Л. В. Розовский, Вероятности больших уклонений на всей оси,
Теория вероятн. и ее примен., 1993, том 38, выпуск 1, 79–109

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
Том 38 И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ Выпуск 1
1993

 РОЗОВСКИЙ Л. В.

ВЕРОЯТНОСТИ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ НА ВСЕЙ ОСИ

1. Введение. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых случайных величин с общей функцией распределения V из области притяжения стандартного нормального распределения Φ;

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n \quad (n \geqslant 1).$$

В настоящей статье при некоторых ограничениях довольно общего вида на хвост $1 - V(x)$ найдено асимптотическое (при $n \to \infty$) представление вероятности $\mathrm{P}\{S_n > x\}$, относительная погрешность которого стремится к нулю равномерно по всем x. Полученные результаты, помимо прочего, позволяют ответить на вопросы акад. Ю. В. Линника [1] о нахождении новых систем "предельных хвостов", отличных от системы "предельных хвостов" Г. Крамера, и отыскании возможно более широкого класса распределений V, для которых справедливы интегральные теоремы о больших уклонениях, действующие на всей оси.

Поиском условий, при которых

$$\mathrm{P}\{S_n > x\} = \pi_n(x)\big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty, \tag{1}$$

равномерно по $x \in A_n$, где A_n — конечный или бесконечный интервал, а $\pi_n(x)$ — некоторая асимптотика, зависящая от распределения V, давно и плодотворно занимаются многие математики. Большинство публикаций (см. библиографию в [2]) относится к случаю, когда в (1)

$$\pi_n(x) = 1 - \Phi(x/\sqrt{n}) \quad \text{или} \quad \pi_n(x) = \big(1 - \Phi(x/\sqrt{n})\big) \exp\left\{\sum_{\nu=0}^{\cdots} \lambda_\nu \frac{x^{\nu+3}}{n^{\nu+2}}\right\},$$

где $\{\lambda_\nu\}$ — некоторые постоянные, множество A_n имеет вид $(0, \Lambda_n)$, а последовательность Λ_n растет к бесконечности с не слишком большой скоростью (как правило, $\Lambda_n/n \to 0$); асимптотики $\pi_n(x)$ другого, в том числе более общего, вида изучались в [3]–[8].

Полученные результаты в рассмотренной выше ситуации доказывались в предположении об определенной, связанной с ростом Λ_n, скорости убывания хвоста $1 - V(x)$ при $x \to +\infty$.

В другой группе работ анализируется соотношение (1) при $A_n = (\Lambda^{(n)}, \infty)$. Наиболее глубоко изучен случай $\pi_n(x) = n(1 - V(x))$ — соответствующую библиографию и наиболее продвинутые результаты можно найти в [9] (см. также [10]). Отличные от $n(1-V(x))$ асимптотики исследовались в [11]–[13] и, отчасти, в [8].

Основным предположением, при котором справедливо соотношение (1) в случае $A_n = [\Lambda^{(n)}, \infty)$, является требование "правильности" поведения хвоста $1 - V(x)$.

Соответствующая комбинация упомянутых результатов позволяет сформулировать условия, при которых (1) выполняется в области $A_n = (0, \infty)\backslash(\Lambda_n, \Lambda^{(n)})$. К сожалению, как правило, $\Lambda^{(n)}/\Lambda_n \to \infty$, и поэтому проблема больших уклонений на $(0, \infty)$ требует для своего решения более тонких методов (более детальное обсуждение этого вопроса можно найти в [14]).

Перечислим публикации, в которых приведены условия выполнения соотношений типа (1) в области $x \geqslant 0$. Помимо работы [15], это [16]–[18], [8] и, в известной мере, [19], [21] (напоминаем, что (1) исследуется в рамках центральной предельной теоремы). В [16] и [8] (см. также [20]) предполагается достаточно правильное степенное убывание хвоста $1 - V(x)$ (в [16], например, $1 - V(x) \sim h(x)/x^\alpha$ при $x \to \infty$, где функция $h(x)$ медленно меняется, $\alpha > 2$; в [17] — $1 - V(x) \sim cx^a e^{-x\delta}$, $x \to \infty$, где c, a, δ — постоянные, причем $0 < \delta < 1$. Заметим, что существенно обобщающие [17] результаты из [12], [13] не являются исчерпывающими (зоны больших уклонений не перекрывают всю положительную полуось).

Основное асимптотическое соотношение для $\mathbf{P}\{S_n > x\}$ в настоящей работе доказывается при условии

$$1 - V(x) \asymp \frac{D(x)}{x^2} e^{-g(x)}, \quad x \to +\infty, \tag{2}$$

где $D(x) = \int_{|y|<x} y^2\, dV(y)$, $g(x)$ — такая положительная стремящаяся к бесконечности функция, что

$$g(x)/x^\delta \quad \text{не возрастает при } x > x_0 \text{ и некотором } \delta < 1 \tag{3}$$

(определенные комментарии к условию (2) содержатся в п. 2).

Полученный результат выгодно отличается от ранее известных отсутствием излишних предположений о левом хвосте распределения V и слабыми ограничениями для его правого хвоста, а также возможностью не предполагать ограниченность дисперсии у случайной величины X_1. Кроме того, использованная при доказательствах методика более, чем какая-либо другая, адекватна решаемой задаче.

2. Основные результаты. Всюду на протяжении настоящего параграфа будем предполагать, что

$$\mathbf{P}\{S_n < xB_n\} \longrightarrow \Phi(x), \tag{4}$$

где $\{B_n\}$ — некоторая положительная последовательность. Как известно (см., например, [1]), из (4) следует, что $\mathbf{E}\,X_1 = 0$ и $B_n \to \infty$, $nD(B_n) =$

$(1+o(1))B_n^2$ при $n\to\infty$, причем функция $D(z)$ медленно меняется при $z\to\infty$, или, что равносильно, $1-V(z)+V(-z)=o(D(z)/z^2)$, $z\to\infty$.

Положим

$$L(h)=\int_{-\infty}^{B_n} e^{hy}\,dV(y),\qquad Q(z)=\inf_{h>0}\bigl(n\ln L(h)-zh\bigr),$$
$$\pi(z)=\bigl(1-\Phi(z/B_n)\bigr)I[z\leqslant B_n]+\tau\Bigl(\sqrt{zh_*(z/n)}\Bigr)e^{Q(z)}I[z>B_n]. \tag{5}$$

Здесь, как и в дальнейшем, $I[\cdots]$ — индикатор множества $[\cdots]$, $\tau(z)=(1-\Phi(z))e^{z^2/2}$, $h_*(a)$ — положительная функция, удовлетворяющая условию

$$h_*(a)D\bigl(1/h_*(a)\bigr)=\bigl(1+o(1)\bigr)a \quad \text{при } a\to+0 \tag{6}$$

(некоторые свойства функций L, Q, h_* описаны в [8]).

Пусть выполнено условие (3), $\{\varkappa_n\}$ — такая положительная последовательность, что

$$\frac{\varkappa_n}{g(\varkappa_n)}h_*\Bigl(\frac{\varkappa_n}{n}\Bigr)\asymp 1 \quad \text{при } n\to\infty, \tag{7}$$

ω_n — решение уравнения

$$g(y)/y^2=\eta h_*\Bigl(\frac{\varkappa_n}{n}\Bigr)\Big/\varkappa_n, \tag{8}$$

$\eta\in(0,\,\frac12)$ — произвольная постоянная.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* (2) *и* (3). *Тогда равномерно по всем* x

$$\mathbf{P}\{S_n\geqslant x\}=\Biggl(\pi(x)I[x\leqslant\lambda]$$
$$+n\int_{\max(B_n,x-\lambda)}^{\infty}|\pi'(x-y)|\bigl(1-V(y)\bigr)\,dy\Biggr)\bigl(1+o(1)\bigr),\quad n\to\infty. \tag{9}$$

Здесь λ *— произвольная величина из интервала* $[\omega_n,\,\Lambda_n]$, *где* ω_n *определена в* (8), *а*

$$\Lambda_n=\alpha B_n g(B_n)D\bigl(B_n/g(B_n)\bigr)\Big/D(B_n), \tag{10}$$

$\alpha\in(0,\,1)$ *— любая постоянная.*

Разумеется, если $x\leqslant\mathrm{const}\,B_n$, то (9) вытекает из (4).

Замечание. Формально в теореме 1 никаких ограничений на поведение функции распределения V при $x<0$ не накладывается, однако неявно такие ограничения содержатся в условии (4). Легко понять, что распределения V, для которых справедливо соотношение (9), должны, помимо условия (2), удовлетворять также условию (см. (4) и ниже)

$$V(-z)=o\bigl(D(z)/z^2\bigr),\quad z\to\infty. \tag{11}$$

Можно показать, что класс распределений V, удовлетворяющих системе условий (2), (11), содержит те (и только те) распределения, которые при всех достаточно больших положительных x допускают представление

$$1 - V(x) = \frac{\varepsilon_+(x)}{x^2}\widetilde{D}(x), \qquad V(-x) = \frac{\varepsilon_-(x)}{x^2}\widetilde{D}(x),$$

где $0 \leqslant \varepsilon_-(x) \to 0$, $\varepsilon_+(x) \asymp e^{-g(x)}$ при $x \to \infty$, $\widetilde{D}(x) = \exp\left\{\int_1^x u^{-1} \times (\varepsilon_+(u) + \varepsilon_-(u))du\right\}$. Отметим, что если $\int_{-\infty}^0 y^2\, dV(y) < \infty$, то условие (11) выполняется независимо от (2), условие же (2) в случае (4) равносильно соотношению

$$1 - V(x) \asymp x^{-2} e^{-g(x)} \int_0^x y^2\, dV(y), \quad x \to \infty,$$

т.е. не зависит от поведения V на отрицательной полуоси.

Теорему 1 можно сформулировать в следующем более информативном виде.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия* (2), (3) *и пусть* (*см.* (7))

$$C_n = \min_{y \geqslant B_n} y\left(\frac{1}{2} + \frac{g(y)}{y^2}\frac{\varkappa_n}{h_*(\varkappa_n/n)}\right). \tag{12}$$

Тогда при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ *равномерно по всем* x

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = \Bigg(&\pi(x) I[x \leqslant (1+\varepsilon)C_n] \\ &+ n\int_{\max(B_n, x-\lambda)}^{\infty} (1 - V(y))\left|\pi'(x-y)\right| dy \\ &\times I[x \geqslant (1-\varepsilon)C_n]\Bigg)(1 + o(1)), \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

где $\lambda \in [\omega_n, \Lambda_n]$ (*см.* (8), (10)).

Другими словами (*обращаем внимание на то, что* $C_n \leqslant (1/2 + \eta)\omega_n$), *при условиях* (2)–(4) *и* $n \to \infty$ *для любого положительного* ε

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = \pi(x)\big(1 + o(1)\big), \quad x \leqslant (1-\varepsilon)C_n, \tag{13a}$$

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = \left(\pi(x) + n\int_{B_n}^{\infty}\left|\pi'(x-y)\right|\big(1 - V(y)\big)\, dy\right)\big(1 + o(1)\big),$$
$$(1-\varepsilon)C_n \leqslant x \leqslant (1+\varepsilon)C_n, \tag{13b}$$

и

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = n\int_{\max(B_n, x-\lambda)} &\left|\pi'(x-y)\right| \\ &\times \big(1 - V(y)\big)\, dy\big(1 + o(1)\big), \quad x \geqslant (1+\varepsilon)C_n. \end{aligned} \tag{13c}$$

Отметим, что соотношение (13a), вообще говоря, вытекает из результатов [8].

Замечание 1. Пусть функция $\eta(z)$ удовлетворяет условию

$$\eta^2(z)\Big/g\big(\eta(z)\big) = \big(1+o(1)\big)z^2, \quad z \to \infty. \tag{14}$$

В [8] показано, что если выполнено соотношение

$$D(z) = \big(1+o(1)\big)D\big(z^2/\eta(z)\big), \quad z \to \infty, \tag{15}$$

то при $n \to \infty$

$$h_*(z/n) \sim z/B_n^2, \tag{16}$$

$$\pi(z) \sim \widetilde{\pi}(z) = \tau(z/B_n)e^{Q(z)}, \tag{17a}$$

$$\pi'(z) \sim \widetilde{\pi}'(z) \sim -\frac{1}{B_n\sqrt{2\pi}}e^{Q(z)} \tag{17b}$$

равномерно по $z \in [B_n, \gamma\eta(B_n)]$ при любом $\gamma > 0$.

