А. Ф. Вакуленко, Отсутствие связанных состояний двухчастичной системы во внешнем постоянном электрическом поле, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1986, том 152, 18–20

А.Ф.Вакуленко

ОТСУТСТВИЕ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ ВО ВНЕШНЕМ ПОСТОЯННОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Настоящая работа служит продолжением статьи автора [I] . Мы докажем отсутствие собственных значений у оператора Штарка и одну оценку, пропущенную в [I] .

I. Рассмотрим в $L_2(R^n)$ самосопряженный оператор $H_0 = \Delta + x_1$, заданный на естественной области определения $\mathcal{D}(H_0)$. Пусть ρ – гладкая, положительная функция, зависящая только от x_1 . Пусть, кроме того, $\rho(x) = \frac{1}{x_1}$ при $x_1 > N$, и $\rho(x) = |x_1|$ при $x_1 < -N$, для некоторого $N > 0$.

ЛЕММА I. Пусть $f \in \mathcal{D}(H_0)$. Тогда величина $\int_{R^n} \rho |\nabla f|^2 dx$ конечна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in C^\infty(R^n)$ вещественна. Имеем

$$\int_{R^n} ((\Delta + x_1 + \rho) f)^2 dx = \int_{R^n} \{((\Delta + x_1) f)^2 + (\rho^2 + 2 x_1 \rho + \rho'') f^2 - 2\rho (\nabla f)^2\} dx,$$

где штрих означает производную по x_1 . Из определения ρ видно, что $\rho^2 + 2x_1\rho + \rho'' < C$ при некотором $C > 0$. Из предыдущего тождества следует

$$2\int_{R^n} \rho |\nabla f|^2 dx \leqslant \int_{R^n} |(\Delta + x_1) f|^2 dx + c \int_{R^n} |f|^2 dx .$$

Утверждение леммы получается замыканием этого неравенства.

Пусть v – вещественная функция на R^n такая, что

$$|v(x)|^2 \leqslant \alpha \equiv c(1+\varepsilon x_1^2)^{a}, \qquad a > \frac{1}{2} . \tag{I.I}$$

Пусть V – оператор умножения на v . Положим $H = H_0 + V$, $\mathcal{D}(H) = \mathcal{D}(H_0)$. Тогда H самосопряжен.

ТЕОРЕМА I. У оператора H нет собственных значений.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $f \in \mathcal{D}(H)$ и $Hf = \lambda f$, для некоторого вещественного λ . Пусть $\beta' = \alpha$. Положим $g = e^{\beta} f$. Тогда $g \in \mathcal{D}(H)$ и $\Delta g - 2\alpha g' + (\alpha^2 - \alpha') g + x_1 g + v g - \lambda g = 0$.

Умножая левую часть уравнения на $2g'$ и интегрируя, получим

$$\int_{R^n} (g^2 + 4\alpha g'^2 + (\alpha^2 - \alpha')' g^2 - 2 v g g') dx = 0 . \tag{I.2}$$

По лемме I интеграл от каждого слагаемого конечен, что позволяет легко оправдать проведенное интегрирование по частям. Выбрав ε в (I.I) достаточно малым, можно считать, что $(\alpha^2 - \alpha')' < \frac{1}{2}$.

Тогда $\int_{\mathbb{R}^n}(\frac{1}{2}g^2+4\alpha g'^2-2vgg')\,dx\leq 0$. Поскольку $|2vgg'|\leq 4v^2g'^2+\frac{1}{4}g^2\leq 4\alpha g'^2+\frac{1}{4}g^2$, g тождественно равна нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ. Результат вычислений, проведенных при доказательстве теоремы I, можно представить как положительность коммутатора

$$[A, H]\geq cI \quad , \quad c>0 ,$$

где $A=e^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_1}e^{\beta}$. Действуя в духе Мурра, можно было бы получить, например, абсолютную непрерывность спектра H. Однако подобные результаты легко получаются другими средствами, см. [2,3]. В работе [2] имеется также утверждение типа теоремы I, в котором главное условие на v выглядит следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial x_1}v\leq c<1 , \quad x_1\to\infty .$$

Нам также нетрудно дополнить теорему I, считая, что $v=v_1+v_2$, где v_1 удовлетворяет (I.I), а v_2 такое, что $\frac{\partial}{\partial x_1}v_2\leq c<1$. При этом в (I.2) нужно сделать следующее преобразование

$$-2\int_{\mathbb{R}^n}vgg'dx=-2\int_{\mathbb{R}^n}v_1gg'+\int_{\mathbb{R}^n}v_2'g^2 .$$

