



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Малышев, О коэффициентах Фурье модулярных форм (Замечания к статье “Обобщенные суммы Клостермана и их оценки”), *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1966, том 1, 140–163

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

13 января 2025 г., 12:46:56



А.В.Малышев

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ФУРЬЕ МОДУЛЯРНЫХ ФОРМ

(Замечания к статье "Обобщенные суммы  
Клостермана и их оценки"\*)

В статье, указанной в заглавии, рассматривались экспоненциальные суммы вида

$$K_{\tau}(u, v; q) = \sum'_{x \pmod{q}} \left(\frac{x}{\tau}\right) e^{2\pi i \frac{ux+vx^{-1} \pmod{q}}{q}} \quad (1)$$

и более общие суммы

$$K_{\tau}(u, v; \ell, L; q) = \sum'_{x \equiv \ell \pmod{L}} \left(\frac{x}{\tau}\right) e^{2\pi i \frac{ux+vx^{-1} \pmod{q}}{q}}; \quad (2)$$

---

\*) Вестник ЛГУ, 1960, № 13, 59-75. В заглавии этой статьи, к сожалению, вкралась досадная опечатка.

здесь  $q$  - целое положительное число;  $\tau$  - нечетное положительное число, все простые делители которого входят в  $q$ ; и  $u, v$  - целые числа;  $L$  - целое положительное число, делящее  $q$ ;  $\ell$  - целое число; суммирование в первой сумме ведется по всем вычетам  $x$  приведенной системы  $(\text{mod } q)$ , во второй сумме - по тем из них, которые сравнимы с  $\ell$  по модулю  $L$ .

Запись  $x^{-1(\text{mod } q)}$  для числа  $x$ , взаимно простого с  $q$ , обозначает число  $x'$ , для которого  $x'x \equiv 1 (\text{mod } q)$ ; для определенности далее считаем, что  $0 < x^{-1(\text{mod } q)} \leq q$ .

В цитированной статье (или - что то же - в главе II монографии [1]) на основе формул Салье и оценки А. Вейля были даны оценки сумм (1) и (2). Нам понадобится следующий вариант этих оценок (ср. также Эстерман [6]):

Лемма. Имеет место неравенство

$$|K_{\tau}(u, v; \ell, L; q)| \leq \sqrt{q} \min \left\{ \tau \left( \frac{q}{\text{о.н.}g(u, q)} \right) \sqrt{\text{о.н.}g(u, q)}, \right. \\ \left. \tau \left( \frac{q}{\text{о.н.}g(v, q)} \right) \sqrt{\text{о.н.}g(v, q)} \right\}, \quad (3)$$

где  $\tau(n)$  - количество всех делителей числа  $n$ .

Доказательство. По формуле [1] (П.72)\* нам достаточно

\* Так мы обозначаем формулу (22) главы II монографии [1].

доказать оценку (3) для суммы  $K_z(u, v; q)$ . Формула [1] (П.7) показывает, что нам достаточно доказать неравенство

$$|K_z(u, v; q)| \leq \tau \left( \frac{q}{\text{о.н.д.}(u, q)} \right) \sqrt{q} \sqrt{\text{о.н.д.}(u, q)}. \quad (4)$$

Согласно формуле [1] (П.16) неравенство (4) следует из оценок типа

$$|K_{\rho^s}(u, v; \rho^t)| \leq \tau (\rho^{t-t_1}) \rho^{\frac{t+t_1}{2}}, \quad (5)$$

где  $\rho$  - простое число, о.н.д.  $(u, \rho^t) = \rho^{t_1}$ . Но оценка (5) непосредственно следует из формул замечаний 2 - 4 монографии [1] и неравенства [1] (П.63).

Лемма доказана.

Оценки (3) и им подобные имеют многочисленные приложения. В этой заметке мы остановимся на применении неравенства (3) к оценке коэффициентов, возникающих при разложении в ряд Фурье целых параболических модулярных форм данной размерности  $-S$ , где  $S \geq 2$  - целое число.

Определение модулярных форм и их основные свойства см., например, Гуннинг [7] (а также Гекке [8], [10] и Эйхлер [2], [4]). Для наших целей достаточно следующего характеристического свойства целых параболических модулярных форм, которое можно рассматривать как определение таких форм.