Из замечания 1 следует, что при довольно естественном (см. [8]) предположении (15) формулировки теорем 1 и 2 допускают некоторые упрощения: согласно (16) в соотношениях (8) и (12) $\varkappa_n/h_*(\varkappa_n/n)$ можно заменить на B_n^2, в силу (17) $n\int_{\max(B_n,x-\lambda)}^{\infty}(1-V(y))|\pi'(x-y)|\,dy$ заменяется на

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_n(x) = {} & \frac{n}{B_n}\int_{x-B_n}^{\infty}\big(1-V(y)\big)\Phi'\left(\frac{x-y}{B_n}\right)dy \\ & + \frac{n}{B_n\sqrt{2\pi}}\int_{\max(B_n,x-\lambda)}^{\infty}\big(1-V(y)\big)e^{Q(x-y)}dy.\end{aligned} \tag{18}$$

Если выполняется условие (15) и функция $g(y)$ правильно меняется при $y \to \infty$ с показателем $\alpha \in [0, 1)$, то в формулировках теорем 1 и 2 можно положить

$$C_n = (2-\alpha)(2-2\alpha)^{-(1-\alpha)/(2-\alpha)}\eta(B_n). \tag{19}$$

Теоремы 1 и 2, в силу их известной общности, представляют собой идеальную отправную точку для получения разнообразных более просто и наглядно формулируемых следствий.

Вначале исследуем асимптотическое поведение функции $\pi(x)$. Обозначим через $\omega(z)$ функцию, обратную к $z^2/\eta(z)$ (см. (14)).

Лемма 1a. *Пусть выполняется условие* (2), *причем функция* $g(y)/y^\delta$ *не возрастает при всех достаточно больших* y *и некотором* $0 < \delta < 1/2$. *Соотношение* (*см.* (7))

$$\pi(x) = \big(1-\Phi(x/B_n)\big)\big(1+o(1)\big), \quad B_n \leqslant x \leqslant \gamma\varkappa_n, \quad n \to \infty,$$

выполняется при некоторой постоянной $\gamma > 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &\frac{z^2}{D(z)} V(-z) = o\bigl(z/\omega(z)\bigr)^2, \quad z \to \infty, \\ &\frac{n}{B_n^2} D\bigl(B_n^2/\eta(B_n)\bigr) = 1 + o\Bigl(1/g\bigl(\eta(B_n)\bigr)\Bigr), \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{20}$$

В частности, если $B_n = \sqrt{n}$, *то условия* (20) *равносильны соотношениям*

$$\mathbf{E}\, X_1^2 = 1 \quad \text{и} \quad \int_{|y|>z} y^2\, dV(y) = o\bigl(z/\omega(z)\bigr)^2, \quad z \to \infty; \tag{21}$$

если же

$$\frac{n}{B_n^2} \int_0^{B_n} 2u\, \mathbf{P}\,\bigl\{|X_1| > u\bigr\}\, du = 1, \tag{22}$$

то (20) *равносильно условию*

$$\frac{1}{D(z)} \int_{z^2/\eta(z)}^{z} uV(-u)\, du = o\bigl(1/g\bigl(\eta(z)\bigr)\bigr), \quad z \to \infty. \tag{23}$$

Лемма 1b. *Пусть выполняются условия* (2), (3) *и* $B_n = \sqrt{n}$. *Пусть, кроме того,*

$$k = \max\bigl\{l \in \{0, 1, \dots\}\colon \limsup_{z\to\infty} g(z)/z^{l/(l+1)} > 0\bigr\} \geqslant 1$$

и $\mathbf{E}\, \max(0, X_1)^{k+2} < \infty$; *а* $\{\mu_\nu\}$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$, — *некоторые постоянные. Тогда соотношение*

$$\begin{aligned} &\pi(x) = \bigl(1 - \Phi(x/\sqrt{n})\bigr) \exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k} \mu_\nu \frac{x^{\nu+2}}{n^{\nu+1}}\right\}\bigl(1 + o(1)\bigr), \\ &B_n \leqslant x \leqslant \gamma\eta(\sqrt{n}), \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

при некоторой постоянной $\gamma > 0$ *равносильно условиям*

$$\mathbf{E}\, X_1 = 0, \quad \mathbf{E}\, X_1^2 = 1, \quad \mathbf{E}\, |X_1|^{k+2} < \infty, \quad \mu_\nu = \lambda_{\nu-1} \quad (1 \leqslant \nu \leqslant k), \tag{23a}$$

$$\begin{aligned} z^{-1}\left|\int_{|y|>z} y^{k+1} dV(y)\right| + \left|\int_{|y|>z} y^{k+2} dV(y)\right| \\ + z\left|\int_{|y|\leqslant z} y^{k+3} dV(y)\right| = o\bigl(z^{k+2}/\omega^2(z)\bigr), \quad z \to \infty. \end{aligned} \tag{23b}$$

Здесь $\{\lambda_\nu\}$ — *коэффициенты ряда Крамера* ([2]).

Заметим, что если $\mathbf{E}\, |X_1|^{k+3} < \infty$, то условие (23b) выполняется.

Леммы 1a и 1b задают оптимальные условия, при которых в формулировках теорем 1 и 2 (см. (9), (13) и замечание 1) $\pi(x)$, $\pi'(x)$ можно заменить на $\pi_0(x)$, $\pi_0'(x)$ при $\pi_0(x) = 1 - \Phi(x/B_n)$ и $\pi_0(x) = (1 -$

$\Phi(x/\sqrt{n}))\exp\left\{\sum_{\nu=1}^{k}\mu_\nu \frac{x^{\nu+2}}{n^{\nu+1}}\right\}$ соответственно. (В условиях лемм 1a и 1b соотношение (15) имеет место.)

Перейдем к асимптотическому анализу второго слагаемого в равенстве (9). Заменим условие (2) более ограничительным предположением

$$1 - V(y) = H(y)\frac{D(y)}{y^2}e^{-g(y)}, \quad y \geqslant y_0, \tag{24}$$

где $H(y)$ — такая функция, что при $y \to \infty$

$$H(y) \asymp 1, \quad H\big(y + o(y)\big) = H(y) + o(1). \tag{25}$$

Отметим, что условию (25) удовлетворяют не только функции $H(y)$ const, но и некоторые осциллирующие функции ($2 + \sin\ln y$, например).

Пусть в дальнейшем (см. теорему 1)

$$I_n(x) = n\int_{\max(B_n, x-\lambda)}^{\infty}\big(1 - V(y)\big)\big|\pi'(x-y)\big|\,dy, \quad \lambda \in (\omega_n, \Lambda_n). \tag{26}$$

Лемма 2a. *Предположим, что выполнено условие* (24), *причем* $g(y)$ — *такая дифференцируемая функция, что при некотором* $\delta \in (0, 1)$

$$g'(y) \leqslant \delta g(y)/y, \quad y \geqslant y_0. \tag{27}$$

Тогда найдется постоянная $r_0 \in (0, 1)$, *при которой*

$$I_n(x) = n\big(1 - V(x)\big)\big(1 + o(1)\big) + o\big(\pi(x)\big), \quad n \to \infty, \tag{28}$$

равномерно по всем $x \geqslant B_n$, *удовлетворяющим условию*

$$B_n \max_{r_0 \leqslant r \leqslant 1/r_0}\big(g'(rx)\big)^+ \to 0, \quad n \to \infty. \tag{29}$$

Здесь $(\cdots)^+ = \max(0, \ldots)$.

Лемма 2b. *Пусть выполняются условия* (24), (27) *и, кроме того,*

$$g'\big(y + o(y)\big) = \big(1 + o(1)\big)g'(y) \quad \text{при } y \to \infty. \tag{30}$$

Тогда

$$I_n(x) = n\big(1 - V(x)\big)e^{(B_n g'(x))^2/2}\big(1 + o(1)\big) + o\big(\pi(x)\big), \quad n \to \infty, \tag{31}$$

равномерно по таким $x \geqslant B_n$, *что*

$$B_n g'(x) = O(1), \quad n \to \infty. \tag{32}$$

Заметим, что при условии (30) лемма 2a вытекает из леммы 2b.

Следствие 1. *Если дифференцируемая функция* $g(y)$ *удовлетворяет условию*

$$\big(g'(y)\big)^+ \Big/ \sqrt{g(y)} = o(1/y), \quad y \to \infty, \tag{33}$$

а функция распределения V — условиям (15) *и* (24), *то* (*см.* (17), (18))

$$\widetilde{I}_n(x) = n\big(1 - V(x)\big)\big(1 + o(1)\big) + o\big(\tilde{\pi}(x)\big), \quad n \to \infty, \tag{34}$$

равномерно по x из области $\{\liminf_{n\to\infty} x/B_n\sqrt{g(B_n)} > 0\}$. *Если же выполнены условия* (30) *и*

$$g'(y)/\sqrt{g(y)} = O(1/y), \quad y \to \infty, \tag{35}$$

то в этой же области

$$\widetilde{I}_n(x) = n\big(1 - V(x)\big)e^{(B_n g'(x))^2/2}\big(1 + o(1)\big) + o\big(\tilde{\pi}(x)\big), \quad n \to \infty. \tag{36}$$

Следствие 1 вытекает из лемм 2a и 2b. При этом в его условиях $C_n \sim B_n\sqrt{2g(B_n)}$, $n \to \infty$ (см. (12), (19)).

Сказанное выше позволяет получать различные интересные результаты, подобные тому, который сейчас будет приведен (другие см. в п. 3).

Следствие 2. *Пусть выполняются условия* (30), (35), (15) *и* (24). *Тогда равномерно по $x \geqslant B_n$*

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = \Big(\widetilde{\pi}(x) + n\big(1 - V(x)\big)e^{(B_n g'(x))^2/2} \times I\Big[x \geqslant B_n\sqrt{g(B_n)}\Big]\Big)\big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty. \tag{37}$$

Из, вообще говоря, неулучшаемых условий (33) ((30) и (35)) следует, в частности, что функции $g(y)$, допускающие простую асимптотику для $\widetilde{I}_n(x)$, не могут расти к бесконечности быстрее, чем $\ln^2 y$. В следующих леммах 3a и 3b ограничения на скорость роста функций $g(y)$ заменяются условиями на их гладкость.

Пусть выполнены условия (27), (15), последовательность $\{\widetilde{\omega}_n\}$ определена равенством (см. (8) и замечание 1)

$$\beta\widetilde{\omega}_n^2/g(\widetilde{\omega}_n) = B_n^2 \quad (\text{постоянная } \beta \in (0,\, 1/2)\,), \tag{38}$$

$\widetilde{Q}(t)$ — некоторая функция, удовлетворяющая при $B_n \leqslant t \leqslant \widetilde{\omega}_n$ условиям ($n \to \infty$)

$$\widetilde{Q}(t) = Q(t) + o(1), \quad \widetilde{Q}'(t) \sim -t/B_n^2, \quad \widetilde{Q}''(t) \sim -1/B_n^2 \tag{39}$$

(см. (5), замечание 1 и [8, (7)–(10)]).

Заметим, что в леммах 1a и 1b содержатся условия, при которых (39) выполняется для $\widetilde{Q}(t) = -t^2/2B_n^2$ и $\widetilde{Q}(t) = -(t^2/(2n)) + \sum_{\nu=1}^{k}\mu_\nu t^{\nu+2}/n^{\nu+1})$ соответственно. Сама функция $Q(t)$, разумеется, также удовлетворяет (39).

Лемма 3a. *Пусть дважды дифференцируемая положительная функция $g(y)$ удовлетворяет условиям* (27) *и*

$$yg''(y) \asymp -g'(y), \quad y \to \infty, \tag{40}$$

$$g''\big(y + o(y)\big) \sim g''(y), \quad y \to \infty, \tag{41}$$

$$g''(y) \text{ не убывает при всех } y \geqslant y_0. \tag{42}$$

Тогда (*см.* (18))

$$\widetilde{I}_n(x) = \big(1 + o(1)\big)\frac{n}{B_n\sqrt{\tau''(y_*)}}\big(1 - V(y_*)\big)e^{\widetilde{Q}(x-y_*)}$$

$$+ o\big(\widetilde{\pi}(x)\big), \quad n \to \infty, \tag{43}$$

равномерно по x из области A_n, определяемой условиями

$$x > (1 + \varepsilon)\nu\big(\max(\xi_0, B_n)\big), \tag{44}$$

$$B_n^2\big|g''(y_*)\big| \leqslant 1 - \varepsilon, \tag{45}$$

$$B_n g'(x) > 1 + \varepsilon, \quad x \geqslant \varepsilon\widetilde{\omega}_n. \tag{46}$$

Здесь ε — сколь угодно малое положительное число,

$$\nu(y) = B_n^2 g'(y) + y, \qquad \tau(y) = g(y) - \widehat{Q}(x - y), \tag{47}$$

ξ_0 и y_* — максимальные решения уравнений $\nu'(y) = 0$ и $\tau'(y) = 0$ соответственно, существующие по условиям леммы 3a.

Отметим, что условие (46) леммы 3a практически не умаляет общности (см. (13a) и (31), (32)) и введено лишь для упрощения формулировок.

