\psi(t)=\gamma\varphi[\alpha(t)]$, $|\gamma+1|\geq 1$.

Рассмотрим уравнение $(B\varphi)(t)=\gamma\varphi[\alpha(t)]$. Отсюда $\varphi(t)=(\gamma-1)^{-1}\psi^+[\alpha(t)]$, где функция $\psi(z)$ определена равенством (14). Переходя к новой неизвестной функции $\theta(t)$, введенной формулой (19), имеем $\gamma\psi^+(t)+\psi^+[\alpha(t)]=(B\mathcal{W}\theta)(t)$. Заменяем здесь переменную интегрирования τ на $\alpha(\tau)$ и переменную t на $\alpha(t)$, а затем это соотношение сложим с исходным. Получим, что $\theta(t)$ является решением уравнения (22). Остается применить лемму 2. При указанных значениях γ имеем $\theta(t)=0$, т.е. $\psi(z)=0$. Из исходного уравнения получим $\varphi(t)=0$.

§3. Рассмотрим теперь проблему обращения особого интеграла (8) с ядром $E(W)$, определенным условием (9). Введем пространство Q_2 : множество функций, удовлетворяющих условию Гёльдера на каждой закрытой стороне l_i , скачки которых в противоположных вершинах равны.

ЛЕММА 3. Пусть функция $\varphi(t)\in Q_2$, а функция $\psi(t)$ определена формулой (8). Тогда $\psi(t)\in Q_2$.

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1. Для интеграла

$$\psi(z) = (E\varphi)(z) \quad (37)$$

имеет место формула Сохоцкого

$$\psi^+(t) = \gamma_t\varphi[\alpha(t)]+\psi(t), \quad (38)$$

где $\gamma_t=\{1, t\in l_1\cup l_3; -1, t\in l_2\cup l_4\}$. Рассуждая аналогично тому, как это было сделано в §1, можно далее показать, что новая неизвестная функция

$$\theta(t) = \gamma_t\psi^+[\alpha(t)]+\psi^+(t) \quad (39)$$

является решением интегрального уравнения

$$(\tilde{T}_\lambda\theta)(t) \equiv \theta(t)+\lambda\int_{\partial R} \theta(\tau)\tilde{K}(t,\tau)d\tau = -\psi_2^+(t)-\gamma_t\psi_2^+[\alpha(t)], \quad (40)$$

где ядро $\tilde{K}(t,\tau) = E(\tau-t)-\gamma_t\gamma_\tau E[\alpha(t)-\alpha(\tau)]$, параметр $\lambda=-(\pi i)^{-1}$; $\psi_2(z) = (E\psi_1)(z)$, $\psi_1(\tau) = \gamma_\tau\psi[\alpha(\tau)]$.

ЛЕММА 4. Однородное уравнение Фредгольма

$$(\tilde{T}_\lambda\theta)(t) = 0 \quad (41)$$

не имеет нетривиальных решений.

То, что ядро уравнения (41) ограничено, можно проверить непосредственно. Ф.с.р. этого уравнения можно построить так, что функции $\theta(t)$, входящие в эту систему, являются либо четными, либо нечетными и удовлетворяют одному из условий

$$\theta(t) = \pm\gamma_t\theta[\alpha(t)]. \quad (42)$$

Кроме того, функция $\theta(it)$ является решением соответствующего союзного уравнения. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что наибольшее значение M модуля неизвестной функции достигается на нижней стороне. При $\tau\in l_3$ имеем

$$K(t, \tau) = 4i[(\beta^2+4)^{-1} - (\beta^2+2)(\beta^4+4)^{-1}] = 4if(\beta),$$

где $\beta = W+i$ и $\beta^2 \in [0,1]$. Отсюда $|K(t, \tau)| \leq 1,6$. Если теперь предположить, что на верхней стороне дополнительно выполнено условие

$$\theta(t) = -\theta[-\alpha(t)], \quad (43)$$

то

$$\left| \int_{l_3} \theta(\tau) K(t, \tau) d\tau \right| = \left| \int_{l_3} \theta(\tau) \left[\frac{K(t, \tau) - K(t, -\alpha(\tau))}{2} \right] d\tau \right| \leq 0,75M.$$

Последняя оценка вытекает из элементарного неравенства $2|f(\beta) - f(\gamma)| \leq 0,75$ при $\gamma^2 \in [0,1]$. Непосредственным подсчетом можно убедиться, что при $\tau \in l_2 \cup l_4$ справедливо равенство $\max |K(t, \tau)| = 0,8\sqrt{2}$. Доказательство сводится к вычислению наибольшего значения некоторой неотрицательной функции двух действительных переменных α_1 и α_2 , где $\tau = \pm 0,5 + \alpha_1 i$, $t = -0,5i + \alpha_2$ и $|\alpha_j| \leq 0,5$, $j=1,2$. Тогда из уравнения (41) имеем $M < \alpha M$, где $\alpha < 1$, т.е. нетривиальных решений нет.