Пусть  $S$  и  $N$  - натуральные числа. Функция  $F(\tau)$  комплексного переменного  $\tau$ , заданная в верхней полуплоскости  $\text{Im } \tau > 0$ , есть целая параболическая модулярная форма (Spitzenform) размерности  $-S$  и степени  $N$ , если для каждой унимодулярной целочисленной подстановки

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad ad - bc = 1,$$

имеется ряд

$$\mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} e^{2\pi i \frac{\nu \tau}{N}}, \quad (6)$$

сходящийся при  $\text{Im } \tau > 0$ , для которого

$$F(\tau) = \frac{1}{(c\tau + d)^S} \mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}} \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right), \quad (7)$$

причем

$$\mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}}(\tau) = \mathcal{M}_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}(\tau), \quad \text{если } \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{N}. \quad (8)$$

В частности, при  $a = d = 1$ ,  $b = c = 0$  мы имеем ряд Фурье для целой параболической модулярной формы  $F(\tau)$ :

$$F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}} \quad (\text{Im } \tau > 0). \quad (9)$$

Задаче асимптотической (с ростом  $n$ ) оценки коэффициентов  $c_n$ , важной, в частности, для аналитической арифметики квадратичных форм<sup>ж</sup>), посвящены работы Гекке [9], Клостермана [11]. Эстермана [5], Салье [12] и Эйхлера [3].

Гекке [9] с помощью весьма простого рассуждения получили оценку

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2}}\right); \quad (10)$$

постоянные, входящие в  $O$ , здесь и далее зависят только от  $F$ .

Клостерман [11], используя свои исследования по суммам (1) и (2), получил оценку

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2} - \frac{1}{8} + \varepsilon}\right); \quad (11)$$

постоянная здесь зависит также и от произвольного  $\varepsilon > 0$ .

Доказательство Клостермана было несколько упрощено и уточнено Эстерманом [5].

---

<sup>ж</sup>) Об этом см., например, Гекке [9].

Салье [12] заметил, что метод Клостермана-Эстермана приводит к следующему общему результату:

Замечание. Если имеет место оценка

$$K_1(u, v; l, L; q) = O\left(q^{1-\beta+\varepsilon} \left\{ \text{o.n.g.}(u, q) \right\}^\beta\right),$$

то

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2} - \frac{\beta}{2} + \varepsilon}\right).$$

Поэтому всякий прогресс в оценках сумм (1) при  $\tau = 1$  влечет за собой уточнение оценок для коэффициентов Фурье  $c_n$  целых параболических модулярных форм. В частности, если использовать неулучшаемые (в смысле степени  $q$ ) оценки (3), то мы получаем следующее предложение (сразу формулируем его с небольшим уточнением):

Теорема. Пусть

$$F(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{2\pi i \frac{n\tau}{N}} \quad (\Im \tau > 0) \quad (14)$$

- целая параболическая форма размерности  $-S$  и степени  $N$ . Тогда

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2}-\frac{1}{4}} \ln^{\frac{3}{2}} n \sigma_{-\frac{1}{2}}(n)\right), \quad (15)$$

где  $\sigma_{-\frac{1}{2}}(n) = \sum_{m|n} m^{-\frac{1}{2}}$  ; постоянные, входящие в  $O$  , зависят только от  $F$ .

С помощью метода Клостермана-Эстермана нельзя снизить степень  $n$  , входящую в правую часть оценки (15). Однако есть основания предполагать, что

$$c_n = O\left(n^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right) \quad (16)$$

(и это есть истинный в смысле степени  $n$  порядок  $c_n$  ). В настоящее время оценка (16) доказана лишь для  $s=2$  Эйхлером [3] , которому понадобились для этого весьма тонкие соображения.

Для полноты изложения приведем доказательство теоремы (ср. Эстерман [5] , Салье [12] ).