З а м е ч а н и е 2. Пусть стремящаяся к бесконечности дважды дифференцируемая функция $g(y)$ удовлетворяет условиям (42) и при некотором $\alpha \in (0, 1)$

$$yg''(y) = \big(\alpha - 1 + o(1)\big)g'(y), \quad y \to \infty. \tag{48}$$

Тогда (см. (44)–(46)) $A_n \supseteq \{x\colon x > (1 - \varepsilon_0)C_n,\ B_n g'(x) > 1 + \varepsilon_0\}$, где C_n определено в (19), а $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало.

При условиях замечания 2 в правые части соотношений (13b), (13c) вместо $I_n(x)$ (см. (26) и замечание 1) можно подставить правую часть равенства (43). В общем случае такую подстановку делать, к сожалению, нельзя, однако дополнительные ограничения на гладкость функции $g(y)$ позволяют получить аналог асимптотической формулы (43), справедливой уже *при всех $x \geqslant (1 - \varepsilon)C_n$* (см. (12)).

Лемма 3b. *Пусть выполняются условия* (27), (40) *и, кроме того, при $y \to \infty$*

$$yg'''(y) \asymp -g''(y), \tag{49}$$

$$g'''\big(y + o(y)\big) \sim g'''(y). \tag{50}$$

Потребуем также, чтобы функция $\widetilde{Q}(t)$, помимо условий (39), удовлетворяла условию

$$\widetilde{Q}'''(t) = o(1/tB_n^2), \quad B_n \leqslant t \leqslant \widetilde{\omega}_n, \quad n \to \infty. \tag{51}$$

Тогда

$$\widetilde{I}_n(x) = \frac{1+o(1)}{B_n\sqrt{\tau''(y_*)}} n\big(1 - V(y_*)\big)e^{\widetilde{Q}(x-y_*)}\sqrt{\frac{k_*}{2\pi}}J(k_*) \\ + o\big(\widetilde{\pi}(x)\big), \quad n \to \infty, \tag{52}$$

равномерно по x, удовлетворяющим (46) и принадлежащим множеству $\widetilde{A}_n$. Здесь

$$k_* = \tau''^3(y_*)/g'''^2(y_*), \quad J(k) = \int_{-2}^{\infty} e^{-k(t^2/2+t^3/6)}dt,$$
$$\widetilde{A}_n = \big\{x\colon \min_{y\in W(x)} \tau'(y) < 0\big\}, \quad W(x) = \big[\max(B_n, x - \widetilde{\omega}_n), x - B_n\big].$$

Отметим, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\widetilde{A}_n \supseteq \big\{x\colon x > (1-\varepsilon)\widetilde{C}_n,\ B_n g'(x) > 1 + \varepsilon\big\}, \\ \widetilde{C}_n = \min_{y\geqslant B_n}\left(\frac{y}{2} + \frac{g(y)}{y}B_n^2\right), \tag{53}$$

т.е. как и в лемме 3а, ограничения на x оптимальны (если $x \notin \widetilde{A}_n$, то $\widetilde{I}_n(x) = o(\widetilde{\pi}(x))$, $n \to \infty$).

Утверждения, близкие к (43), в значительно менее общей постановке доказаны в [17] и [13]. Асимптотика (52) является новой. При этом (43) вытекает из (53), поскольку $\lim_{k\to\infty}\sqrt{\frac{k}{2\pi}}J(k) = 1$, а при условии (45) $k_* \to \infty$. Попутно отметим, что

$$J(k) = k^{-1/3}\big((2/9)^{1/3}\Gamma(1/3) + o(1)\big) \quad \text{при } k \to +0.$$

3. Следствия. В настоящем пункте, в отличие от п. 2, предположение (4) не делается *a priori*.

Теорема 3а. *Пусть при $y \to \infty$*

$$1 - V(y) \sim \frac{D(y)}{y^2}e^{-g(y)}, \tag{54}$$

где $g(y)$ — такая стремящаяся к бесконечности дифференцируемая функция, что

$$g'\big(y + o(y)\big) \sim g'(y), \quad yg'(y) = O\Big(\sqrt{g(y)}\Big). \tag{55}$$

Положим $\omega_n = B_n/(g(B_n))^{1/2}$, $C_n = B_n(2g(B_n))^{1/2}$. *Если выполняются условия* (4) *и*

$$nV(-\omega_n) + \left|\frac{n}{\omega_n^2}D(\omega_n) - \frac{B_n^2}{\omega_n^2}\right| \longrightarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty, \tag{56}$$

то при любом $0 < \varepsilon < 1$ *и* $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\{S_n > x\} = \Phi(-x/B_n)\big(1 + o(1)\big), \quad x \leqslant (1-\varepsilon)C_n; \\ &\mathbf{P}\{S_n > x\} = \Big(\Phi(-x/B_n)I\big[x \leqslant (1+\varepsilon)\,C_n\big] + n\big(1 - V(x)\big) \\ &\qquad\qquad \times \exp\Big\{\big(B_n g'(x)\big)^2/2\Big\}\Big)\big(1 + o(1)\big), \quad x > (1-\varepsilon)C_n. \end{aligned} \tag{57}$$

Обратно, если для некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$ *выполнено* (57), *то выполняются соотношения* (4) *и* (56).

Теорема 3b. *Пусть выполняется условие* (54), *причем* $g(y) \to \infty$ *и* $yg'(y) = o(\sqrt{g(y)})$ *при* $y \to \infty$. *Тогда*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_n > x\} = \Big(&\Phi(-x/B_n)I\big[x \leqslant (1+\varepsilon)C_n\big] \\ &+ n\big(1 - V(x)\big)I\big[x > (1-\varepsilon)C_n\big]\Big)\big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty, \end{aligned}$$

равномерно по всем x *при любом* $\varepsilon \in (0, 1) \Leftrightarrow$ (4) *и* (56).

Заметим, что в условиях теорем 3a, 3b:

— если $\{B_n\}$ определено равенством (22), то соотношения (4) и (56) равносильны условию

$$\frac{1}{D(z)} \int_{z/\sqrt{g(z)}}^{z} uV(-u)\,du = o\big(1/g(z)\big), \quad z \to \infty;$$

— если $B_n = \sqrt{n}$, то (4), (56) равносильны условиям

$$\mathbf{E}\,X_1 = 0, \quad \mathbf{E}\,X_1^2 = 1, \qquad \int_{|y|>z} y^2\,dV(y) = o\big(1/g(z)\big) \quad \text{при } z \to \infty.$$

В последнем случае условие (54) эквивалентно соотношению

$$1 - V(y) \sim \frac{1}{y^2}e^{-g(y)}, \quad y \to \infty. \tag{58}$$

Теорема 4. *Пусть выполняется условие* (54), *в котором стремящаяся к бесконечности функция* $g(y)$ *удовлетворяет условиям* (40), (41), (49), (50) *и* $yg'(y) \leqslant \delta g(y)$, $y \geqslant y_0$, *при некотором* $\delta \in (0, 1/2)$. *Положим* $\omega_n = B_n^2/\eta(B_n)$, $C_n = \min_{y \geqslant B_n}(\frac{1}{2}y + B_n^2 g(y)/y)$ (*см.* (14) *и лемму* 3b).

Если выполняются условия (4) *и* (56), *то при любом* $\varepsilon \in (0, 1)$ *и* $n \to \infty$ *имеет место* (57) *и*

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = \biggl(\Phi\Bigl(-\frac{x}{B_n}\Bigr) I\bigl[x \leqslant (1+\varepsilon)C_n\bigr] + n\bigl(1 - V(y_*)\bigr)$$
$$\times \Phi'\Bigl(\frac{x-y_*}{B_n}\Bigr)\frac{\rho'(y_*)}{g'''(y_*)}\frac{1}{B_n} J\Bigl(\frac{\rho'^3(y_*)}{g'''(y_*)}\Bigr)\biggr)\bigl(1+o(1)\bigr), \quad x \geqslant (1-\varepsilon)C_n.$$

Обратно, если при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ *имеет место* (57), *то выполняются* (4) *и* (56). *Здесь* $\rho(y) = g'(y) + y/B_n^2$, y_* — *максимальный корень уравнения* $B_n^2\rho(y) = x$, $J(k) = \int_{-2}^{\infty} \exp\{-k(t^2/2 + t^3/6)\}\,dt$.

Теорема 5a. *Пусть выполняется условие* (58), *где* $g(y)$ — *такая дважды дифференцируемая функция, что* $g''(y)$ *не убывает при* $y \geqslant y_0$ *и* $yg''(y) \sim (\alpha - 1)g'(y)$, $y \to \infty$, *при некотором* $\alpha \in (0, 1)$. *Положим*

$$k = \max\bigl\{l \in \{0, 1, \dots\}\colon \limsup_{z\to\infty} g(z)/z^{l/(l+1)} > 0\bigr\},$$
$$Q_k(t) = \sum_{\nu=1}^{k} \mu_\nu t^{\nu+2}/n^{\nu+1} \quad (k \geqslant 1) \quad \text{и} \quad Q_0(t) \equiv 0, \tag{59}$$

$\rho(y) = g'(y) - (x-y)/n + Q_k'(x-y)$ *и обозначим через* y_* *максимальное решение уравнения* $\rho(y) = 0$.

Если выполняются условия (23) (*см. лемму* 1b), *то при любом* $\varepsilon \in (0, 1)$ *и* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = \Phi\Bigl(-\frac{x}{\sqrt{n}}\Bigr)e^{Q_k(x)}\bigl(1+o(1)\bigr), \quad 0 \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon)C_n,$$
$$\mathbf{P}\{S_n \geqslant x\} = \biggl(\Phi\Bigl(-\frac{x}{\sqrt{n}}\Bigr)e^{Q_k(x)} I\bigl[x \leqslant (1+\varepsilon)C_n\bigr]$$
$$+ n\bigl(1 - V(y_*)\bigr)\sqrt{\frac{2\pi}{n\rho'(y_*)}}\,\Phi'\Bigl(\frac{x-y_*}{\sqrt{n}}\Bigr)e^{Q_k(x-y_*)}\biggr)\bigl(1+o(1)\bigr), \tag{60}$$
$$x \geqslant (1-\varepsilon)C_n,$$

где C_n *определено в* (19).

Обратно, если $\int_1^\infty y^{k-1}e^{-g(y)}dy < \infty$, *то из выполнения условий* (60) *при некотором* $\varepsilon \in (0, 1)$ *следует, что выполняется* (23).

Отметим, что если $\alpha/(1-\alpha)$ не целое число, то в условии (59) $k = [\alpha/(1-\alpha)]$ (в противном случае k равно $[\alpha/(1-\alpha)]$ или $[\alpha/(1-\alpha)] - 1$). Напомним также (см. лемму 1b), что условие (23b) выполняется, если $\mathbf{E}|X_1|^{k+3} < \infty$.

Теорема 5b. *Пусть выполняется условие* (58) *и функция* $g(y)$ *удовлетворяет условиям* (27), (40), (41), (49) *и* (50); *постоянная* k *и функции* Q_k, ρ, y_* *такие же, как в теореме* 5a; $C_n = \min_{y \geqslant \sqrt{n}}(y/2 + ng(y)/y)$. *Если* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 = 1$, $\mathbf{E}|X_1|^{k+3} < \infty$ *и* $\mu_\nu = \lambda_{\nu-1}$, $1 \leqslant \nu \leqslant k$ (*см.*

лемму 1b), *то при любом* $\varepsilon \in (0,\,1)$ *и* $n \to \infty$ *имеет место* (60) *и*

$$\mathbf{P}\left\{S_n \geqslant x\right\} = \biggl(\Phi\Bigl(-\frac{x}{\sqrt{n}}\Bigr)e^{Q_k(x)}I\bigl[x \leqslant (1+\varepsilon)C_n\bigr]$$
$$+ n\bigl(1 - V(y_*)\bigr)\Phi'\Bigl(\frac{x-y_*}{\sqrt{n}}\Bigr)e^{Q_k(x-y_*)}\frac{\rho'(y_*)}{g'''(y_*)\sqrt{n}}$$
$$\times J\biggl(\frac{\rho'^3(y_*)}{g'''^2(y_*)}\biggr)\biggr)\bigl(1+o(1)\bigr), \quad x \geqslant (1-\varepsilon)C_n.$$

Здесь функция $J(\cdot)$ *та же, что в лемме* 3b *или в теореме* 4.

Заметим, что из теоремы 5a вытекают результаты [17] (достаточно положить $g(y) = y^\alpha + a\ln y$), а теорема 5b дополняет и уточняет [13].