Другое отличие доказательства в [2] состоит в том, что там, по-существу, рассматривается только область больших x_1. Всякое решение принадлежащее L_2 в окрестности бесконечности по x_1, оказывается тождественным нулем в (возможно меньшей) окрестности бесконечности. Далее следует ссылка на теорему единственности продолжения. Эти более сильные результаты стоят, однако, и больших трудов. В то же время в теории рассеяния достаточно иногда и элементарных результатов типа теоремы I.

2. В работе [I] было доказано и использовано неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2(\Delta f+f)^2dx\geq c\int_{\mathbb{R}^n}f^2dx , \quad n\geq 3 . \tag{2.I}$$

Формулировка основного результата подразумевала, что оно справедливо и при $n=2$, что неверно. Вместо этого верно

$$\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^2)(\Delta f+f)^2dx\geq c\int_{\mathbb{R}^n}f^2dx . \tag{2.2}$$

В соответствии с этим, упомянутый результат работы [I] формулируется следующим образом.

Уравнение $-\Delta f+vf=f$ не имеет решений из $L_2(\mathbb{R}^n)$ при следующих условиях на v.

$n \geq 3$. $|x| V(x)$ ограничено и стремится к нулю при $|x| \to \infty$.
$n = 2$. $(1+|x|) V(x)$ ограничено и стремится к нулю при $|x| \to \infty$.

Пусть $h_b = \left(\frac{d}{dr}\right)^2 + I - \frac{b}{r^2}$ – оператор в $L_2(0,\infty)$. (2.I) и (2.2) вытекают из следующих неравенств.

$$\| r h_b f \|^2 \geq c \| f \|^2, \qquad b \geq b_0 > -\frac{1}{4} . \tag{2.3}$$

$$\| (1+r) h_b f \| \geq c \| f \|^2, \qquad b \geq -\frac{1}{4} . \tag{2.4}$$

Докажем их. Пусть $f \in C_0^\infty(0,\infty)$, тогда

$$\int_0^\infty (f^2 + f'^2 + \frac{b}{r^2} f^2) dr = -2 \int_0^\infty r f' (h_b f) dr \leq \int_0^\infty (f'^2 + r^2 (h_b f)^2) dr .$$

Следовательно, при $b \geq 0$ (2.3) верно с $c = 1$. При $b \in (b_0, 0)$ воспользуемся неравенством Харди $\int_0^\infty \frac{1}{r^2} f^2 dr \leq 4 \int_0^\infty f'^2 dr$ и получим (2.3) с $c = (1+4b_0)^{-1}$. Подобным же образом получается (2.4). Пусть $f = \sqrt{r} g$, тогда

$$\int_0^\infty (r (g'^2 + g^2) + (b + \frac{1}{4}) \frac{1}{r} g^2) dr = \int_0^\infty (h_b f)(2 r \sqrt{r} g' + \sqrt{r} g) dr \leq$$

$$\leq \int_0^\infty (r^2 (h_b f)^2 + r g'^2) dr + \int_0^\infty (2 (h_b f)^2 + \frac{1}{2} r g^2) dr .$$

Окончательно получаем $\frac{1}{2} \int_0^\infty f^2 dr \leq \int_0^\infty r^2 (h_b f)^2 dr + 2 \int_0^\infty (h_b f)^2 dr$.

Литература

I. В а к у л е н к о А.Ф. Неравенство Трева и отсутствие положительных собственных значений у оператора Шредингера с комплексным потенциалом. В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций.I7. - Зап.научн.семин. ЛОМИ, I985, т.I47, с.I3-I7.

2. A v r o n J.E., H e r b s t I.W. Spectral and Scattering Theory of Schrodinger operators Related to the Stark Effect.- Comm.Math.Phys., v.52, N 3, p.239-254.

3. S i m o n B. Phase space analysis of symple scattering systems: extention of some work of Enss. Duke Math.J., v.46, N 1, p.119-168.

Vakulenko A.F. The absence of bound states for the two-body system in the external electric field.

We prove the absence of bound states for the two-body system in the external electric constant field. A class of potentials is essentially the same for wich wave operators exist.