Доказательство теоремы.  $\Gamma^0$ . Так как  $F(\tau)$  представляется рядом (9), то для любого фиксированного комплексного числа  $\tau_0$  с положительной мнимой частью

$$c_n = \frac{1}{N} \int_{\tau_0}^{\tau_0+N} F(\tau) e^{-2\pi i \frac{n\tau}{N}} d\tau. \quad (17)$$



Пусть  $\eta = \frac{1}{n}$  и  $M = [\sqrt{n}]$  (\*). Полагаем

$\tau_0 = \frac{1}{M+1} + i\eta$ . Тогда

$$c_n = \frac{e^{\frac{2\pi n\eta}{N}}}{N} \int_{\frac{1}{M+1}}^{\frac{1}{M+1} + N} F(z+i\eta) e^{-2\pi i \frac{nz}{N}} dz \quad (18)$$

Промежуток интегрирования  $\left[ \frac{1}{M+1}, \frac{1}{M+1} + N \right]$

разобьем медиантами  $M$ -ряда Фарея и представим интеграл (18) в виде сумм интегралов по полученным интервалам Фарея:

$$c_n = \frac{e^{\frac{2\pi n\eta}{N}}}{N} \sum_{q=1}^M \sum_{\substack{0 < h \leq Nq \\ \text{н.г.}(h, q) = 1}} e^{-2\pi i \frac{nh}{Nq}} \int_{\frac{1}{q(q+q_2)}}^{\frac{1}{q(q+q_1)}} F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right) e^{-2\pi i \frac{n\theta}{N}} d\theta, \quad (19)$$

---

(\*). Далее в п.п.  $\Gamma^0-5^0$   $\eta > 0$  можно предполагать произвольным вещественным, а  $M \geq 0$  - произвольным целым числом.

где

$$\left. \begin{aligned} q_1 &\equiv -h^{-1(\bmod q)} \pmod{q} \quad (\mathcal{M}-q < q_1 \leq \mathcal{M}), \\ q_2 &\equiv h^{-1(\bmod q)} \pmod{q} \quad (\mathcal{M}-q < q_2 \leq \mathcal{M}). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Обозначая

$$c_{n,q} = \sum_{\substack{0 < h \leq Nq \\ \text{о.н.г.}(h,q)=1}} e^{-2\pi i \frac{nh}{Nq}} \int_{\frac{1}{q(q+q_1)}}^{\frac{1}{q(q+q_2)}} F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right) e^{-2\pi i \frac{n\theta}{N}} d\theta, \quad (21)$$

будем иметь

$$c_n = \frac{e^{\frac{2\pi i n^2}{N}}}{N} \sum_{q=1}^{\mathcal{M}} c_{n,q}. \quad (22)$$

2°. Изучим функцию

$$g_{\mu, q}(\theta, h) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } -\frac{1}{q(q+q_2)} \leq \theta < \frac{1}{q(q+q_1)}, \\ 0, \text{ в противном случае,} \end{array} \right\}, \quad (23)$$

нужную нам для дальнейших преобразований (для перестановки суммирования и интегрирования в формуле (21)).

Пусть

$$h_0 = h_0(0, q, \mu) = \left[ \frac{1}{q|\theta|} \right] - \mu. \quad (24)$$

Рассмотрим вспомогательную функцию  $\gamma(m)$ , заданную для всех целых  $m$ , имеющую период  $q$ :

$$\gamma(m+q) = \gamma(m), \quad (25)$$

и определенную для  $0 < m \leq q$  равенством:

$$\gamma(m) = \gamma_{n_0}(m) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } 0 < m \leq h_0, \\ 0, \text{ если } h_0 < m \leq q. \end{array} \right\} \quad (26)$$

Тогда

$$\gamma(m) = \sum_{k=1}^q a_k e^{2\pi i \frac{km}{q}}, \quad (27)$$

где

$$a_{\kappa} = \frac{1}{q} \sum_{\ell=1}^q \gamma(\ell) e^{-2\pi i \frac{\kappa \ell}{q}} = \frac{1}{q} \sum_{\ell=1}^{h_0} e^{-2\pi i \frac{\kappa \ell}{q}} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{h_0}{q}, \text{ если } \kappa = q, \\ \frac{1}{q} \frac{1 - e^{-2\pi i \frac{\kappa h_0}{q}}}{e^{-2\pi i \frac{\kappa}{q}} - 1}, \text{ если } 1 \leq \kappa < q. \end{array} \right. \quad (28)$$