4. Вспомогательные результаты. Пусть $\overline{V}(x) = 1 - V(x)$,

$$\overline{V}_n(x) = \mathbf{P}\left\{S_n \geqslant x\right\}, \quad \overline{V}_{n,c}(x) = \mathbf{P}\left\{S_n \geqslant x,\, \max_{1\leqslant i\leqslant n} X_i \leqslant c\right\},$$
$$V^{(c)}(x) = \mathbf{P}\left\{c < X_1 < x\right\}.$$

Лемма 4. *Пусть выполняются условия* (4) *и* (2), (3). *Тогда равномерно по* x *при* $n \to \infty$

$$\overline{V}_n(x) = \biggl(\overline{V}_{n,B_n}(x) + n\int_{B_n}^{\infty}\overline{V}_{n-1,B_n}(x-y)\,dV(y)\biggr)\bigl(1+o(1)\bigr). \qquad (61)$$

Доказательство леммы 4. Очевидно, что при любой постоянной c

$$\overline{V}_n(x) = \overline{V}_{n,c}(x) + \sum_{k=1}^{n} C_n^k Q_{n-k,k}(x)$$
$$= \overline{V}_{n,c}(x) + n\overline{V}_{n-1,c} * V^{(c)}(x) + T_c(x), \qquad (62)$$

где $T_c(x) = \sum_{k=2}^{n} C_n^k Q_{n-1,k}(x)$, $Q_{l,0}(x) = \overline{V}_{l,c}(x)$, $Q_{l,k}(x) = Q_{l,k-1} * V^{(c)}(x)$, $k \geqslant 1$.

Лемма 4a. *Пусть* $M(x)$ — *конечная мера на* $(-\infty,\,\infty)$ *и* $\overline{M}(x) = M(\infty) - M(x)$. *Положим* $I_c(y) = \int_c^{y-c}\overline{V}(y-u)\,dV(u)$, $y \geqslant 2c$, $\xi_a = \sup_{y\geqslant c}\overline{V}(y)/\overline{V}(y+a)$ (c *и* a — *постоянные*).

Если при некоторой постоянной A

$$I_c(y) \leqslant A\overline{V}(y), \quad y \geqslant 2c, \qquad (63)$$

то при любом x

$$\overline{M} * V^{(c)} * V^{(c)}(x) \leqslant A\overline{M} * V^{(2c)}(x) + \overline{V}(c)\overline{M} * V^{(c)}(x-c); \qquad (64)$$

кроме того,

$$\overline{M} * V^{(c)}(x-a) \leqslant \xi_a\overline{M} * V^{(c+a)}(x). \qquad (65)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 4a. Обозначим $V^{(c)} * V^{(c)}(y)$ через $\mu(y)$ и положим $\overline{\mu}(y) = \mu(\infty) - \mu(y)$. Очевидно, $\overline{\mu}(y) = \overline{V}^2(c)$ при $y \leqslant 2c$ и $\overline{\mu}(y) = I_c(y) + \overline{V}(c)\overline{V}(y-c)$ при $y > 2c$. Поэтому

$$\overline{M} * \mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\mu}(y)\, d\overline{M}(x-y) = J_1 + \overline{V}(c) J_2(c),$$

где $J_1 = \int_{2c}^{\infty} I_c(y)\, d\overline{M}(x-y)$, а

$$J_2(l) = \overline{V}(c)\overline{M}(x-l-c) + \int_{c+l}^{\infty} \overline{V}(y-c)\, d\overline{M}(x-y).$$

Легко понять, что $J_2(c) = \overline{M} * V^{(c)}(x-c)$ и

$$\begin{aligned} J_2(a) &\leqslant \xi_a\Big(\overline{V}(c+a)\overline{M}(x-a-c) + \int_{c+a}^{\infty} \overline{V}(y)\, d\overline{M}(x-y)\Big) \\ &= \xi_a \overline{M} * V^{(c+a)}(x); \end{aligned}$$

кроме того, в соответствии с (63) $J_1 \leqslant A\overline{M} * V^{(2c)}(x)$. Лемма 4a доказана.

Лемма 4b. *Пусть* $p = \mathrm{P}\{-a \leqslant X_1 < c\} > 0$. *Если выполняется условие* (63), *то* (*см.* (62))

$$T_c(x) \leqslant np^{-1}\big(A\xi_a + \overline{V}(c)\xi_{c+a}\big)\Big(\frac{n}{2}Q_{n-1,1}(x) + \frac{1}{3}T_c(x)\Big). \qquad (66)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 4b. Согласно (64) и (65)

$$\begin{aligned} Q_{l,k}(x) &\leqslant p^{-1} Q_{l+1,k}(x-a) \\ &\leqslant p^{-1}\big(AQ_{l+1,k-1}(x-a) + \overline{V}(c)Q_{l+1,k-1}(x-a-c)\big) \\ &\leqslant p^{-1}\big(A\xi_a + \overline{V}(c)\xi_{a+c}\big)Q_{l+1,k-1}(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} T_c(x) \leqslant \sum_{k=2}^{n} C_n^k \big(\xi_a A + \overline{V}(c)\xi_{c+a}\big)p^{-1} Q_{n+1-k,k-1}(x) = n\big(\xi_a A + \overline{V}(c)\xi_{c+a}\big) \\ \times p^{-1}\left(\frac{n-1}{2}Q_{n-1,1}(x) + \sum_{l=2}^{n-1} C_n^l Q_{n-l,l}(x)\frac{n-l}{n(l+1)}\right). \end{aligned}$$

Лемма 4b доказана.

Лемма 4c. *Пусть выполнены условия* (2)–(4). *Тогда* (*см. лемму* 4a *при* $c = B_n$)

$$A = \sup_{y \geqslant 2B_n} I_{B_n}(y)/\overline{V}(y) = O\big(n^{-1} \max_{y \geqslant B_n} g(y) e^{-(1-\delta)g(y)}\big), \quad n \to \infty, \qquad (67)$$

и, если $a \geqslant 0$, *то*

$$\xi_a = O\Big(\exp\big\{a\delta g(B_n)/B_n\big\}\Big), \quad n \to \infty. \qquad (68)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о   л е м м ы 4с. Из (3) следует, что

$$g(y) - g(y-u) \leqslant \delta g(y-u)\frac{u}{y-u} \leqslant \delta g(u), \quad u \leqslant y/2. \tag{69}$$

Оценку (68) легко получить, применяя правую часть неравенства (69). Доказательство соотношения (67) содержится в [8, формулы (113)–(119)]. Лемма 4с доказана.

Для доказательства соотношения (61) следует применить (62), (66)–(68) при $c = B_n$ и $a = B_n/g(B_n)$. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Пусть выполняются условия* (2)–(4), $\pi(x)$ *определено в* (5), Λ_n *— в* (10). *Тогда при* $m = n$ *или* $m = n - 1$

$$\overline{V}_{m,B_n}(x) = \pi(x)\big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty, \tag{70}$$

равномерно по $x \leqslant \Lambda_n + B_n$

$$\overline{V}_{m,B_n}(x) \leqslant \exp\big\{ -\beta x g(B_n)/B_n \big\}, \quad x \geqslant \Lambda_n, \tag{71}$$

при любом $\beta < \alpha/2$ *(см.* (10)) *и всех достаточно больших* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о   л е м м ы 5. Соотношение (70) вытекает из [8, лемма 1, а также стр. 690, 696]. Для доказательства (71) воспользуемся при $h = \alpha g(B_n)/B_n$ неравенством (см. (5)) $\overline{V}_{m,B_n}(x) \leqslant \exp\{-hx + n(L(h) - 1)\}$ и соотношением [8, формула (65)]

$$n\big(L(h) - 1\big) \sim \frac{n}{2}h^2 D(1/h) \sim h\Lambda_n/2, \quad n \to \infty.$$

Лемма 5 доказана.

В следующей лемме содержится утверждение, равносильное теореме 1.

Лемма 6. *Пусть выполняются условия* (2)–(4), (10). *Тогда равномерно по* x

$$\overline{V}_n(x) = \left(\pi(x)I[x \leqslant \Lambda_n + B_n] + \int_{\max(B_n, x-\lambda)}^{\infty} \pi(x-y)\,dV(y)\right) \times \big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty. \tag{72}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о   л е м м ы 6. Если $x \leqslant \Lambda_n + B_n$, то оценка (72) следует из (61) и (70). Пусть $x > \Lambda_n + B_n$. Нам достаточно показать, что в этом случае

$$Q = \overline{V}_{n,B_n}(x) + n\int_{B_n}^{x-\Lambda_n} \overline{V}_{n-1,B_n}(x-y)\,dV(y) = o(1)n\overline{V}(x - B_n), \quad n \to \infty. \tag{73}$$

Воспользовавшись (71), легко получим:

$$Q = O(J_1 + J_2), \quad n \to \infty, \tag{74}$$

где

$$J_1 = e^{-\beta h_n x}, \qquad J_2 = nh_n e^{-\beta h_n x} \int_{B_n}^{x-\Lambda_n} e^{\tau(y)} \frac{D(y)}{y^2}\, dy,$$
$$h_n = g(B_n)/B_n, \qquad \tau(y) = \beta h_n y - g(y), \quad \beta \in (0, \alpha/2), \quad \alpha \in (0,1).$$

Функция $\tau(y)/y$ возрастает, и в силу (3) $g(\Lambda_n)/\Lambda_n \leqslant h_n(B_n/\Lambda_n)^{1-\delta}$. Поэтому при $x \geqslant \Lambda_n$

$$\tau(x) \geqslant x\beta h_n/2, \tag{75}$$
$$J_1 = e^{-g(x)-\tau(x)} \leqslant e^{-g(x)-\beta x h_n/2} = o\big(n\overline{V}(x)\big), \quad n \to \infty. \tag{76}$$

Положим $T = x - \Lambda_n$,

$$T_n = \inf\big\{t\colon\, \beta h_n > g(t)/t\big\}, \quad J = \int_{B_n}^{T} e^{\tau(y)} \frac{D(y)}{y^2}\, dy.$$

Отметим, что $B_n < T_n < \Lambda_n$ (см. (76)) и $\tau(y) \leqslant 0$ при $y \in (B_n, T_n]$. Очевидно,

$$\begin{gathered} J \leqslant \int_{B_n}^{T_n} \cdots + \int_{T_n}^{\max(T_n, T)} \cdots = \overline{J}_1 + \overline{J}_2, \\ \overline{J}_1 = O\left(\frac{D(B_n)}{B_n}\right), \quad n \to \infty. \end{gathered} \tag{77}$$

Если $T > T_n$, то

$$\overline{J}_2 = O\left(\min\left(\frac{D(B_n)}{B_n}, \frac{D(T)}{T}\Big/\tau(T)\right)e^{\tau(T)}\right), \quad n \to \infty. \tag{78}$$

Из (77), (78) и того, что $\tau(T) > 0$ при $T > T_n$, следуют оценки

$$J = O\left(\frac{D(T)}{B_n}e^{\tau(T)}\right) \quad \text{при} \quad T_n < T < \Lambda_n,$$
$$J = O\left(\frac{D(T)}{B_n}e^{\tau(T)}\right)\frac{1}{\tau(T)} \quad \text{при} \quad T \geqslant \Lambda_n.$$

В первом случае $\Lambda_n + B_n < x < 2\Lambda_n$ и

$$J_2 = n\overline{V}(x - B_n) O\Big(B_n h_n \frac{x^2}{B_n^2} e^{-\beta B_n h_n} e^{\tau(T) - \tau(x - B_n)}\Big), \quad n \to \infty,$$

причем выражение под знаком O стремится к нулю ($\Lambda_n/B_n < B_n h_n$, $\tau(T) < \tau(x - B_n)$); во втором случае

$$J_2 = n\overline{V}(x - B_n) O\Big(h_n e^{-\beta B_n h_n} \frac{x^2}{T\tau(T)} e^{\tau(T) - \tau(x - B_n)}\Big), \quad n \to \infty.$$

При этом (см. (76)) $\tau(T) \geqslant (\beta/2)Th_n$ и $2T \geqslant x \geqslant T$. Таким образом, $J_2 = o(n\overline{V}(x - B_n))$, $x \geqslant \Lambda_n + B_n$, $n \to \infty$, и, следовательно (см. (76), (74)), имеет место (73). Лемма 6 доказана.

5. Доказательства. В настоящем пункте собраны доказательства теорем 1–5 и лемм 1–3. Для удобства дальнейших ссылок перечислим некоторые свойства функций $\pi(x)$ и $Q(x)$ (см. (5)):

$$\pi(x) = \frac{1 + o(1)}{\big(2\pi x h_*(x/n)\big)^{1/2}} e^{Q(x)}, \quad \frac{x}{B_n} \uparrow \infty, \quad x \leqslant \Lambda_n + B_n, \tag{79a}$$

$$\pi'(x) = \big(-1 + o(1)\big)e^{Q(x)}\left(h_*\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big/2\pi x\right)^{1/2}, \quad B_n \leqslant x \leqslant \Lambda_n + B_n, \tag{79b}$$

$$Q(x) = \Big(-\frac{1}{2} + o(1)\Big)x h_*\Big(\frac{x}{n}\Big), \quad B_n \leqslant x \leqslant \Lambda_n + B_n, \tag{79c}$$

$$Q(x-y) - Q(x) \leqslant (1+\varepsilon)\frac{y}{x}\Big(x - \frac{y}{2}\Big)h_*\Big(\frac{x}{n}\Big), \quad B_n \leqslant y \leqslant x - B_n. \tag{79d}$$

В (79a)–(79c) предполагается, что $n \to \infty$; положительная постоянная ε в (79d) сколь угодно мала; Λ_n и $h_*(\cdot)$ определены в (6), (10). Доказательства соотношений (79) можно найти в [8] (см. формулы (8)–(10), (34), (71), (72), (82)–(84)).