Предположим, что дополнительное условие (43) на верхней стороне не выполняется. Но тогда оно обязательно выполняется на паре боковых сторон. Имеет место оценка

$$\left| \frac{K(t, \tau) - K(t, -\alpha(\tau))}{2} \right| \leq 0,7.$$

Поскольку $1,6 + 0,7 \cdot 2 < \pi$, то это завершает доказательство.

Теперь можно осуществить обратный переход от уравнения (45) к проблеме обращения, аналогично тому, как это было сделано в §1. На деталях этого перехода и на окончательной формуле, выражающей плотность через значение особого интеграла, останавливаться не будем. Отметим только, что справедливо тождество $(E\psi^+)(t) = \gamma_t \psi^+[\alpha(t)]$ для любой функции $\psi(z)$, аналитической в R и ограниченной в \bar{R} , а краевая задача (39) безусловно разрешима и ее решение может быть получено в замкнутой форме ([13], с.20). Ядро E также является суммой первых четырех слагаемых разложения в ряд простейших дробей некоторой эллиптической функции с простыми полюсами.

Из леммы 4 можно получить некоторые интересные следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1. Множество нетривиальных функций, для которых $\varphi = \psi$ или $\varphi = -\psi$, пусто.

Допустим существование этих функций, т.е. $\gamma_t \varphi[\alpha(t)] \pm \varphi(t) = \psi^+(t)$. Тогда функция $\psi(t)$ удовлетворяет одному из условий (42), а поскольку $\psi(z) \equiv 0$, $z \in R$, то $\varphi(t)$ - решение уравнения (39) при $\lambda = \pm(2\pi i)^{-1} \Rightarrow \varphi(t) \equiv 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $\psi = \mathcal{W}\varphi$ или $\psi = -\mathcal{W}\varphi$, то $\varphi = \psi = 0$.

Ограничимся рассмотрением случая $\psi = \mathcal{W}\varphi$. Уравнение $B\varphi = \mathcal{W}\varphi$ можно записать в виде $\psi^+(t) = (\gamma_t + 1)\varphi[\alpha(t)]$, где функция $\psi(z)$ определена формулой (37). Отсюда на одной паре сторон $\psi^+(t) = 0$, т.е. $\psi(z) = 0$, $z \in R$. Но тогда на другой паре сторон $\varphi(t) = 0$. Получили уравнение $F(z) = 0$, где $F(z) = (\pi i)^{-1} \int_{l_2 \cup l_4} \varphi(\tau) E(\tau - z) d\tau$. Но тогда $F(z) = 0$ во всей расширенной плоскости

с разрезами. Применяя формулу Сохоцкого $F^+(t) - F^-(t) = -\varphi[\alpha(t)]$, $t \in l_2 \cup l_4$, имеем $\varphi(t) \equiv 0$.

§4. Будем теперь искать решение разностного уравнения (10) при $\lambda = \beta = \gamma = 1$ в виде интеграла типа Коши

$$\Omega(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{\partial R} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \quad (44)$$

с неизвестной плотностью, удовлетворяющей условию (23). То, что для любой функции $\Omega(z)$ из указанного во введении класса, интегральное представление (44) возможно, следует из

равенства $\varphi(\tau) = \alpha^+(\tau) - \Omega^-(\tau)$ и безусловной разрешимости краевой задачи $\alpha^+(\tau) + \alpha^+[\alpha(\tau)] = -\Omega^-(\tau) + \Omega^-[\alpha(\tau)]$. С помощью представления (44) можно перейти от разностного уравнения к интегральному уравнению

$$(T_{2\pi i}\varphi)(t) = g^+(t) - g^+[\alpha(t)]. \quad (45)$$

Из леммы 2 следует, что уравнение (45) разрешимо и может быть записано в виде $\psi^+(t) - \psi^+[\alpha(t)] = 2[g^+(t) - g^+[\alpha(t)]]$, где функция $\psi(z)$ определена формулой (14). Отсюда

$$\varphi(t) + (B\varphi)(t) = 2[g^+(t) + c]. \quad (46)$$

Остается установить, когда постоянная в правой части формулы (46) обращается в ноль. В следствии 2 леммы 2 было установлено существование функции $\varphi_0(t)$ со свойством (23), удовлетворяющей формуле (30) при $c=0$. Интеграл типа Коши с этой плотностью $\Omega_0(z)$ является решением соответствующего разностного однородного уравнения. Умножим теперь соотношение (46) на $\Omega_0^-(t)$ и проинтегрируем по ∂R , меняя порядок интегрирования в двойном интеграле. Полученный внутренний интеграл можно вычислить с помощью вычетов. В итоге получим $\int_{\partial R} [g^+(t) + c] \Omega_0^-(t) dt = 0$. Таким образом, неоднородное разностное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено условие (11).