Поэтому

$$\sum_{\kappa=1}^q |a_{\kappa}| \leq 1 + \sum_{\kappa=1}^{q-1} \frac{2}{q |e^{-2\pi i \frac{\kappa}{q}} - 1|} = 1 + \sum_{\kappa=1}^{q-1} \frac{1}{q \sin \frac{\pi \kappa}{q}} \leq 1$$

$$+ \frac{2}{q} \sum_{\kappa=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{1}{\sin \frac{\pi \kappa}{q}} \leq 1 + \sum_{\kappa=1}^{\left[\frac{q}{2}\right]} \frac{1}{\kappa} < \ln(4q). \quad (29)$$

Теперь докажем, что

$$g = g_{\mathcal{M}, q}(\theta, h) = \sum_{\kappa=1}^q b_{\kappa} e^{2\pi i \frac{\kappa h^{-1} \pmod{q}}{q}}, \quad (30)$$

где

$$b_{\kappa} = b_{\kappa}(\theta; \mathcal{M}, q) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad - \text{ в случае } |\theta| > \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)} ; \\ 1 \text{ при } \kappa=q \text{ и } 0 \text{ при } 1 \leq \kappa < q - \\ \quad - \text{ в случае } |\theta| \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+q)} ; \\ a_{\kappa} e^{-2\pi i \frac{\kappa \mathcal{M}}{q}} \quad - \text{ в случае } -\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)} \leq \theta < -\frac{1}{q(\mathcal{M}+q)} ; \\ a_q \text{ при } \kappa=q \text{ и } a_{q-\kappa} e^{2\pi i \frac{\kappa \mathcal{M}}{q}} \quad \text{при } 1 \leq \kappa < q - \\ \quad - \text{ в случае } \frac{1}{q(\mathcal{M}+q)} < \theta \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)} \end{array} \right\} \quad (31)$$

Действительно, по определению  $\mathcal{M}$ -ряда Фарея

$$\frac{1}{q(\mathcal{M}+q)} \leq \frac{1}{q(q+q_2)} \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}, \quad \frac{1}{q(\mathcal{M}+q)} \leq \frac{1}{q(q+q_2)} \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)} \quad (32)$$

Поэтому

$$g = \begin{cases} 0, & \text{если } |\theta| > \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}, \\ 1, & \text{если } |\theta| \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+q)}. \end{cases}$$

Отсюда мы выводим справедливость формулы (31) в первых двух случаях.

Если  $\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)} < |\theta| \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+q)}$ , то по определению  $\gamma(m)$  и формулам (20)

$$g = \begin{cases} \gamma(h^{-1(\bmod q)} - \mathcal{M}), & \text{если } -\frac{1}{q(\mathcal{M}+1)} \leq \theta < -\frac{1}{q(\mathcal{M}+q)}, \\ \gamma(-h^{-1(\bmod q)} - \mathcal{M}), & \text{если } \frac{1}{q(\mathcal{M}+q)} < \theta \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}. \end{cases}$$

Отсюда мы выводим справедливость формулы (31) в остальных двух случаях.

Формулы (31) и неравенство (29) нам дают:

$$\sum_{k=1}^q |b_k| < \ln(4q). \quad (33)$$

3<sup>0</sup>. Продолжаем изучение  $c_{n,q}$ . Формулу (21) с учетом определения  $g_{\mu,q}(\theta, h)$  и неравенств (32) мы можем переписать так:

$$c_{n,q} = \sum_{\substack{0 < h \leq Nq \\ \text{о.н.г.}(h, q) = 1}} \int_{-\frac{1}{q(\mu+1)}}^{\frac{1}{q(\mu+1)}} g_{\mu,q}(\theta, h) e^{-2\pi i \frac{nh}{Nq}} F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right) e^{-2\pi i \frac{n\theta}{N}} d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{1}{q(\mu+1)}}^{\frac{1}{q(\mu+1)}} \left\{ e^{-2\pi i \frac{n\theta}{N}} \sum_{\substack{0 < h \leq Nq \\ \text{о.н.г.}(h, q) = 1}} g_{\mu,q}(\theta, h) e^{-2\pi i \frac{nh}{Nq}} F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right) \right\} d\theta =$$

$$= \int_{-\frac{1}{q(\mu+1)}}^{\frac{1}{q(\mu+1)}} e^{-2\pi i \frac{n\theta}{N}} d_{n,q}(\theta) d\theta, \quad (34)$$