Доказательство теоремы 1. Соотношение (9) достаточно проверить при $\lambda = \Lambda_n$ и $\lambda = \omega_n$. С помощью интегрирования по частям нетрудно убедиться в том, что теорема 1 является следствием леммы 6 и оценок

$$\pi(x) = o\big(n\overline{V}(x)\big), \quad \omega_n \leqslant x \leqslant \Lambda_n + B_n, \tag{80}$$

$$\int_{T_n}^{x-\omega_n} |\pi'(x-y)|\overline{V}(y)\,dy = o\big(\overline{V}(x)\big), \quad x \geqslant \omega_n + B_n, \tag{81}$$

$$n\overline{V}(T_n)\pi(x - T_n) = o\big(\pi(x) + n\overline{V}(x)\big), \quad x \geqslant B_n, \tag{82}$$

где $T_n = \max(B_n, x - \Lambda_n)$, а $n \to \infty$.

Докажем (80). Имеем по (79a) и (79c)

$$\pi(x) = \exp\left\{-\Big(\frac{1}{2} + o(1)\Big)x h_*\Big(\frac{x}{n}\Big)\right\}, \quad B_n \leqslant x \leqslant \Lambda_n + B_n.$$

Отсюда, из (2)–(4) и [8, формулы (16), (17), (71)] следует, что (80) выполняется, если существует $\overline{\eta} < 1/2$, при котором

$$g(x)/x^2 \leqslant \overline{\eta} h_*(x/n)/x, \quad x \geqslant \omega_n, \tag{83}$$

или, что равносильно, $g(\omega_n)/\omega_n^2 \leqslant \overline{\eta} h_*(\omega_n/n)/\omega_n$.

Последнее неравенство при $\eta < \overline{\eta}$ вытекает из (8). Оценка (80) доказана. Для доказательства (81) применим [8, формула (82)] и (2).

Имеем, обозначив левую часть в (81) через I,

$$I = O\left(\overline{V}(x)\int_{T_n}^{x-\omega_n} \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{1}{x-y}h_*\left(\frac{x-y}{n}\right)\right)^{1/2} e^{\omega(y)}\,dy\right),$$

где

$$\omega(y) = \left[g(x)-g(y)-g(x-y)\right]+\left[g(x-y)+(1-\varepsilon)Q(x-y)\right]+\varepsilon Q(x-y). \quad (84)$$

При этом содержимое квадратных скобок в (84) меньше нуля в силу (3) и (83) соответственно (предполагается, что положительное ε достаточно мало). По (79c) найдется такое $\overline{\varepsilon} \in (0, \varepsilon/2)$, что

$$I = \overline{V}(x)O\left(\int_{T_n}^{x-\omega_n} \left(\frac{x}{y}\right)^2 \frac{1}{x-y}\exp\left\{-\overline{\varepsilon}(x-y)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\, h_*\left(\frac{x-y}{n}\right)\right\} dy\right), \quad n \to \infty. \quad (85)$$

Интеграл в правой части (85) разбиваем на два: от T_n до $x/2$ и от $x/2$ до $x-\omega_n$ соответственно. Легко проверить (см. [8, формула (17)]), что при некотором $\widetilde{\varepsilon} > 0$

$$\int_{T_n}^{x/2} \dots \leqslant \frac{x^2}{x-\varepsilon x}\exp\left\{-\widetilde{\varepsilon}(x/B_n)^2\right\}\int_{T_n}^{\infty}\frac{dy}{y^2} = o(1), \quad n \to \infty,$$
$$\int_{x/2}^{x-\omega_n} \dots = O\left(\int_{\omega_n}^{\infty} \exp\left\{-\widetilde{\varepsilon}t^2/B_n^2\right\}\frac{dt}{t}\right) = o(1), \quad n \to \infty.$$

Отсюда и из (85) следует (81).

Проверим (82). Если $T_n = B_n$, то (см. (6), (10), (79c))

$$n\overline{V}(B_n)\pi(x-B_n) = \pi(x)O\left(\exp\left\{-g(B_n)\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(1+o(1)\right)B_n h_*\left(\frac{x}{n}\right)\right\}\right) = o\left(\pi(x)\right), \quad n \to \infty.$$

Если же $T_n = x - \Lambda_n$, т.е. $x \geqslant B_n + \Lambda_n$, то при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$n\overline{V}(x-\Lambda_n)\pi(\Lambda_n) = n\overline{V}(x)\left(\frac{x}{T_n}\right)^2 O\left(\exp\left\{g(x)\right.\right.$$
$$\left.\left.-g(T_n) - \frac{1-\varepsilon}{2}\Lambda_n h_*\left(\frac{\Lambda_n}{n}\right)\right\}\right).$$

Далее, $x/T_n \leqslant 2\Lambda_n/B_n$, $g(x)-g(T_n) \leqslant g(\Lambda_n)$, $g(\Lambda_n) - ((1-\varepsilon)/2)\Lambda_n \times h_*(\Lambda_n/n) \leqslant -\varepsilon^2(\Lambda_n/B_n)^2$ (см. (3), (83)). Из проделанных выкладок вытекает (82). Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Вначале проверим (13a). Пусть

$$\nu_\varepsilon(y,x) = g(y) - (1+\varepsilon)h_*\Big(\frac{x}{n}\Big)\frac{y}{x}\Big(x - \frac{1}{2}y\Big). \tag{86}$$

С учетом неравенства $C_n \leqslant (1/2+\eta)\omega_n$ и (79a), (79d) получим при $2B_n \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon)C_n$ и $n \to \infty$:

$$\begin{aligned}\int_{B_n}^\infty \overline{V}(y)\big|\pi'(x-y)\big|\,dy &= O\bigg(\overline{V}(x-B_n) + \int_{B_n}^{x-B_n} \overline{V}(y)\big|\pi'(x-y)\big|\,dy\bigg) \\ &= O\bigg(D(x)x^{-2}\exp\Big\{Q(x) - \nu_\beta(x-B_n,x) - \beta x h_*\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big\} \\ &\quad + \int_{B_n}^{x-B_n} D(y)y^{-2}\exp\Big\{-\nu_\beta(y,x)\Big\}\,dy\,\exp\Big\{Q(x) \\ &\quad - \beta B_n h_*\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big\}\big(x^{-1}h_*(x/n)\big)^{1/2}\bigg),\end{aligned} \tag{87}$$

(здесь и ниже β — сколь угодно малое положительное число).

Соотношение (13a) является следствием (87), если

$$\min_{2B_n \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon)C_n}\ \min_{x \geqslant y \geqslant B_n} \frac{1}{y}\nu_\beta(y,x) \geqslant 0. \tag{88}$$

Функция $h_*(x/n)/x$ не убывает и медленно меняется ([8, формула (71)]). Поэтому (в силу соотношения $C_n \asymp \varkappa_n$, $n \to \infty$)

$$\frac{1}{x}h_*\Big(\frac{x}{n}\Big) \leqslant (1+\beta)\frac{1}{\varkappa_n}h_*\Big(\frac{\varkappa_n}{n}\Big) \quad \text{при} \quad B_n \leqslant x \leqslant C_n.$$

Значит, при $B_n \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon)C_n$ и $1-\varepsilon = (1+\beta)^{-2}$

$$\begin{aligned}\min_{x \geqslant y \geqslant B_n} \frac{1}{y}\nu_\beta(y,x) &\geqslant \min_{x \geqslant y \geqslant B_n}\bigg(\frac{1}{y}g(y) - \frac{(1+\beta)^2}{\varkappa_n}h_*\Big(\frac{\varkappa_n}{n}\Big)\Big(x - \frac{1}{2}y\Big)\bigg) \\ &\geqslant \min_{y \geqslant B_n}\bigg(\frac{1}{y}g(y) + \frac{y}{2}h_*\Big(\frac{\varkappa_n}{n}\Big)\frac{(1+\beta)^2}{\varkappa_n}\bigg) - x\frac{(1+\beta)^2}{\varkappa_n}h_*\Big(\frac{\varkappa_n}{n}\Big) \\ &\geqslant \frac{(1+\beta)^2}{\varkappa_n}h_*\Big(\frac{\varkappa_n}{n}\Big)\big((1+\beta)^{-2}C_n - x\big) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Таким образом, (88), а следовательно, и (13a), доказаны.

Докажем (13c), или, другими словами, покажем, что при $(1+\varepsilon)C_n \leqslant x \leqslant \lambda$ (см. (9))

$$\pi(x) = o\bigg(n\int_{B_n}^\infty \big|\pi'(x-y)\big|\overline{V}(y)\,dy\bigg), \quad n \to \infty. \tag{89}$$

Пусть y_* удовлетворяет равенству (см. (12), (7))

$$y_*\left(\frac{1}{2}+\frac{g(y_*)}{y_*^2}\frac{\varkappa_n}{h_*(\varkappa_n/n)}\right)=C_n.$$

Несложно проверить, что $y_*/B_n\to\infty$, $y_*\asymp C_n$ при $n\to\infty$ и (см. (86))

$$\nu_{-\beta}(y_*,x)<0 \quad \text{при} \quad \beta\leqslant\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \quad \text{и} \quad x\geqslant(1+\varepsilon)C_n. \tag{90}$$

Если $y_*<x-B_n$ и n достаточно велико, то

$$\begin{aligned}I_1&=n\int_{B_n}^{x-B_n}\left|\pi'(x-y)\right|\overline{V}(y)\,dy\geqslant n\overline{V}(y_*)\pi(x-y_*)\left(1-\frac{\pi(x-B_n)}{\pi(x-y_*)}\right)\\&\geqslant\exp\left\{Q(x)\nu_{-\beta}(y_*,x)\right\}\exp\left\{B_nh_*(x/n)\right\},\end{aligned}$$

поскольку в соответствии с (79a), (79c), (79d) и [8, формула (71)]

$$\begin{aligned}&\pi(x-B_n)/\pi(x-y_*)\sim\exp\left\{Q(x-B_n)-Q(x-y_*)\right\}\left(\frac{x-y_*}{x-B_n}\right)\\&\times\left(\frac{1}{x-y_*}h_*\left(\frac{x-y_*}{n}\right)\Big/\frac{1}{x}h_*\left(\frac{x}{n}\right)\right)^{1/2}\\&=O\left(e^{-\beta B_nh_*(x/n)}\right)=o(1),\qquad n\to\infty.\end{aligned}$$

Отсюда и из (90) следует, что

$$\begin{aligned}\pi(x)&=O(e^{Q(x)})=nI_1O\left(\exp\left\{-B_nh_*\left(\frac{x}{n}\right)+\nu_{-\beta}(y_*,x)\right\}\right)\\&=o(nI_1),\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Пусть теперь $y_*>x-B_n$. Тогда, с учетом (90), (79d) и неравенств $y_*(x-1/2y_*)\leqslant x^2/2$, $xh_*(x/n)\geqslant x^2/2\,B_n^2$, получим $(n\to\infty)$

$$I_2=n\int_{x-B_n}^{\infty}\overline{V}(y)\left|\pi'(x-y)\right|dy\geqslant\beta n\frac{D(x)}{x^2}e^{-g(y_*)},$$

$$\begin{aligned}\pi(x)&=O\left(I_2\sqrt{xh_*(x/n)}e^{Q(x)+g(y_*)}\right)\\&=I_2O\left(e^{\nu_{-\beta}(y_*,x)}\sqrt{xh_*(x/n)}\exp\left\{Q(x)\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+(1-\beta)h_*\left(\frac{x}{n}\right)\frac{y_*}{x}\left(x-\frac{1}{2}y_*\right)\right\}\right)=o(I_2).\end{aligned}$$

Из проделанных выкладок следует (89).

Соотношения (13a), (13b) и вместе с ними теорема 2 доказаны.

Равенство (19) несложно получить, если заметить, что минимум функции $C(y)=\frac{y}{2}(1+B_n^2g(y)/y^2)$ при $y\geqslant B_n$ достигается, когда $y\asymp\eta(B_n)$, $n\to\infty$. Отсюда и из (15) следует, что

$$\min_{y\geqslant B_n}C(y)\sim\min_{y>0}\frac{y}{2}\left(1+y^{\alpha-1}\eta^{2-\alpha}(B_n)\right),\quad n\to\infty.$$

Последнее выражение как раз и равно C_n из (19).