Функция $\Omega_0(z)$ обладает следующими свойствами.

1. Любая линейная комбинация производных функции $\Omega_0(z)$ удовлетворяет однородному разностному уравнению и исчезает на бесконечности, но не ограничена в вершинах.

2. Функцию можно продолжить внутрь R четырьмя различными способами. При этом получим функции, аналитические в плоскости с разрезами по ломаным, состоящими из трех звеньев.

3. Функция $\Omega_0^-(t)$ бесконечное число раз дифференцируема во всех точках контура, отличных от вершин.

4. Разложение функции

$$\Omega_0(z) = z^{-1} + \sum_{j=1}^{\infty} c_j z^{-4j-1}$$

справедливо в окрестности бесконечно удаленной точки, а коэффициенты ряда удовлетворяют бесконечной системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \prod_{p=1}^{4m+3} (4j+p) = (4m+3)!, \quad m = \overline{0, \infty}.$$

Последнюю систему можно получить, если исходное соотношение для $\Omega_0(z)$ продифференцировать некоторое число раз и положить в полученных соотношениях $z=0$.

Пусть $\Omega_n(z)$ - система функций, удовлетворяющих условию (10) при $g(z) = z^n + A_n$, где константы подобраны так, чтобы выполнялось условие (11). Тогда, если $g(t)$ - гёльдеровская на контуре функция, то из равенств

$$\int_{\partial R} \Omega_n^-(t) g(t) dt = 0, \quad n = \overline{0, \infty}, \quad (47)$$

следует, что $g(t)$ - граничное значение функции, аналитической в R^- и исчезающей на бесконечности. Поскольку $g(t) = g^+(t) - g^-(t)$, где $g(z)$ - интеграл типа Коши с плотностью $g(t)$, то достаточно предположить, что условие (47) выполняется для некоторой функции $g^+(t)$. Тогда, разрешимо уравнение (46), где постоянная равна нулю в силу первого из равенств (47). Умножая уравнение (47) на функции $\Omega_n^-(t)$ и интегрируя по ∂R , получим

$\int_{\partial R} \varphi(t) [t^n + A_n] dt = 0$. Поскольку любое решение уравнения определено с точностью до слагае-

мого $\lambda\varphi_0(t)$, то для функции $\varphi(t)$ выполнено условие (24). Это означает, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяющая условию (23), по теореме Рунге является граничным значением некоторой аналитической в R функции, т.е. $\varphi(t) \equiv 0$.

Условие гёльдеровости можно значительно ослабить. Можно также показать, что рассмотренная система функций – минимально полная система, т.е. из нее нельзя выбросить ни одной функции при сохранении справедливости этого результата. Систему степеней можно заменить любой системой функций, полной в пространстве аналитических внутри R функций, напр., системой экспонент. Таким образом, можно построить базис в пространстве функций, аналитических вне R , причем функции, туда входящие, являются решениями соответствующего неоднородного разностного уравнения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Показеев В.И. *Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1963. – Кн.123.– №9. – С.40–57.
2. Показеев В.И. *Фуксовы функции Аппеля, I*. – М., 1984. – 64 с. – Деп. в ВИНТИ, №5189–84.
3. Чибрикова Л.И. *Исследование разрешимости одного интегрального уравнения Фредгольма и его применение* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1984, вып. 21. – С.193–209.
4. Чибрикова Л.И. *Некоторые свойства криволинейных интегралов с взаимно союзными ядрами Карлемана* // Краев. задачи и их прилож. – Чебоксары, 1985. – С.111–121.
5. Чибрикова Л.И. *Разрешимость и применение одного интегрального уравнения Карлемана* // ДАН СССР. – 1984. – Т.278. – №4. – с.817–820.
6. Чибрикова Л.И. *Построение автоморфных форм измерения (-2) методом интегральных уравнений* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1987, вып. 23. – С.239–258.
7. Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *К исследованию интегрального уравнения с ядром Карлемана* // Изв. вузов. Математика. – 1983. – №4. – С.43–517.
8. Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *О двух интегральных уравнениях с ядром типа Карлемана, I* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1983, вып. 20. – С.11–21.
9. Аксентьева Е.П., Гарифьянов Ф.Н. *О двух интегральных уравнениях с ядром типа Карлемана, II* // Тр. семин. по краев. задачам. – Казань, 1985, вып. 22. – С.30–35.
10. Литвинчук Г.С. *Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом*. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
11. Гарифьянов Ф.Н. *Интегральное представление аналитической функции внутри параллелограмма и его приложение* // Изв. вузов. Математика. – 1991. – №12. – С.8–12.
12. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
13. Чибрикова Л.И. *О граничных задачах для прямоугольника* // Учен. зап. Казанск. ун-та. – 1963. – Кн.123. – №9. – С.15–39.

г. Казань.

Поступили
первый вариант 08.10.1992
окончательный вариант 30.30.1993