где обозначено:

$$d_{n,q}(\theta) = \sum_{\substack{0 < h \leq Nq \\ \text{о.н.г.}(h, q) = 1}} g_{\mu,q}(\theta, h) e^{-2\pi i \frac{nh}{Nq}} F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right). \quad (35)$$

4°. Теперь изучаем  $d_{n,q}(\theta)$ . Запишем:

$$d_{n,q}(\theta) = \sum_{\substack{0 < \ell \leq N \\ \text{o.n.g.}(\ell, q, N) = 1}} d_{n,q}^{(\ell)}(\theta), \quad (36)$$

где

$$d_{n,q}^{(\ell)}(\theta) = \sum_{\substack{0 < h \leq qN \\ \text{o.n.g.}(h, q) = 1 \\ h \equiv \ell \pmod{N}}} g_{\mu, q}(\theta, h) e^{-2\pi i \frac{nh}{Nq}} F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right). \quad (37)$$

Пусть фиксированы  $N$ ,  $q$  и  $\ell$ . Обозначим:

$$\text{o.n.g.}(\ell, N) = \delta, \quad \ell = \delta \ell', \quad N = \delta N'$$

Тогда, так как  $h \equiv \ell \pmod{N}$  и о.н.д.  $(h, q) = 1$ , то

$$\begin{aligned} \text{o.n.g.}(h, N) &= \text{o.n.g.}(\ell, N) = \delta, \quad h = \delta h', \quad \text{o.n.g.}(\delta, q) = \text{o.n.g.}(\ell', N') = \\ &= \text{o.n.g.}(h', N') = 1, \quad h' \equiv \ell' \pmod{N'}. \end{aligned}$$



Теперь формулу (37) можно переписать так:

$$d^{(\ell)} = \sum_{\substack{0 < h' \leq qN' \\ \text{o.n.g.}(h', qN')=1 \\ h' \equiv \ell' \pmod{N'}} g_{\mu, q}(\theta, h) e^{-2\pi i \frac{nh'}{N'q}} F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right) \quad (38)$$

5°. Пусть

$$\frac{h}{q} + \theta + i\eta = \tau, \quad \theta + i\eta = \omega, \quad \frac{h}{q} + \omega = \tau.$$

К функции  $F(\tau)$  применим тождество (7), следующим образом подбирая целочисленную унимодулярную подстановку  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ :

$$c = q,$$

$$d = -h = -\delta h',$$

$$a = -\delta \left(\delta^{-1} \pmod{q}\right)^2 \cdot h' \cdot -1 \pmod{qN'}$$

$$b = \frac{ad-1}{c} = \frac{\delta^2 \left(\delta^{-1} \pmod{q}\right)^2 h' \cdot h'^{-1} \pmod{qN'} - 1}{q}$$

(39)

Так как  $ad-1 \equiv \delta^2 (\delta^{-1} \pmod{q})^2 h' \cdot h'^{-1} \pmod{q} - 1 \equiv$   
 $\equiv \pmod{q}$ , то  $b$  - целое число. По построению  $b$   
 целочисленная подстановка  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  унимодулярна:  $ad-bc=1$ .

Подстановка  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  определяется числами  $N, q$  и  $h$ . Однако заметим, что если  $h_1 \equiv h \equiv \ell \pmod{N}$  и числам  $N, q, h_1$  отвечает по формулам (39) подстановка  $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ , то

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{N},$$

так что класс  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pmod{N}$ , задаваемый формулами (39),  
 определяется числами  $N, q$  и классом вычетов  $\ell \pmod{N}$ .  
 Действительно:

$$c_1 = c = q,$$

$$d_1 \equiv d \equiv -\ell \pmod{N},$$

$$a_1 \equiv a \equiv -(\delta^{-1} \pmod{q})^2 \delta \ell^{-1} \pmod{N'} \pmod{N},$$

$$b_1 \equiv b \equiv \frac{\delta^2 (\delta^{-1} \pmod{q})^2 - 1}{q} \pmod{N}.$$

Поэтому функция  $\mathcal{M} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\tau)$  определяется (при фиксированных  $N$  и  $q$ ) числом  $\ell \pmod{N}$ . Поэтому далее обозначаем:

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} (\tau) = \mathcal{M}_\ell(\tau), \quad a_\nu \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a_\nu^{(\ell)} \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Замечая, что

$$c\tau + d = c \left( -\frac{d}{c} + \omega \right) + d = c\omega = q\omega,$$

$$\frac{a\tau + b}{c\tau + d} = \frac{a}{c} - \frac{1}{c(c\tau + d)} = -\frac{\delta(\delta^{-1} \pmod{q})^2 h'^{-1} \pmod{qN'}}{q} - \frac{1}{q^2\omega},$$

и применяя формулу (7), получаем:

$$F\left(\frac{h}{q} + \theta + i\eta\right) = \frac{1}{(q\omega)^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^{(\ell)} e^{-2\pi i \frac{\nu(\delta^{-1} \pmod{q})^2 h'^{-1} \pmod{qN'}}{qN'}} - \frac{2\pi i \nu}{q^2\omega N} \quad (40)$$

Подставим выражение (40) в формулу (38) для  $d^{(\ell)}$ . Тогда, учитывая (30), получим:

$$d^{(e)} = \frac{1}{(q\omega)^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^{(e)} e^{-\frac{2\pi i \nu}{q}} \sigma_{\nu}^{(e)}(N, \mu, q; \theta, h), \quad (41)$$

где

$$\sigma_{\nu}^{(e)}(N, \mu, q; \theta, h) = \sum_{\substack{0 < h' \leq qN' \\ \text{o.n.g.}(h', qN')=1 \\ h' \equiv \ell' \pmod{N'}} g_{\mu, q}(\theta, h) e^{-2\pi i \frac{h h' + \nu (\delta^{-1} \pmod{q})^2 h'^{-1} \pmod{qN'}}{qN'}} =$$

$$= \sum_{\kappa=1}^q b_{\kappa} K_{\kappa}(-n, -\nu) (\delta^{-1} \pmod{q})^2 + \kappa N' \delta^{-1} \pmod{q}; \ell', N'; q N'. \quad (42)$$

6°. Равенство (42) и оценки (3) и (33) нам дают неравенство

$$|\sigma_{\nu}^{(e)}| < \ln(4q) \tau \left( \frac{qN'}{\text{o.n.g.}(n, qN')} \right) \sqrt{qN'} \sqrt{\text{o.n.g.}(n, qN')} <$$

$$< A_1 \ln n \cdot \tau \left( \frac{q}{\text{o.n.g.}(n, q)} \right) \cdot \sqrt{q} \cdot \sqrt{\text{o.n.g.}(n, q)},$$

где  $A_1$  (равно как в дальнейшем  $A_2, A_3, \dots$ ) - постоянная, зависящая только от  $F$ .

Поэтому

$$|d^{(e)}| < A_1 \ln n \cdot \tau\left(\frac{q}{o.n.g.(n,q)}\right) \sqrt{q} \sqrt{o.n.g.(n,q)} \times \frac{1}{|q\omega|^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}| e^{-\frac{2\pi\nu}{n|q\omega|^2 N}} \quad (44)$$

Пусть теперь  $|\theta| \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}$ . Тогда

$$\frac{2\pi}{n|q\omega|^2 N} = \frac{2\pi}{n\left(q\theta^2 + \frac{q^2}{n^2}\right)N} \geq \frac{2\pi}{n\left(\frac{1}{(\mathcal{M}+1)^2} + \frac{q^2}{n^2}\right)N} \geq \frac{2\pi}{n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)N} = \frac{\pi}{N},$$

а потому

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}| e^{-\frac{2\pi(\nu-1)}{n|q\omega|^2 N}} \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}| e^{-\pi(\nu-1)N} < A_2,$$

ибо для каждого  $\ell$  ряд  $\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}| e^{-\pi(\nu-1)N}$