Леммы 1a и 1b, по существу, являются переформулировками замечания 1 из [8]. Роль функции $\Lambda(z)$ из [8] играет функция $\eta(z)$, определенная в (15).

Доказательство лемм 2a и 2b. Имеем (см. (26)), полагая без потери общности, что $x/B_n \to \infty$:

$$I_n(x) = n(J_1 + \cdots + J_4),$$

где

$$J_1 = \int_{x+\rho B_n}^{\infty} \cdots, \qquad J_2 = \int_{x-\rho B_n}^{x+\rho B_n} \cdots,$$
$$J_3 = \int_{\max(\beta x, T_n)}^{x-\rho B_n} \cdots, \qquad J_4 = \int_{T_n}^{\max(\beta x, T_n)} \cdots,$$

ρ достаточно медленно стремится к ∞ при $n \to \infty$, β — достаточно малая положительная постоянная, $T_n = \max(B_n, x - \lambda)$.

В соответствии с (5) и (79) при

$$J_1 \leqslant \overline{V}(x+\rho B_n)\Phi(-\rho) = o(1)\overline{V}(x), \tag{91}$$

$$\begin{aligned} J_2 &\sim \overline{V}(x) \int_{|x-y|\leqslant \rho B_n} |\pi'(x-y)| e^{g(x)-g(y)}\,dy \\ &\sim \overline{V}(x) \int_{|t|\leqslant \rho B_n} \Phi'(t) e^{tB_n g'(x-\theta)}\,dt, \quad \text{где} \quad |\theta| \leqslant \rho B_n. \end{aligned} \tag{92}$$

Так как $\overline{V}(y) \downarrow$, то (см. (2)) $g(x) - g(y) \geqslant -3\ln(x/y)$, $x \geqslant y \geqslant y_0$, и, следовательно, $g'(y) \geqslant -3/y$. Отсюда и из (92) при условии (29) получим

$$J_2 \sim \overline{V}(x), \quad n \to \infty. \tag{93a}$$

Если же выполняются условия (30) и (32), то

$$a = B_n g'(x-\theta) \sim B_n g'(x) = O(1), \quad n \to \infty,$$

$$\begin{aligned} J_2 &\sim \overline{V}(x) \int_{|t|\leqslant\rho} \frac{1}{2\pi} e^{-t^2/2+at}\,dt \sim \overline{V}(x) e^{a^2/2} \int_{|t-a|\leqslant\rho} \Phi'(t)\,dt \\ &\sim \overline{V}(x) e^{(B_n g'(x))^2/2}, \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{93b}$$

Оценим J_3 и J_4. По (79b), (79c)

$$\begin{aligned} |\pi'(t)| &\sim \frac{1}{t} \exp\left\{ - t h_*\Big(\frac{t}{n}\Big)\Big(\frac{1}{2} + o(1)\Big) \right\} \\ &= O\Big(\frac{1}{B_n} e^{-t^2/3B_n^2}\Big), \quad B_n \leqslant x \leqslant \Lambda_n + B_n, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Значит, при $a = B_n \max_{\beta x \leqslant u \leqslant x}(g'(u))^+$

$$J_3 = \overline{V}(x) O\Big(\int_{\rho}^{\infty} e^{at-t^3/3}\,dt \Big) = o(\overline{V}(x)), \quad n \to \infty, \tag{94}$$

поскольку из (29) или (30), (32) следует, что $a = O(1)$, $n \to \infty$.

Оценивая J_4, достаточно ограничиться случаем $B_n \leqslant x \leqslant \omega_n + B_n$ (см. (8)), так как при $x \geqslant \omega_n + B_n$ согласно (81)

$$J_4 = o\big(\overline{V}(x)\big), \quad n \to \infty. \tag{95}$$

Имеем по (79a)–(79c) при достаточно малом $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned} J_4 &\leqslant e^{Q(x)} \int_{B_n}^{\beta x} \overline{V}(y) \exp\big\{(1+\varepsilon) y h_*(x/n)\big\} \sqrt{h_*(x/n)/x}\, dy \\ &= \pi(x) O\bigg(h_*(x/n) \frac{D(B_n)}{B_n} \exp\big\{ -\varepsilon B_n h_*(x/n) - \tau_n\big\}\bigg), \quad n \to \infty, \end{aligned} \tag{96}$$

где $\tau_n = \min_{B_n \leqslant y \leqslant \beta x} y(g(y)/y - (1+2\varepsilon) h_*(x/n))$.

Воспользовавшись (3), (8), малостью β и тем, что $x \leqslant \omega_n + B_n$, докажем неравенство $\tau_n > 0$. Из (95), (96) следует, что

$$J_4 = o\Big(\overline{V}(x) + \frac{1}{n}\pi(x)\Big), \quad n \to \infty,$$

уже при всех $x \geqslant B_n$. Собирая вместе (91), (93), (94) и последнюю оценку, придем к утверждениям лемм 2.

Доказательство леммы 3а. В силу (2)–(4), (40), (41)

$$0 < g'(y) \to 0, \quad y \to \infty. \tag{97}$$

Согласно (39), (42) и (46) при достаточно больших n

$$B_n \tau'(x - B_n) > B_n g'(x) - \big(1 + o(1)\big) > \varepsilon/2 > 0. \tag{98}$$

Покажем, что в условиях леммы 3а при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\min_{x - B_n \geqslant y \geqslant \widetilde{T}_n} \tau'(y) < 0, \qquad \widetilde{T}_n = \max(B_n, x - \widetilde{\omega}_n + \varepsilon\widetilde{\omega}_n). \tag{99}$$

Пусть вначале $\widetilde{T}_n = B_n$. Функция $\nu(y)$ при $y \geqslant y_0$ (см. (47), (40), (42), (97)) выпукла вниз и достигает минимума в точке ξ_0; кроме того, из (44) и (46) следует, что $\xi_0 < x - B_n$. Отсюда (и по (44)) легко получим соотношение $\tau'(\max(\xi_0, B_n)) < 0$.

Пусть теперь $\widetilde{T}_n = x - \widetilde{\omega}_n + \varepsilon\widetilde{\omega}_n$. Предположим, что (99) не выполняется. Тогда функция $\tau(y)$ на $(\widetilde{T}_n, x - B_n)$ не убывает и, в частности, в этом случае $\tau(x - B_n) \geqslant \tau(\widetilde{T}_n)$. Однако

$$\begin{aligned} \tau(\widetilde{T}_n) &\geqslant g(x - \widetilde{\omega}_n) - \widetilde{Q}(\widetilde{\omega}_n - \varepsilon\widetilde{\omega}_n) \geqslant g(x) - \widetilde{Q}(\widetilde{\omega}_n - \varepsilon\widetilde{\omega}_n) - g(\widetilde{\omega}_n) \\ &\geqslant g(x - B_n) + \big((1-\varepsilon)^2/2 + o(1) - \beta\big)\widetilde{\omega}_n^2/B_n^2 > \tau(x - B_n) \end{aligned}$$

(см. (3); (97), (39), (38)), что противоречит сделанному предположению. Соотношение (99), таким образом, доказано.

Из (98), (99) следует, что уравнение $\tau'(y) = 0$ на интервале $(\widetilde{T}_n, x - B_n)$ имеет решение y_*, являющееся по условию (45) точкой минимума функции $\tau(y)$ (из (45) нетрудно вывести, что $\tau''(y_*) < 0$).

Вернемся к доказательству формулы (43). Функция $\widetilde{Q}(t)$ определена на $[B_n, \widetilde{\omega}_n]$ (см. (39)). Доопределим ее на $(-\infty, B_n)$ и на $(\widetilde{\omega}_n, x - B_n)$ (при $x > \tilde{\omega}_n + B_n$), положив в первом случае $\widetilde{Q}(t) = t^2/2B_n^2 + \nu(2t/B_n - 1)$, а во втором $\widetilde{Q}(t) = t^2/2B_n^2 + \nu(2t/\widetilde{\omega}_n - 1)$, где функция $\nu(u) = 0$ при $u < 0$ и $\nu(u) = \sum_{l=0}^{2} \gamma_l u^{l+3}$ при $u \geqslant 0$, а коэффициенты $\{\gamma_l\}$ являются решением системы линейных уравнений

$$\nu_{(1)}^{(l)} = \left(\frac{A}{2}\right)^l \left(Q(t) - \frac{t^2}{2B_n^2}\right)^{(l)}\Bigg|_{t=A}, \quad l = 0, 1, 2, 3,$$

при $A = B_n$ и $A = \widetilde{\omega}_n$ в первом и во втором случаях соответственно. Теперь функция $\tau(y) = g(y) - \widetilde{Q}(x - y)$ (см. (47)) определена на $[B_n, \infty)$ и равномерно по $y \geqslant B_n$ при $n \to \infty$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \tau'(y) &= g'(y) - \frac{\big(1 + o(1)\big)}{B_n^2}(x - y), \\ \tau''(y) &= g''(y) + \frac{\big(1 + o(1)\big)}{B_n^2}; \end{aligned} \tag{100}$$

кроме того, если $y_{\pm\beta}$, где $0 < \beta < 1$, удовлетворяют уравнению

$$g''(y_{\pm\beta}) + \frac{1 \pm \beta}{B_n^2} = 0, \tag{101}$$

то

$$\tau''(y) < 0 \ \text{ при } y \in [B_n, y_\beta) \ \text{ и } \ \tau''(y) > 0 \ \text{ при } y \geqslant \max(B_n, y_{-\beta}), \tag{102}$$

или, другими словами, $\tau(y)$ выпукла вверх до y_β и выпукла вниз после $y_{-\beta}$. В самом деле, по (42), (101), (100)

$$\begin{aligned} \tau''(y) &< g''(y_\beta) + \frac{1 + \beta/2}{B_n^2} < -\beta/2B_n^2, \\ \tau''(y) &> g''(y_{-\beta}) + \frac{1 - \beta/2}{B_n^2} > \beta/2B_n^2. \end{aligned}$$

Рассуждая так же, как в процессе доказательства оценки (81) (см. также (17b)), можно показать, что при $x - \widetilde{\omega}_n > B_n$

$$B_n^{-1} \int_{B_n}^{x - \widetilde{\omega}_n} \overline{V}(y) e^{\widetilde{Q}(x-y)}\, dy = o\big(\overline{V}(x)\big), \quad n \to \infty.$$

Отсюда и из (18) следует, что

$$\widetilde{I}_n(x) = \frac{1 + o(1)}{B_n\sqrt{2\pi}} n \int_{B_n}^{\infty} \widetilde{V}(y) e^{-\tau(y)}\, dy, \quad x \geqslant B_n, \quad n \to \infty, \tag{103}$$

где $\widetilde{V}(y) = e^{g(y)}\overline{V}(y)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый числовой параметр, $\delta = \varepsilon^3$. Из (41), (101) и (45) при достаточно большом n и достаточно малом $\eta = \eta(\varepsilon)$ ($\eta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$) следует, что

$$B_n^2\left|g''\left(y_{-\delta}(1-\varepsilon)^{-1}\right)\right| \geqslant (1-\eta)B_n^2|g''(y_{-\delta})| = (1-\eta)(1-\delta) \geqslant B_n^2|g''(y_*)|.$$

Отсюда и из (42) получим

$$y_{-\delta} \leqslant (1-\varepsilon)y_*. \tag{104}$$

Предположим, что $y_\delta \geqslant B_n$ (если $y_\delta < B_n$, то последующие рассуждения лишь упрощаются). Имеем (см. (104))

$$\begin{aligned}\int_{B_n}^{\infty} \widetilde{V}(y)e^{-\tau(y)}\,dy &= \int_{B_n}^{y_\delta} \cdots + \int_{y_\delta}^{y_{-\delta}} \cdots + \int_{y_{-\delta}}^{(1-\varepsilon)y_*} \cdots \\ &+ \int_{(1-\varepsilon)y_*}^{(1+\varepsilon)y_*} \cdots + \int_{(1+\varepsilon)y_*}^{\infty} \cdots = I_1 + \cdots + I_5.\end{aligned} \tag{105}$$

Очевидно,

$$\tau(y) = \tau(y_*) + \frac{1}{2}(y-y_*)^2\tau''(\theta), \quad \theta \in (y, y_*). \tag{106}$$

При этом, если $y \geqslant y_{-\delta}$, то (см. (42), (101))

$$B_n^2\tau''(\theta) = 1 + o(1) - B_n^2|g''(\theta)| = 1 - \frac{1}{2}\delta - B_n^2|g''(y_{-\delta})| = \delta/2;$$

если же $|y - y_*| < \varepsilon y_*$ и $\varepsilon \to 0$ при $n \to \infty$, то по (45), (41)

$$\begin{aligned}\tau''(\theta) &= g''(y_*)\big(1+o(1)\big) + \big(1+o(1)\big)/B_n^2 = g''(y_*) + \big(1+o(1)\big)/B_n^2 \\ &= \tau''(y_*)\big(1+o(1)\big), \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Из сказанного и из (24), (25) следует, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned}I_3 + I_5 &= O\left(e^{-\tau(y_*)}\int_{\max(B_n(1-\varepsilon)y_*)}^{(1+\varepsilon)y_*} \widetilde{V}(y)\exp\left\{-\delta(y-y_*)^2/4B_n^2\right\}dy\right) \\ &= e^{-\tau(y_*)}B_nO\Big(\exp\{-\delta\varepsilon^2y_*^2/4B_n^2\}\big(\widetilde{V}(B_n) + \widetilde{V}(y_*)\big)\Big),\end{aligned} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}I_4 &= \big(1+o(1)\big)e^{-\tau(y_*)}\widetilde{V}(y_*)\int_{|y-y_*|<\varepsilon y_*} \exp\left\{-\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)\right. \\ &\quad \left.\times\, \tau''(y_*)(y-y_*)^2\right\}dy.\end{aligned} \tag{108}$$

Далее, в соответствии с (100), (40) и (45)

$$\frac{x-y_*}{y_*} = \frac{B_n^2}{y_*}\cdot\frac{x-y_*}{B_n^2} \sim \frac{B_n^2}{y_*}g'(y_*) = O\Big(B_n^2|g''(y_*)|\Big) = O(1), \quad n \to \infty,$$

поэтому при некотором $\beta > 0$

$$x > y_* > \beta x. \tag{109}$$

Из (107)–(109) заключаем, что

$$I_3 + I_4 + I_5 = \bigl(1 + o(1)\bigr)\sqrt{\frac{2\pi}{\tau''(y_*)}}\,\overline{V}(y_*)e^{Q(x-y_*)}, \quad n \to \infty, \tag{110}$$

если

$$\varepsilon \downarrow 0, \quad \varepsilon\frac{x}{B_n} \to \infty \quad \text{при } n \to \infty. \tag{111}$$

Используя (102), получим

$$I_1 = O\Bigl(\widetilde{V}(B_n)B_n \exp\Bigl\{ -\min\bigl(\tau(B_n), \tau(y_\delta)\bigr)\Bigr\}\Bigr), \quad n \to \infty. \tag{112}$$

Рассуждая так же, как при доказательстве оценки (82), можно показать, что

$$n\widetilde{V}(B_n)e^{-\tau(B_n)} = o\bigl(\widetilde{\pi}(x) + n\overline{V}(x)\bigr), \quad x \geqslant B_n, \quad n \to \infty. \tag{113}$$

Пусть $\tau_\delta(y) = g(y) + ((1-\delta)/2B_n^2)(x-y)^2$, $\delta = \varepsilon^3$, причем ε удовлетворяет (111) и стремится к нулю достаточно медленно. Тогда $\tau_\delta''(y_{-\delta}) = 0$, $\tau_\delta''(y) < 0$ при $y > y_{-\delta}$ (т.е. $\tau_\delta(y)$ выпукла вверх при $y > y_{-\delta}$, и, кроме того (см. (44), (47), (101)),

$$y_\delta < \xi_0 < y_{-\delta} \quad \text{и} \quad \tau_\delta'(y_{-\delta}) \leqslant \tau_\delta'(\xi_0) \leqslant \bigl(\nu(\xi_0) - (1-\delta)x\bigr)/B_n^2 < 0. \tag{114}$$

Отсюда

$$I_2 = O\Bigl(\widetilde{V}(B_n)B_n \exp\Bigl\{ -\min\bigl(\tau_\delta(y_\delta), \tau_\delta(y_{-\delta})\bigr)\Bigr\}\Bigr), \quad n \to \infty. \tag{115}$$

Так как $\tau(y) \geqslant \tau_\delta(y) \geqslant \tau(y) - \delta x^2/B_n^2$, то (см. (106), (104))

$$\tau_\delta(y_{-\delta}) \geqslant -\delta\frac{x^2}{B_n^2} + \tau(y_{-\delta}) \geqslant \tau(y_* - \varepsilon y_*) - \delta\frac{x^2}{B_n^2} \geqslant \tau(y_*) + \beta\varepsilon^2\frac{x^2}{B_n^2}, \tag{116}$$

если $0 < \beta$ достаточно мало. Далее, принимая во внимание (114), найдем, что если $\tau_\delta(y_\delta) < \tau_\delta(y_{-\delta})$, то существует $\widetilde{y} \in (y_\delta, y_{-\delta})$, удовлетворяющее условиям $\tau_\delta'(\widetilde{y}) = 0$ и

$$\begin{aligned}\tau_\delta(y_\delta) &= \tau_\delta(\widetilde{y}) + \frac{(y_\delta - \widetilde{y})^2}{2}\tau_\delta''(\theta)\Big|_{\theta \in (y_\delta, \widetilde{y})} \geqslant \tau_\delta(\widetilde{y}) - \delta x^2/B_n^2 \\ &\geqslant \tau_\delta(y_{-\delta}) - \delta x^2/B_n^2 \geqslant \tau(y_*) + \frac{1}{2}\beta\varepsilon^2 x^2/B_n^2\end{aligned} \tag{117}$$

(действительно, $B_n^2\tau_\delta''(\theta) \in (-2\delta, 0)$, $\tau_\delta(\widetilde{y}) = \max_{y > y_{-\delta}} \tau_\delta(y)$; остается воспользоваться (116)).

Из (116), (117) следует, что $\min(\tau_\delta(y_\delta), \tau_\delta(y_{-\delta})) \geqslant \tau(y_*) + \frac{1}{2}\beta\varepsilon^2 x^2/B_n^2$. Учитывая (113) и то, что $\tau(y_\delta) \geqslant \tau_\delta(y_\delta)$, отсюда и из (111), (115) легко получим

$$nB_n(I_1 + I_2) = o\big(nB_n I_4 + n\overline{V}(x) + \widetilde{\pi}(x)\big), \quad x \in A_n, \quad n \to \infty.$$

Таким образом (см. также (110), (105), (103)), справедливость оценки (43) доказана, а вместе с ней доказана также лемма 3а.

Доказательство замечания 2. По условиям замечания 2 при y_0, $y \uparrow \infty$

$$\begin{aligned} g(y) - g(y_0) &= \int_{y_0}^{y} g'(u)\,du = \frac{1+o(1)}{\alpha - 1}\int_{y_0}^{y} ug''(u)\,du \\ &= (\alpha-1)^{-1}\big(1+o(1)\big)\left[ug'(u)\Big|_{y_0}^{y} - \int_{y_0}^{y} g'(u)\,du\right], \end{aligned}$$

откуда

$$\alpha\big(g(y) - g(y_0)\big) = \big(1+o(1)\big)\big(yg'(y) - y_0 g'(y_0)\big). \tag{118}$$

Поскольку $g(y) \to \infty$ при $y \to \infty$, из (118) следует, что

$$g'(y) \sim \alpha g(y)/y, \quad y \to \infty. \tag{119}$$

Условие (41), как легко видеть, также выполняется. Согласно (119) функция $g(y)$ правильно меняется с показателем α; таким образом, C_n задается равенством (19). Отсюда (см. (47) и (14)) $\xi_0 \sim (\alpha(1-\alpha))^{1/(2-\alpha)} \times \eta(B_n)$, $\nu(\xi_0) \sim (2-\alpha)(1-\alpha)^{-1}\xi_0$ $(n \to \infty)$ и существует такая постоянная $\varepsilon_0 > 0$, что

$$(1+\varepsilon_0)\nu(\xi_0) \leqslant (1-\varepsilon_0)C_n. \tag{120}$$

Далее покажем, что если $x \geqslant (1+\varepsilon_0)\nu(\xi_0)$, то из (48), (119) вытекает (45). Действительно, пусть $x > (1+\varepsilon_0)\nu(\xi_0)$. Тогда уравнение $\nu(y) = x$ имеет при $y > B_n$ одно или два решения, причем максимальный корень $\widehat{y}_*$ этого уравнения больше ξ_0, и $\widehat{y}_* \sim y_*$, если $n \to \infty$. Имеем при $0 < \beta < \varepsilon_0$ и $n > n_0$

$$\nu\big((1+\beta)\xi_0\big) \leqslant (1+\beta)\nu(\xi_0) \leqslant (1+\beta)(1+\varepsilon_0)^{-1}x \leqslant \nu(y_*).$$

С учетом того, что при $y > \xi_0$ функция $\nu(y)$ возрастает, отсюда получим $\widehat{y}_* > (1+\beta)\xi_0$. Поэтому (см. также (119), (48)) при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} B_n^2|g''(y_*)| \sim B_n^2|g''(\widehat{y}_*)| &\sim \alpha(1-\alpha)B_n^2\frac{g(\widehat{y}_*)}{\widehat{y}_*^2} \\ &\leqslant \frac{\alpha(1-\alpha)}{1+\beta}B_n^2\frac{g(\xi_0)}{\xi_0^2} \sim (1+\beta)^{-1} < 1. \end{aligned}$$

Итак, если $x \geqslant (1-\varepsilon_0)C_n$, то (120) $\Longrightarrow$ (44) $\Longrightarrow$ (45). Замечание 2 доказано.

Д о к а з а т е л ь с т в о   л е м м ы 3b. Рассуждая так же, как в начале доказательства леммы 3a (см. (97)–(99)), покажем, что максимальный корень уравнения $\tau'(y) = 0$ при некотором $\varepsilon > 0$ удовлетворяет условию

$$\max(B_n,\, x - \widetilde{\omega}_n + \varepsilon\widetilde{\omega}_n) < y_* < x - B_n \tag{121}$$

и справедливо равенство (103), в котором функция $\tau(y)$ при $y \notin [B_n, \widetilde{\omega}_n]$ определена аналогично $\tau(y)$ из леммы 3a (функция $\nu(u)$ при $u > 0$ заменяется на $\sum_{l=0}^{3} \gamma_l u^{l+4}$) и, в соответствии с этим определением и (51), удовлетворяет, помимо (100), условию

$$\tau'''(y) = g'''(y) + o(1)/B_n^2(x - y), \quad B_n \leqslant y \leqslant x - B_n. \tag{122}$$

Пусть точки $y_{\pm\beta}$ определяются равенством (101). Тогда (см. (49)) при некоторых $c_1, c_2 > 0$

$$0 < y_{-\beta} - y_\beta < \frac{2\beta}{B_n^2 \min_{y_\beta < \theta < y_{-\beta}} g'''(\theta)} \leqslant c_1\beta \frac{y_{-\beta}}{B_n^2 |g''(y_{-\beta})|} \leqslant c_2 \beta y_{-\beta},$$

т.е.

$$y_{-\beta} \sim y_\beta \quad \text{при} \quad \beta \to 0. \tag{123}$$

В дальнейшем без потери общности будем предполагать, что существует $\beta > 0$, при котором $y_\beta > B_n$. В силу (102) $\tau'(y)$ убывает на $[B_n, y_\beta)$ и возрастает на $[y_{-\beta}, \infty)$. Поэтому если $\min_{y \geqslant B_n} \tau'(y) < 0$, то заведомо найдется такая точка $\widetilde{y} \in (y_\beta, y_{-\beta})$, что $\tau'(\widetilde{y}) < 0$. Отсюда, из (100), (101) и (40) несложно вывести, что $\widetilde{y} < (1 - \varepsilon)x$ при некотором $\varepsilon > 0$. Учитывая (123), получим, что при некотором $\varepsilon > 0$

$$y_{-\beta} \leqslant (1 - \varepsilon)x. \tag{124}$$

Из (122), (49), (101) и (124) следует, что при $y \in [y_\beta, y_{-\beta}]$ и $n \to \infty$

$$\tau'''(y) \geqslant \varepsilon_0 \frac{|g'''(y)|}{y} - o(1)\frac{|g''(y)|}{x - y} \geqslant \varepsilon_0 \frac{|g''(y)|}{y} \, \frac{x - y_{-\beta}(1 + o(1))}{x - y} > 0.$$

Другими словами, функция $\tau'(y)$ на $[y_\beta, y_{-\beta}]$ выпукла вниз и (с учетом (102)) имеет минимум и такой точке ξ_*, что

$$\tau''(\xi_*) = 0. \tag{125}$$

Итак, функция $\tau(y)$ на $[B_n, \xi_*)$ выпукла вверх, а на (ξ_*, ∞) выпукла вниз и имеет минимум в точке y_* (см. (121)).