сходится, а количество  $\ell \pmod{N}$  ограничено числом  $N$ . Далее, так как  $x^{\frac{s}{2}} e^{-\frac{2\pi x}{N}} < A_3$  при  $x > 0$ , то

$$n^{-\frac{s}{2}} |q\omega|^{-s} e^{-\frac{2\pi}{n|q\omega|^2 N}} < A_3 .$$

Из двух последних оценок выводим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|q\omega|^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}| e^{-\frac{2\pi\nu}{n|q\omega|^2 N}} &= \frac{e^{-\frac{2\pi}{n|q\omega|^2 N}}}{|q\omega|^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_{\nu}^{(e)}| e^{-\frac{2\pi(\nu-1)}{n|q\omega|^2 N}} < \\ < A_3 n^{\frac{s}{2}} \cdot A_2 < A_4 n^{\frac{s}{2}} \end{aligned} \quad (45)$$

Оценки (44) и (45) нам дают (при  $|\theta| \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}$  )

$$|d^{(e)}| < A_5 n^{\frac{s}{2}} \ln n \cdot \tau \left( \frac{q}{o.n.g.(n,q)} \right) \sqrt{q} \sqrt{o.n.g.(n,q)} \quad (46)$$

Откуда по формуле (36) (при  $|\theta| \leq \frac{1}{q(\mathcal{M}+1)}$  )

$$|d_{n,q}(\theta)| < A_6 n^{\frac{s}{2}} \ln n \cdot \tau \left( \frac{q}{o.n.g.(n,q)} \right) \sqrt{q} \sqrt{o.n.g.(n,q)} \quad (47)$$

Из формул (34), (22) и оценки (47) выводим:

$$\begin{aligned}
 |s_n| &< A_7 n^{\frac{s-1}{2}} \ln n \sum_{q=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \tau \left( \frac{q}{o.n.g.(n,q)} \right) \frac{\sqrt{o.n.g.(n,q)}}{\sqrt{q}} = \\
 &= A_7 n^{\frac{s-1}{2}} \ln n \sum_{\substack{t|n \\ t \leq \sqrt{n}}} \sum_{\substack{q_1 \leq \frac{\sqrt{n}}{t} \\ o.n.g.(q_1, \frac{n}{t})=1}} \tau(q_1) \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}q_1} \leq \\
 &\leq A_7 n^{\frac{s-1}{2}} \ln n \sum_{t|n} \sum_{q \leq \frac{\sqrt{n}}{t}} \frac{\tau(q_1)}{\sqrt{q_1}} \leq \\
 &\leq A_8 n^{\frac{s-1}{2}} \ln n \sum_{t|n} \left( \frac{\sqrt{n}}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \ln^{\frac{1}{2}} n = \\
 &= A_8 n^{\frac{s-1}{2} - \frac{1}{4}} \ln^{\frac{3}{2}} n \sigma_{-\frac{1}{2}}(n).
 \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Литература

- [1] Малышев А.В. О представлении целых чисел положительными квадратичными формами. Тр. Матем. инст. АН СССР, 1962, 65 212.
- [2] Eichler M., Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin, 1952, 220.
- [3] Eichler M., Quaternäre quadratische Formen und die Riemannsche Vermutung für die Kongruenzzetafunktion, Arch. der math. W 1954, 5, 355-366.
- [4] Eichler M., Quadratische Formen und Modulfunctionen. Acta Arithm., 1958, 4, 217-239.
- [5] Estermann T., Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman. Abh. Math. Seminar Hamburg. Univ., 1929, 7, 82-90
- [6] Estermann T., On Kloosterman's sum. Mathematika. 1961, 2, 83-86.
- [7] Gunning R.G., Lectures on modular forms. Princeton, 1962, I-86
- [8] Hecke E., Zur Theorie der elliptischen Modulfunctionen, Math. Ann., 1926, 9, 210-242; Math. Werke, 1959, 428-460.
- [9] Hecke E., Theorie der Eisensteinschen Reihen Höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abh. Math. Seminar Hambur. Univ., 1927, 5, 199-224; Math. Werke, 1959, 461-486.
- [10] Hecke E., Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen. Kgl. Danske Vidensk Selskeb, matn.-fys. Medd. 1940, 13, N 12, 1-134; Math. Werke, 1959, 789-918.



- [11]. Kloostermann H.D., Asymptotische Formeln für die Fourierkoeffizienten ganzen Modulformen. Abh. Math. Seminars Hamburg. Univ., 1927, 5, 337-352.
- [12]. Salie H., Zur Abschätzung der Fourierkoeffizienten ganzer Modulformen. Math. Z., 1932, 36, 263-278.
-