Пусть положительный параметр δ_0 сколь угодно медленно стремится к нулю при $n \to \infty$. Если (см. (45), (100))

$$B_n^2 \tau''(y_*) \geqslant \delta_0, \tag{126}$$

то асимптотический анализ $\widetilde{I}_n(x)$ (см. (103)) проводится так же, как в (104)–(112), с заменой $y_{\pm\beta}$ на ξ_*. В итоге приходим к равенству (43), которое при условии (126) равносильно (52). В самом деле,

$$k_* \geqslant \frac{\delta_0^3}{B_n^6} y_*^2 \Big/ \left(y_* g'''(y_*)\right)^2 \geqslant \left(\frac{\delta_0^2 y_*}{B_n}\right)^2 \Big/ \left(B_n^2 g''(y_*)\right)^2 \to \infty, \quad n \to \infty,$$

(см. (109), (46)). Пусть теперь

$$0 < B_n^2 \tau''(y_*) < \delta_0. \tag{127}$$

Покажем, что в этом случае корни уравнения $\tau'(\widehat{y}) = 0$ удовлетворяют условию (см. (125))

$$\widehat{y} \sim \xi_*, \quad n \to \infty. \tag{128}$$

Имеем

$$\tau'(\widehat{y}) - \tau'(\xi_*) = -\tau'(\xi_*) = (\widehat{y} - \xi_*)^2 \tau'''(\theta)/2, \quad \theta \in (\widehat{y}, \xi_*). \tag{129}$$

В силу (127), равенства $\tau'(y_*) = 0$ и условий (40), (100)

$$\frac{x - y_*}{y_*} \asymp B_n^2 |g''(y_*)|, \quad n \to \infty,$$

откуда

$$\beta x \leqslant y_* \leqslant (1 - \beta)x \quad (\exists \beta > 0). \tag{130}$$

Из (122), (130), (49), (42) и (127) получим при $B_n \leqslant \theta \leqslant 2y_*$:

$$\begin{aligned} \tau'''(\theta) &= g'''(\theta) + o(1/xB_n^2) = g'''(\theta)\left(1 + o\left(\frac{\theta}{B_n^2|g''(\theta)|x}\right)\right) \\ &= g'''(\theta)\big(1 + o(1)\big), \quad n \to \infty, \end{aligned} \tag{131}$$

$$g'''(\theta) \geqslant \beta |g''(\theta)|/\theta \geqslant \beta^2 |g''(y_*)|/y_* \quad \text{при некотором } \beta > 0. \tag{132}$$

Далее (напоминаем, что $\tau'(y_*) = 0$)

$$\begin{aligned} \tau'(\xi_*) &= \tau'(y_*) + (\xi_* - y_*)\tau''(y_*) + \frac{1}{2}(\xi_* - y_*)^2 \tau'''(\theta) \\ &\geqslant -\frac{1}{2}\tau''^2(y_*)/\tau'''(\theta). \end{aligned} \tag{133}$$

Из (131)–(133), (127) следует, что $-\tau'(\xi_*) = O(\delta_0^2 y_*/B_n^2)$, $n \to \infty$. Подставляя эту оценку в (129) и учитывая (131), (132), (127), придем к (128). Согласно (125), (131), (128) и (50)

$$\tau''(y_*) = (y_* - \xi_*)\tau'''(\theta) \sim (y_* - \xi_*)g'''(\theta) \sim (y_* - \xi_*)g'''(y_*), \quad n \to \infty,$$

и, следовательно,

$$y_* - \xi_* = \big(1 + o(1)\big)\tau''(y_*)/g'''(y_*), \quad n \to \infty. \tag{134}$$

Из (134) и аппроксимации (133) для $\tau'(\xi_*)$ получим

$$\tau'(\xi_*) = -\frac{1}{2}\tau''^2(y_*)/g'''(y_*)\big(1+o(1)\big), \quad n\to\infty. \tag{135}$$

Используя в (129) соотношения (135) и (131), (50), докажем оценку

$$\widehat{y} = \xi_* \pm \big(1+o(1)\big)\tau''(y_*)/g'''(y_*)\big(1+o(1)\big), \quad n\to\infty. \tag{136}$$

Таким образом, уравнение $\tau'(\widehat{y}) = 0$ имеет два корня y_* и y^*, причем

$$y^* - y_* = \big(-2+o(1)\big)\tau''(y_*)/g'''(y_*), \quad n\to\infty. \tag{137}$$

Отметим, что из (121), (130) следует, что $\max(B_n, x-\widetilde{\omega}_n) < y^*$ (и $x = O(\widetilde{\omega}_n)$), т.е. (см. (39)) y^* содержится в области определения "недоопределенной" функции $\widetilde{Q}(y)$.

Перейдем к асимптотическому анализу $\widetilde{I}_n(x)$ (см. (103), (105)). Имеем

$$\int_{B_n}^{\infty} \widetilde{V}(y)e^{-\tau(y)}dy = \int_{B_n}^{y^*} + \int_{y^*}^{(1+\beta)y_*} + \int_{(1+\beta)y_*}^{\infty} = I_1 + I_2 + I_3. \tag{138}$$

Функция $\tau(y)$ не убывает на $[B_n, y^*)$ (y^* — максимум $\tau(y)$ на $[B_n, \xi_*)$), значит,

$$I_1 = O\big(B_n\widetilde{V}(B_n)e^{-\tau(B_n)}\big), \quad n\to\infty. \tag{139}$$

Интеграл I_3 при $\beta = \sqrt{\delta_0}$ оценивается с помощью (107). Рассмотрим I_2. Имеем (см. (131) и (128)) при $y \in (y^*, (1+\beta)y_*)$:

$$\begin{aligned}\tau(y) = {}&\tau(y_*) + \frac{1}{2}(y-y_*)^2\tau''(y_*)\\ &+\frac{1}{6}(y-y_*)^3 g'''(y_*)\big(1+o(1)\big), \quad n\to\infty.\end{aligned} \tag{140}$$

Используя представление (140) и делая замену переменных $t = (y-y_*)Q$, где $Q = \tau''(y_*)/g'''(y_*)$, получим (см. (52))

$$\begin{aligned}I_2 = {}&\big(1+o(1)\big)\widetilde{V}(y_*)e^{-\tau(y_*)}Q\\ &\times\int_{-2+o(1)}^{\beta y_*/Q} \exp\left\{-k_*\left(\frac{1}{2}t^2 + t^3\left(\frac{1}{6}+o(1)\right)\right)\right\}dt.\end{aligned} \tag{141}$$

При этом, в соответствии с (127) и (149)

$$\beta y_*/Q \geqslant \sqrt{\delta_0}B_n^2 y_* g'''(y_*)/\delta_0 \to \infty \quad \text{при} \quad \delta_0\to 0.$$

Отсюда, имея в виду, что $J(k) \geqslant \beta/\sqrt{k}$ при $k \geqslant 1$, несложно доказать, что равномерно по $k_* \geqslant 1$ при $\beta \to 0$

$$\int_{-2-\beta}^{1/\beta} \exp\left\{-(t^2/2 + t^3/6)k_*\big(1+o(1)\big)\right\}dt = \big(1+o(1)\big)J(k_*). \tag{142}$$

Если же $0 < k_* < 1$, то $J(k_*) \geqslant \beta k_*^{-1/3}$ и

$$\beta y_* k_*^{1/3}/Q \geqslant \beta^{7/6}(y_*/B_n)^{1/3} \to \infty, \quad n \to \infty, \tag{143}$$

откуда без особых хлопот получим аналог соотношения (142) уже при $k_* < 1$. Из (141), (142), (139), (112), (113) и (138), (103) вытекает (52). Лемма 3b доказана полностью.

Коротко прокомментируем результаты п. 3. Теоремы 3a, 3b вытекают из теоремы 2 (замечания 1), (19), леммы 1a и следствия 1. Равносильность условий (56) и (20) проверяется непосредственно.

Теорема 4 при $B_n g'(x) > 1 + \varepsilon > 1$ следует из теоремы 2, лемм 1a и 3b. В случае

$$B_n g'(x) \leqslant 1 + \varepsilon \tag{144}$$

требуется показать, что

$$\begin{aligned}&\bigl(1 - V(y_*)\bigr)\frac{\rho'(y_*)}{B_n g'''(y_*)}\exp\bigl\{-(x-y_*)^2/2B_n^2\bigr\}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}J\bigl(\rho'^3(y_*)/g'''^2(y_*)\bigr)\\ &= \bigl(1+o(1)\bigr)\bigl(1-V(x)\bigr)\exp\Bigl\{\bigl(B_n g'(x)\bigr)^2/2\Bigr\}, \quad n\to\infty,\end{aligned} \tag{145}$$

и воспользоваться леммой 2b. Обозначим $g(y) + (x-y)^2/2B_n^2$ через $\tau(y)$ (заметим, что $\tau''(y) = \rho'(y)$). При условии (144), как легко проверить, $y_* \sim x$, если $n \to \infty$. Кроме того, в силу (40) и (49) $B_n^2|g''(x)| = o(1)$, $B_n^3 g'''(y_*) \to 0$ при $n \to \infty$. Из (144), учитывая сказанное, а также соотношения

$$\begin{aligned}\tau(x) - \tau(y_*) &= \frac{1}{2}(x-y_*)^2\tau''(\theta)\big|_{\theta\in(y_*,x)} = (x-y_*)^2\bigl(1+o(1)\bigr)/2B_n^2\\ &= (x-y_*)^2/2B_n^2 + o(1), \quad n\to\infty,\\ J(k) &= \sqrt{\frac{2\pi}{k}}\bigl(1+o(1)\bigr), \quad k\to+\infty,\end{aligned}$$

получим (145).

Теоремы 5b и 5a проверяются аналогично с использованием соответственно лемм 1b–3b и лемм 1b, 2b, 3a и замечания 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов И. А., Линник Ю. В.* Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965, 524 с.
2. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. М.: Наука, 1972, 416 с.
3. *Петров В. В.* О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. — Теория вероятн. и ее примен., 1965, т. X, в. 2, с. 310–322.
4. *Золотарев В. М.* Об одной новой точке зрения на предельные теоремы, учитывающие большие уклонения. — Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятн. и матем. статистике. Вильнюс: Гос. изд-во полит. и научн. литер. ЛитССР, 1962, с. 43–47.

5. *Нагаев С. В.* Локальные предельные теоремы для больших уклонений. — Вестник Ленинград. унив., 1962, № 1, с. 80–88.
6. *Нагаев С. В.* Интегральная предельная теорема для больших уклонений. — Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат. наук, 1962, № 6, с. 37–43.
7. *Розовский Л. В.* О предельных теоремах для больших уклонений в узких зонах. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 4, с. 847–857.
8. *Розовский Л. В.* Вероятности больших уклонений сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения нормального закона. — Теория вероятн. и ее примен., 1989, т. XXXIV, в. 4, с. 686–705.
9. *Пинелис И. Ф.* Об асимптотической эквивалентности вероятностей больших уклонений суммы и максимума независимых случайных величин. — Предельные теоремы теории вероятностей, Труды института матем. СО АН СССР, т. 5, с. 144–173.
10. *Розовский Л. В.* Одна оценка для вероятностей больших уклонений. — Матем. заметки, 1987, т. 42, № 1, с. 145–156.
11. *Нагаев А. В.* Большие уклонения для одного класса распределений. — В сб.: Предельные теоремы теории вероятн. Ташкент: изд-во АН УзССР, 1963, с. 56–68.
12. *Нагаев С. В.* Большие уклонения для сумм независимых одинаково распределенных случайных величин. — Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 1, с. 25–26.
13. *Nagaev S. V.* Large deviations for sums of independent random variables. — Trans. Sixth Prague Conf. Inform. Theory, Random Processes, Statist. Decision Functions, Prague, p. 657–674.
14. *Nagaev S. V.* Large deviations of sums of independent random variables. — Ann. Probab., 1979, v. 7, № 5, p. 745–789.
15. *Linnik Yu. V.* On probability of large deviations for the sums of independent variables. — Proc. Fourth Berkeley Symp. Math. Statist. Probability, Univ. Calif. Press, 1961, v. 2, p. 289–306.
16. *Нагаев А. В.* Предельные теоремы, учитывающие большие уклонения, при нарушении условия Крамера. — Изв. АН УзССР, сер. физ-матем., 1969, № 6, с. 17–22.
17. *Нагаев А. В.* Интегральные предельные теоремы с учетом больших уклонений, когда не выполнено условие Крамера. I, II. — Теория вероятн. и ее примен., 1969, т. XIV, в. 1, с. 51–63; т. XIV, в. 2, с. 203–216.
18. *Ткачук С. Г.* Теоремы о больших уклонениях в случае распределений с правильно меняющимися хвостами. — В сб.: Случайные процессы и стат. выводы, 5. Ташкент: ФАН, 1975, с. 164–174.
19. *Алешкявичене А. К.* О больших уклонениях. — В кн.: Четвертая международная Вильнюсская конф. по теории вероятн. и матем. стат., т. I, Вильнюс, 1985, с. 13–14.
20. *Пинелис И. Ф.* Одна задача о больших уклонениях в пространстве траекторий. — Теория вероятн. и ее примен., 1981, т. XXVI, в. 1, с. 73–87.
21. *Höglund T.* A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1979, B. 49, H. 1, S. 105–117.

Поступила в редакцию
28.V.1990